XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica

Ferdinando **Arzarello**
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Italia
ferdinando.arzarello@unito.it

Resumen

El artículo describe la *covariación* como un aspecto importante y teóricamente ubicuo del pensamiento matemático, pero no tanto en términos de enseñanza. Se enfoca en la forma multimodal en la cual los procesos de aprendizaje relativo ocurren y se desarrollan en la clase de matemáticas y como recursos semióticos son cruciales para este desarrollo. El artículo se centra en la génesis dinámica de una variedad de signos, cuando se utilizan artefactos para instruir los procesos de aprendizaje. Más precisamente, en la segunda parte se introduce la noción de *covariación instrumentada*. La instrumentación coordinada con múltiples artefactos puede ayudar al aprendizaje a través de una cuidadosa planificación didáctica. Esto se ilustra con ejemplos que muestran la sinergia positiva producida por su potencial semiótico utilizado en el aula en diferentes niveles de grado.

Palabras clave: covariación, instrumentación, haz semiótico, problema abierto, sinergia de artefactos.

Introducción

Una excelente profesora de matemáticas del Liceo Classico italiano (secundaria superior: grados 9-12), que participó en un experimento de enseñanza sobre el uso de las matemáticas para modelar fenómenos físicos me dijo un día: "Esta mañana hicimos una actividad sobre la ley de Hook [...] En mi opinión, hubo un malentendido muy importante entre el sentido del estiramiento y el de la longitud [allungamento - lunghezza en italiano] del resorte. Esto les impidió encontrar las respuestas correctas. ¡Y mis alumnos están en Liceo Classico! ". Los malentendidos similares son comunes y difusos y se refieren a un gran fenómeno, que tiene profundas raíces cognitivas y epistemológicas, y destaca un importante problema didáctico. Su conciencia tiene consecuencias relevantes para el diseño de la enseñanza.

El propósito de esta contribución es enmarcar teóricamente estos problemas y discutir estrategias de enseñanza apropiadas para superarlos. Compartiré algunas ideas sobre un campo de investigación con fundamento semiótico y epistemológico, que yo y otros hemos desarrollado en los últimos años.

Estos problemas me llevan a centrarme en una raíz común a los diferentes fenómenos semióticos descritos en la literatura, que pueden servir como base para la concepción de tareas matemáticas en la escuela: la noción de covariación, ampliamente estudiada (para un excelente resumen, vea Thompson y Carlson, 2017). Basándome en esta noción y utilizando un punto de vista semiótico, he desarrollado una herramienta de análisis más compleja, que tiene una contraparte didáctica, a la que llamo covariación instrumentada (CI).

En esta contribución, definiré la CI como una posible metodología didáctica que puede desencadenar y apoyar un enfoque covariante de las matemáticas.

Covariación en matemática.

Muchos estudios muestran la relevancia del razonamiento covariante en matemáticas desde un punto de vista epistemológico: de hecho, la covarianza es crucial para comprender la noción de función, una herramienta indispensable para modelar el mundo (físico, económico, etc.) y para ingresar a las matemáticas modernas: todo el Análisis depende de esta noción. Correctamente, muchos currículos matemáticos lo ponen como el principal objetivo de enseñanza.

> Enfatizamos que el razonamiento covariante continuo, o el razonamiento acerca de los valores de dos o más cantidades que varían simultáneamente, desempeñó un papel crucial en la invención de los matemáticos de los conceptos que llevaron a la definición moderna de la función, el uso de ecuaciones para representar una variación restringida a representaciones explícitas de relaciones deterministas entre cantidades. (Thompson & M.P. Carlson, 2017, pp. 423, traducido por el autor)

El razonamiento covariante apareció dramáticamente en las matemáticas con el nacimiento y el desarrollo del álgebra moderna gracias a los trabajos de Viète, Descartes y otros. Los métodos de análisis y síntesis en álgebra, tomados de la geometría de los Griegos, introducen una forma revolucionaria de abordar los problemas de las matemáticas, que Lagrange a principios del siglo XIX podría resumir de la siguiente manera:

> El álgebra, tomado en el sentido más amplio, es el arte de determinar las incógnitas por funciones de las cantidades conocidas, o lo que consideramos conocido. (Lagrange, 1806, pp. vii; traducido por el autor).

