



Dime con qué gráfica andas y te diré que función eres

Eduardo **Basurto** Hidalgo
CRESUR
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

Una articulación fluida entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico en objetos matemáticos, como por ejemplo funciones, es una capacidad deseable en los estudiantes de educación media, de hecho algunas investigaciones en Educación Matemática registran aportes respecto de la comprensión de dichos objetos matemáticos vía la realización de tareas que involucran el manejo de las representaciones, junto con lo anterior se presume un vínculo muy conveniente entre el uso de tecnología digital y la comprensión de ciertos aspectos de las funciones, es por eso que el propósito de este minicurso es mostrar algunas ideas de como fortalecer la comprensión de la funciones en específico de sus gráficas a partir de las prestaciones dinámicas y de retroalimentación inmediata que nos brindan algunas herramientas tecnológicas de última generación.

Palabras clave: funciones, gráficas, tecnología, retroalimentación inmediata.

Introducción

Dentro de la enseñanza de las matemáticas existen dificultades y obstáculos de distinta naturaleza dependiendo de la rama de esta disciplina que se estudie, pero algo en común a cualquiera de dichas ramas es que algunas de estas dificultades y obstáculos son provocadas por un tratamiento didáctico deficiente de los contenidos curriculares. Un ejemplo de esto se observa en muchos estudiantes que reflejan poco éxito en la parte final de su educación media superior principalmente en materias de Cálculo Diferencial e Integral, buena parte se debe a su escaso conocimiento del comportamiento de las funciones.

Es sabido que, “Uno de los conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas es el de función. Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, la construcción del concepto de función es la base para la posterior comprensión sobre otros temas de matemáticas” Hitt (2002). El estudio de las funciones en nivel secundaria se hace presente en el Programa de estudios SEP (2017) vigente en México, por medio del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, donde los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente

distintos, además se resuelven problemas que requieren el análisis, del concepto de función, a partir de los vínculos entre las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Respecto al estudio del concepto de función así como de sus representaciones, es importante mencionar que evaluaciones a nivel nacional realizadas a estudiantes mexicanos de tercer grado de secundaria por parte del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) como la prueba Excale así como a estudiantes de 6° semestre de bachillerato con la prueba ENLACE muestran que solamente en promedio 30% o menos de los estudiantes contestan correctamente reactivos correspondientes a situaciones tales como, identificar la función que corresponde a una gráfica o viceversa, identificar la función que corresponde a una tabla de valores o viceversa, resolver problemas que impliquen identificar la función que modele una tabla de valores, etc.

Fundamentación

A lo largo de la formación matemática de los estudiantes de secundaria se puede observar que son enfrentados a una *polisemia* de las literales, en específico de las variables e incógnitas al pretender formar en ellos concepciones de las literales tales como las de Küchemann (1981) y el modelo de los tres usos de la variable de Ursini y Trigueros (2006). Investigadores que en general comparten la visión de las literales en tres usos principales: *Incógnitas específicas*, donde la literal tiene un valor desconocido específico como en las ecuaciones. *Números generalizados*, donde la letra puede tomar más de un valor, como en el caso de la expresión de patrones en sucesiones numéricas o figurativas. *Variables*, donde las literales son usadas para representar un rango específico de valores y se observa una relación existente entre dos conjuntos de valores.

Todavía en la secundaria, pero principalmente durante el bachillerato, a la polisemia anterior se unen otro tipo de literales llamados *Parámetros*, los cuales como ya se mencionó han emergido esporádicamente en la secundaria y hacen presencia de manera más formal al introducir a los estudiantes en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias, expresiones algebraicas en un nivel aún más abstracto.

Esto se realiza en asignaturas como Geometría analítica o Funciones mediante una presencia abundante de *Parámetros*, en objetos tales como familias de funciones, lugares geométricos e incluso en expresiones algebraicas que modelan diversos fenómenos o situaciones.

Este conflicto que enfrentan los estudiantes, no sólo de poder distinguir entre incógnitas y variables sino a la vez, tener que distinguir éstas de los parámetros, pensamos que es uno de los obstáculos en la conceptualización de los mismos, así como en la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales como lo son las funciones.

Conceptualización de los parámetros como parte fundamental en la comprensión de las gráficas de funciones

La conceptualización de los *parámetros*, así como su diferenciación de variables o incógnitas, ha dado lugar a ciertas investigaciones en las que se destacan diversos aspectos sobre los significados que pueden tener dichos objetos matemáticos:

- Bloedy-Vinner (2001), para quien “*por un lado, el parámetro es un argumento de una función (de segundo orden), y al variar, éste, determina ecuaciones o funciones, por otro lado, dentro de cada ecuación o función, que corresponde a un valor específico del parámetro, el parámetro es una constante, mientras las otras letras son incógnitas o variables*”.