La ruptura del nuevo paradigma con la idea de un álgebra elemental como aritmética generalizada, de acuerdo con una imagen a menudo presente en los libros de texto (pero no solo), fue discutida en un artículo muy importante de Chevallard (1989), donde destaca el papel crucial que desempeñan las variables y los parámetros en el nuevo álgebra, tanto desde un punto de vista epistemológico como didáctico. Por ejemplo, la solución "aritmética" (verbal) de un problema básico como el siguiente *"Divida un número dado en dos partes, de manera que la primera exceda la segunda en un exceso dado",* se puede traducir a términos algebraicos solo si uno hace un razonamiento covariante, utilizando parámetros para representar (y manipular) los números (supuestos) dados.

De hecho, el nuevo método de razonamiento covariante con cantidades físicas fue una de las raíces que hizo posible el nacimiento de la ciencia moderna con los experimentos sensibles y las demostraciones matemáticas (le sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche) de G. Galilei. Este tipo de razonamiento se desarrolló como una búsqueda de relaciones entre variables concretas, dinámicas y continuas, para expresar la idea de cambio y los fenómenos del movimiento.

Esta es una historia muy antigua: los antiguos eruditos carecían de una descripción matemática del movimiento; vieron la distancia y el tiempo como cantidades medibles, pero no como velocidad. De hecho, la noción de cambio, según la filosofía de Aristóteles, era solo de naturaleza cualitativa y tenía un significado muy amplio (Generación y Corrupción, Alteración, Aumento y Disminución, Movimiento Local). Las ideas cambiaron desde la Edad Media y fue en el siglo XIV cuando las nuevas ideas revolucionarias maduraron en Oxford al Merton College, y en París con Nicole Oresme (1325-1380). Los filósofos de la Edad Media se dieron cuenta de que las cualidades también tienen una intensidad (Arzarello, 2008). Las leyes matemáticas de la nueva ciencia se pueden expresar porque comenzamos a razonar de manera covariante. El álgebra, sin embargo, ya no es suficiente y es necesario un nuevo cálculo. Desafortunadamente, esta forma fundamental de razonamiento se ha descuidado en las escuelas: como el álgebra se enseña como una aritmética generalizada, las funciones también se enseñan a menudo de acuerdo con la definición estática de Bourbaki, que congela su naturaleza dinámica en el lenguaje estático de la teoría de conjuntos.

Esta declaración sobre la conveniencia de apoyar el razonamiento covariable en la escuela también se menciona en el documento citado por P.W. Thompson y M.P. Carlson (2017), con muchas referencias:

> [Argumentamos] que la variante y el razonamiento covariante son fundamentales para el desarrollo matemático de los estudiantes. Basamos esta afirmación en investigaciones que resaltan las dificultades experimentadas por los estudiantes con respecto a las relaciones funcionales, porque carecen de la capacidad de razonar de forma alternativa o covariante, y en investigaciones que muestran cambios productivos en sus relaciones. Concepciones y usos de las funciones por parte de profesores y alumnos, cuando utilizan el razonamiento covariante. (*ibid.*, traducción del autor)

La misma pregunta fue analizada desde un punto de vista diferente en psicología por J. Piaget (1950) y en matemáticas por W. Lawvere (1991): el primero definiendo la noción de operador multiplicativo; el último al discutir la noción de productos, coproductos y adiciones dentro de la teoría de las categorías.

Saldanha y Thompson (1998) repiten el trabajo de Piaget:

> La idea de Saldanha y Thompson de un objeto multiplicativo se deriva de la noción de Piaget de 'y' [conjunción] como un operador multiplicativo, una operación que Piaget describió como una clasificación operativa subyacente y seriación en el pensamiento de los niños. (Thompson & Carlson, 2017, 433, traducción del autor)

Este trabajo ilustra la covariación desde dos puntos de vista competidores, epistemológicos y cognitivos.

Para el primero: en su libro introductorio sobre la teoría de categorías, Lawvere (1991) también introduce el fenómeno de la covariación con la noción de objeto multiplicativo basado en un ejemplo histórico, que muestra tanto su relación directa con la noción de Piaget (de hecho, él usa la misma terminología), y su relevancia para la revolución científica:

> Comencemos con Galileo, hace cuatro siglos, que cuestiona el problema del movimiento. Quería entender el movimiento preciso de una piedra lanzada o un chorro de agua de una fuente. Todos han observado los graciosos arcos parabólicos que producen; pero el movimiento de una roca significa más que su trayectoria. El movimiento implica, para cada momento, la posición de la roca en este momento; para grabarlo requiere una imagen animada en lugar de una exposición temporal. Decimos que el movimiento es un "mapa" (o función) del tiempo en el espacio. [...]

Estos dos mapas, sombra y nivel, parecen reducir cada problema de espacio a dos problemas más simples, uno para el plano y otro para la línea. Por ejemplo, si hay un ave en su espacio y solo conoce la sombra y la altitud del ave, puede reconstruir la posición del ave. Hay más, sin embargo. Supongamos que tiene una película que muestra la sombra del ave mientras vuela, y una película de su altitud […] A partir de estas dos películas, ¡podrás reconstruir todo el vuelo del ave! Por lo tanto, no solo se reduce una posición en el espacio a una posición en el plano y otra a la línea, sino que también se reduce el movimiento en el espacio al movimiento en el plano y otra en la línea. [...]

El descubrimiento de Galileo es que, de estos dos movimientos más simples, en el plano y en la línea, pudo encontrar completamente el complejo movimiento en el espacio.

(Lawvere, 1991, pp. 3-6, traducido por el autor).

Para el segundo: una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades cuando mentalmente une sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual que es simultáneamente uno y el otro. Saldanha y Thompson (1998) ilustran esto considerando la participación de los estudiantes en tareas basadas en actividades para rastrear y describir el comportamiento de las distancias entre un automóvil y dos aldeas a medida que el automóvil avanza por una carretera.

Presento aquí un ejemplo que ilustra este punto: es sustancialmente tomado de la obra citada de Saldanha y Thompson.

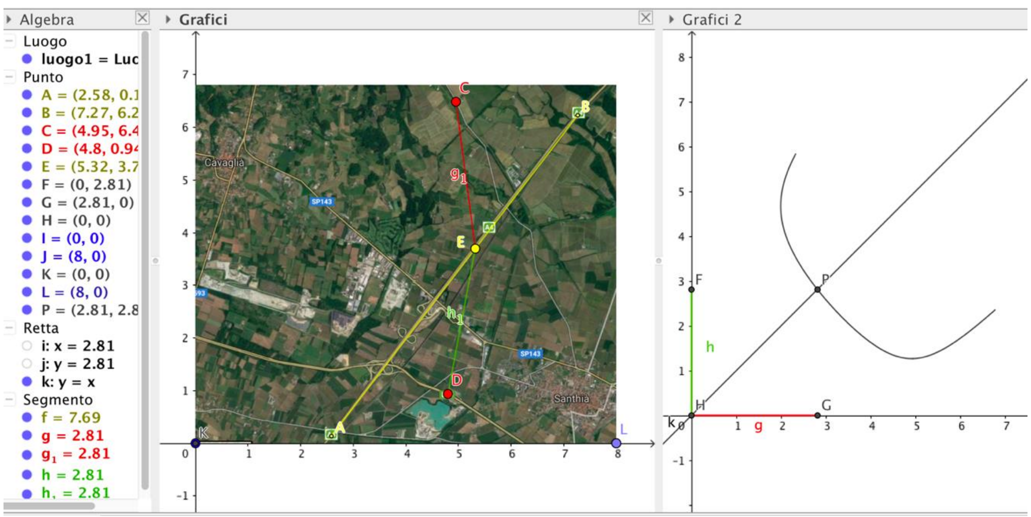

Figura 1.

La Figura 1 (construida con Geogebra) representa el movimiento de un automóvil (E) que recorre la autopista de A a B; en D y C hay dos repetidores para teléfonos móviles y es necesario identificar cuándo el teléfono móvil en el automóvil pasa de la celda C a la de D. En el gráfico cartesiano la abscisa representa la distancia EC, mientras que la ordenada representa la distancia ED. Se deduce que el punto P identifica la posición en la que las dos distancias son iguales y, por lo tanto, el punto en el que comienza la transición de una celda a la otra.