- En Drijvers (2001) se observa que “El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro puede ser considerado una meta – variable: por ejemplo, a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición (placeholder), una cantidad desconocida o que cambia, pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular sino completamente a la gráfica. El concepto de parámetro además es adecuado para resaltar la abstracción de situaciones concretas, así que representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes” Drijvers (2001, p. 222).

Dentro del fenómeno **parámetro** podemos identificar tres pasos esenciales en la trayectoria de aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición (placeholder), como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Tabla 1

Rol del Parámetro según Drijvers (2001)

<i>Rol del parámetro</i>	<i>Por ejemplo: a en $y = a x + b$</i>	<i>Modelo gráfico</i>
<i>Fijador de posición.</i>	a contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra.
<i>Cantidad que cambia.</i> Parámetro que se desliza.	a transita a través de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rápidamente las páginas de un “comic”.
<i>Generalizador.</i> Parámetro que determina una familia.	a representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas.

Desarrollo del minicurso

Dado el potencial que se tiene hoy en día con herramientas tecnológicas abiertas como Geogebra o bien comerciales como HP Prime, el manejo de las ideas de funciones relacionadas con los parámetros asociadas a las mismas que pueden determinar su forma, normalmente se inicia con el tratamiento de las mismas aprovechando las ventajas dinámicas asociadas a deslizadores como es el caso de Geogebra, colocando ciertas expresiones controladas por deslizadores que impactan de forma inmediata en las gráficas y bajo cuestionamientos indicados se busca que los estudiantes encuentren las relaciones y patrones que describan la influencia que cada parámetro tiene en la gráfica desde su variación en la expresión algebraica como se ve en las figuras 1 y 2.

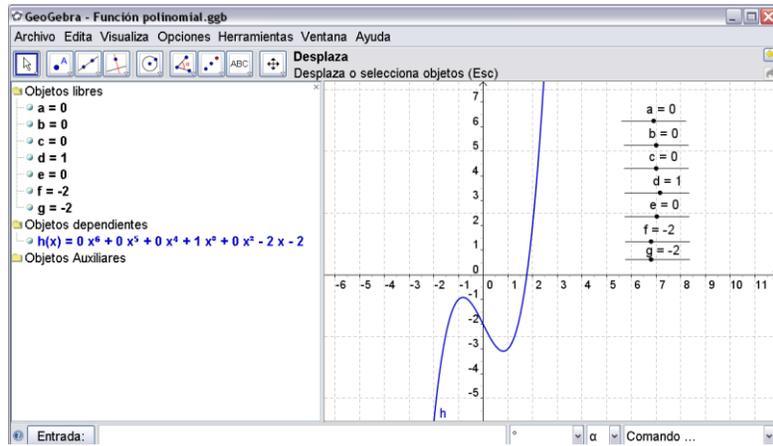


Figura 1. Función controlada por deslizadores

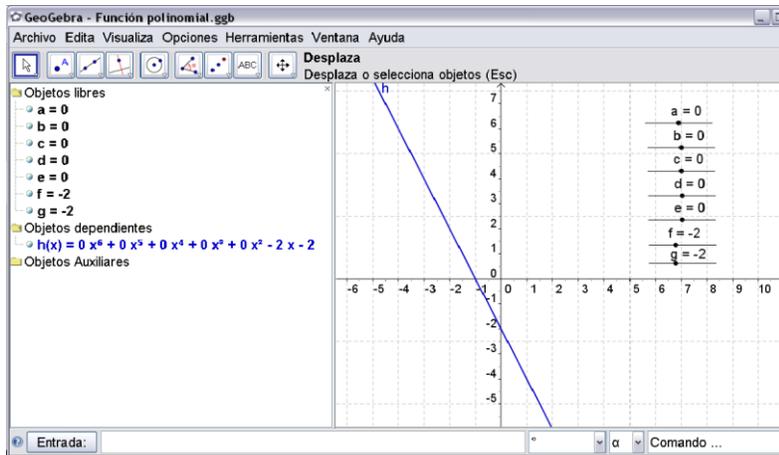


Figura 2. Función controlada por deslizadores

Esta metodología de trabajo en la que se estudian las funciones versus la expresión algebraica de las mismas, controladas de manera dinámica vía deslizadores aporta una retroalimentación inmediata entre ambas representaciones muy rica que permite reconocer ciertos comportamientos que dan luz sobre el conocimiento de cierto tipo de familias de funciones generalizándolas los objetos matemáticos.

No obstante, es un acercamiento que inicia desde la parte simbólica (algebraica) de estos objetos matemáticos, lo cual puede poner en juego mucho del bagaje algebraico que pueda haber consolidado el estudiante, lo cual, si es muy precario, como es el caso de muchos estudiantes de nivel medio, pondrá en dificultades a los estudiantes y podría alejarlos del objetivo de la actividad.

Después de explorar y discutir estas ideas en el minicurso, pondremos en el centro otro tipo de actividad proveniente de un avance tecnológico puesto a disposición recientemente, el cual permite esbozar gráficas, ya sea con el dedo en sistemas touch o con el mouse en aquellos dispositivos que no lo sean.

La tecnología de HP_Prime permite realizar este tipo de esbozos que son ajustados automáticamente por el dispositivo en el entorno gráfico, a diferencia de Geogebra que permite realizar diseños a mano alzada, pero sin un ajuste automático.

La actividad consiste que en el entorno gráfico de la aplicación de funciones, se esboza una recta que pase solo por los cuadrantes I y III de plano rectangular como se ve en la Figura 3.

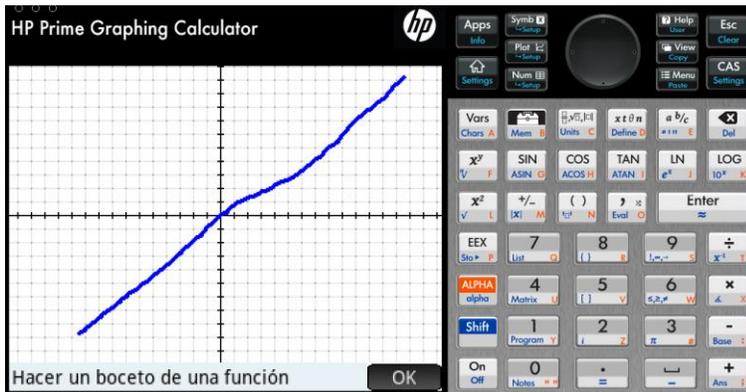


Figura 3. Esbozo de una recta que pasa por los cuadrantes I y III

Una vez que están satisfechos con el esbozo, se pide que intenten generar un esbozo de una gráfica de paralela a la primera por arriba y otra por abajo, algo similar a lo que se realiza en la Figura 4.

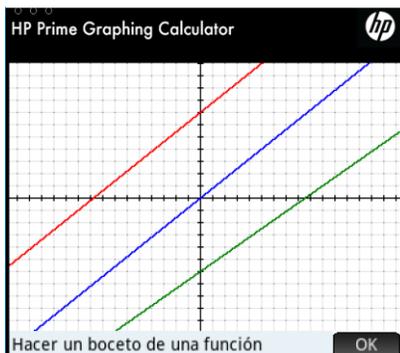
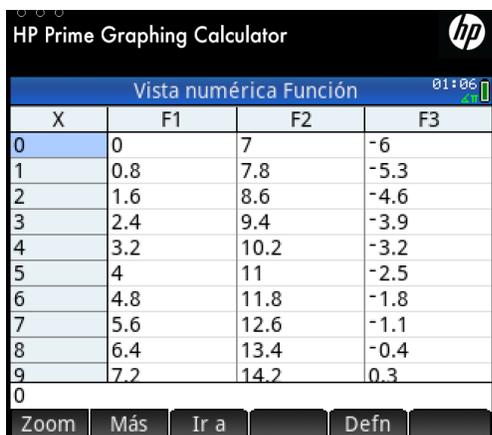


Figura 4. Esbozo de dos rectas paralelas.

El paso siguiente es pedir que se analice la representación numérica de dichas gráficas, antes de llegar a las partes simbólicas como se vería en la Figura 5.



HP Prime Graphing Calculator

Vista numérica Función

X	F1	F2	F3
0	0	7	-6
1	0.8	7.8	-5.3
2	1.6	8.6	-4.6
3	2.4	9.4	-3.9
4	3.2	10.2	-3.2
5	4	11	-2.5
6	4.8	11.8	-1.8
7	5.6	12.6	-1.1
8	6.4	13.4	-0.4
9	7.2	14.2	0.3
0			

Zoom Más Ir a Defn

Figura 5. Análisis de la representación numérica.

En esta representación se debe observar, analizar y determinar, si las tres rectas son paralelas, solo dos, o ninguna de las tres, observando la variación.