Detrás de este problema encontramos un importante fenómeno didáctico, la *covariación instrumentada*: puede ayudar a los profesores a diseñar situaciones didácticas apropiadas, cuyo propósito es introducir a los estudiantes al razonamiento covariante en entornos de geometría dinámica.

Un enfoque covariante es un fenómeno profundo que no está ni epistemológica ni didácticamente presente, por ejemplo, en la formulación didáctica habitual de la Geometría Euclidiana (GE). Por eso los hábitos escolares van en la dirección opuesta. Por lo tanto, un enfoque covariante:

- implica un cambio epistemológico con respecto a GE;
- tiene consecuencias cognitivas (razonamiento "hacia atrás");
- puede tener consecuencias didácticas en el aula.

Esto demuestra una discontinuidad epistemológica entre la formulación habitual de problemas tales como "demuestra que ..." y en el que, en cambio, se pide explorar una situación abierta (Arsac, Germain y Mante, 1991). Cognitivamente, la discontinuidad es particularmente marcada cuando el problema se aborda en entorno de geometría dinámica (EGD). El valor agregado en este caso viene dado por el enfoque covariante, que está ausente en el entorno de GE. Muchas diferencias cognitivas entre los dos entornos son solo la contrapartida cognitiva de esta discontinuidad.

La investigación / descubrimiento de la covarianza, a la que apuntan los problemas abiertos, es el pegamento que une los pasos de los argumentos. El trabajo con el software constituye una “instrumentación” de este proceso de búsqueda covariante. También puede tener lugar en el entorno de papel y lápiz, pero por lo general requiere más solucionadores expertos. El entorno de geometría dinámica es un artefacto que amplifica los fenómenos que dependen de la formulación del problema y permite su instrumentación. Una lente semiótica puede ayudarnos a describir adecuadamente estos fenómenos de covariación instrumentada producidos por la ingeniería didáctica apropiada con los artefactos.

Por supuesto, la palabra instrumentación deriva del enfoque instrumental de Verillon y Rabardel (1995), que enfatiza la distinción entre un artefacto (un objeto material o abstracto, ya producido por la actividad humana) y un instrumento (una entidad mixta con un componente de artefacto y un componente cognitivo, representado por patrones de uso).

Ahora presento los extractos de una discusión en el noven grado (primera clase de escuela secundaria), donde hay ejemplos de covariación instrumentada.

La covariación instrumentada en la escuela secundaria

Discutiré brevemente un ejemplo de un experimento didáctico realizado en 2017 en una escuela secundaria (estudiantes de grado 9) con la profesora S. Beltramino y la colaboración del profesor O. Swidan, de la Universidad Ben Gurion del Negev (Israel). Se verá, así como la covariación instrumental puede ser una consecuencia de un método basado en la investigación en un contexto tecnológico (Fibonacci 2012); más precisamente, cómo los estudiantes pueden comprender el complejo proceso de covariación de cantidades involucradas en un fenómeno físico (el movimiento de una bola a lo largo de un plano inclinado), gracias a sus investigaciones en un entorno donde hay dos artefactos tecnológicos presentes. El primer artefacto es un video profesional (producido por el museo Galilei en Florencia), que retoma el famoso experimento de Galilei (descrito en Galilei, 1638), en el que se introduce y subraya la covariación entre las cantidades en juego (Fig. 2a); el segundo es una simulación en Geogebra del mismo fenómeno, en el que los estudiantes pueden variar la inclinación del plano inclinado: los datos relativos al tiempo y al espacio se representan en el plano cartesiano y en la hoja de cálculo del software (Fig. 2b).