Este tratamiento ayuda a tener un principio diferente que es la gráfica, anclada a un cierto lenguaje gráfico, después migrando al análisis numérico, lo cual ya lo hace diferente, y por último arribar a la representación simbólica, en la que deberán relacionar lo ya constatado en las representaciones gráfica y numérica. Figura 6.

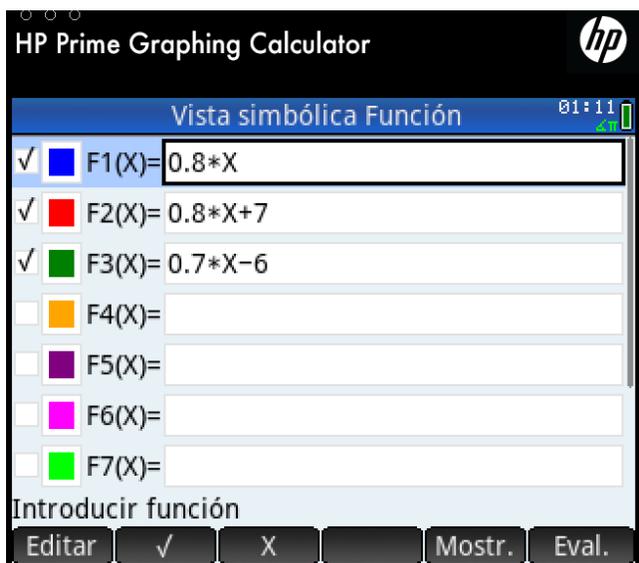


Figura 6. Análisis simbólico.

El paso siguiente en el análisis del minicurso, tratando de ponernos en un lugar empático con lo que consideran los asistentes basados en su experiencia como docentes y/o investigadores, proponer incluir una recta paralela más a las ya plateadas anteriormente, una mediante el esbozo gráfico y otra vía una propuesta desde la vista simbólica.

Evidentemente este tipo de tareas pondrá de manifiesto la generación de conjeturas, que estarán muy probablemente relacionadas con aquellas partes de la expresión que corresponde a

los parámetros, pero con una aproximación diferente a la que se da tradicionalmente e incluso diferente a la que se mostro como una posibilidad en GeoGebra.

¿Qué se espera del minicurso?

Dentro la realización del minicurso se mostrará tanto el desarrollo de las actividades entes mencionadas como otras relacionadas con la función cuadrática, buscando una aproximación distinta basada en las prestaciones que actualmente nos brindan ciertas herramientas de tecnología digital, como es el caso de los esbozos a mano alzada con y sin ajuste automático, el tránsito y retroalimentación inmediata por varias representaciones, la posibilidad de tener el campo grafico como una ventana de entrada directa sin tener que pasar previamente por las partes simbólicas o numéricas, así como el uso de herramientas tecnologías relegadas a los entornos gráficos como es el caso de ZOOM ahora ya incluida en entornos numéricos.

Estas nuevas prestaciones de la tecnología digital, pensamos que empiezan a abrir ventanas por las cuales podemos acercarnos de maneras distintas a las ya conocidas con tecnología digital que lleva más de una década en la Educación Matemática como es el caso de Geogebra, lo cual no significa abandonarlas, sino enriquecerlas con las nuevas prestaciones, como menciona Basurto (2015), “*incluso con los sistemas touch que permiten esta generación de esbozos con ajuste automático y comenzar a pensar en ideas como una especie de estimación gráfica, es decir, la estimación proviene de un ambiente totalmente numérico, la cual nos permite pensar en un resultado cada vez más plausible, pero ahora esto podrá extenderse al entorno gráfico*”. Estas ideas consideramos que pueden ser exploradas, y así como la estimación numérica es de gran ayuda en el desarrollo del sentido numérico, al parecer los esbozos gráficos ajustados y retroalimentados en otras representaciones vía tecnología digital pueden coadyuvar en el desarrollo del pensamiento gráfico.

Referencias y bibliografía

- Basurto (2015). *Funciones polinomiales en estudiantes de bachillerato vía un entorno tecnológico dinámico*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINEVSTAV. México.
- Bloedy-Vinner, H. (2001). *Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra*”, R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school Algebra*, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. H. Chick et al. (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.
- Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. Prentice Hall. México.
- Küchemann, D. (1981). Algebra, en Hart, (ed.), pp 102-119
- SEP, (2017). *Matemáticas. Educación básica. Secundaria*. Programas de Estudio.
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). *Enseñanza del algebra elemental. Una propuesta alternativa*. Ed. Trillas. México.