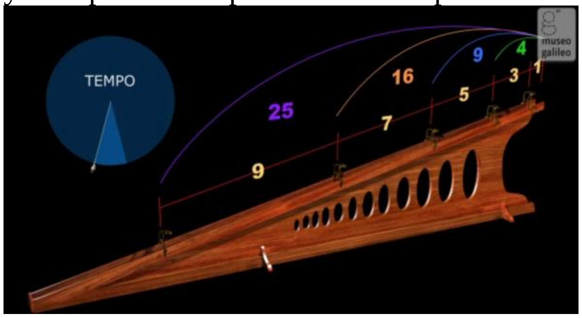

Figura 2a. Video (Museo Galilei, Florencia)

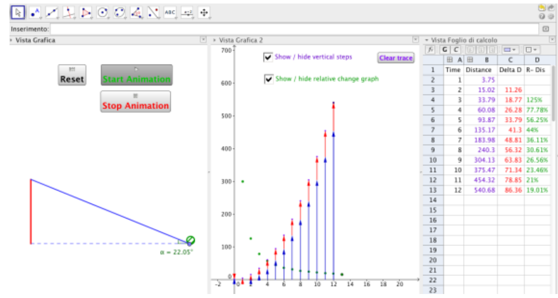

Figura 2b. Applet en Geogebra

En este proceso, tanto las intervenciones de la profesora como los signos producidos por los estudiantes o a las que los estudiantes están expuestos, juegan gradualmente un papel esencial.

Los dos artefactos son de una naturaleza diferente: el video reproduce un experimento real, el segundo lo simula. Por tanto, podemos hablar de un dúo de artefactos en el sentido de Maschietto y Soury-Lavergne (2013), incluso si se trata de una situación diferente, ya que aquí los dos artefactos reproducen o simulan un fenómeno adicional, mientras que en su caso un artefacto digital simula un artefacto físico. Sin embargo, también podemos considerar el posible **“**valor agregado” (*ibid.*, p.969) proporcionado por los dos artefactos - es decir, cómo la interacción con ambos ayuda los estudiantes a comprender el fenómeno físico examinado-, y cuánto se produce esta interacción de manera consonante o disonante entre los dos artefactos: hablaremos respectivamente de continuidad o discontinuidad entre los efectos de tal interacción.

Nos limitaremos aquí a esbozar los puntos cruciales en este proceso de aprendizaje, enfatizando las dificultades y el progreso del proceso de comprensión de las covariancias entre las cantidades involucradas en el experimento y el papel desempeñado por el maestro, por los dos artefactos y por los signos en él ([1]).

Dividimos este proceso en cuatro pasos, que corresponden a cuatro episodios en el transcurso de una discusión matemática de 40’ con la profesora, que tuvo lugar después de que los estudiantes, trabajando en grupos pequeños, habían visto el video, usado el applet de Geogebra, contestado algunas preguntas que les hicieron para describir las características sobresalientes del experimento. En la discusión los estudiantes todavía están divididos en grupos (A, B, C, D, E) de 4-5 personas; las respuestas son a menudo "grupo" y por esta razón generalmente solo indicamos el grupo (a veces indicamos con Xi un alumno / alumna del grupo X).

El magma inicial de las magnitudes en juego

22.37 I (profesora). ¿Qué podemos ver mientras vemos el video?
22:50 A: La velocidad aumenta a medida que baja
Al principio es más lento luego más tarde ...

[1] En otro experimento didáctico, construimos físicamente el plano inclinado con los estudiantes e hicimos el experimento de manera concreta con ellos, con las mismas modalidades que las del video, y luego utilizamos la simulación en Geogebra. Sin embargo, los resultados de aprendizaje parecen ser más bajos que los descritos en este artículo. Estamos tratando de entender estas diferencias, pero está más allá de esta exposición para discutir este importante problema.

23:30 B: el tiempo es siempre el mismo, la velocidad cambia
23:50 C: la distancia entre las puertas [en el video] siempre fue dos
Yo: ¿era?
C: aumentado
24:15 B: 1, 3, 5, 7 [son los números que en el video indican el espacio cubierto gradualmente]
24:23 I: ¿Entre una puerta y otra aumentó la distancia o el tiempo?
24:39 C: El mismo tiempo para correr más rápido
24: 52 I: ¿Y variando la inclinación del plan?
25:00 C: Cuanto más se inclina, más rápida será la velocidad.

Aquí se resaltan muchas variables por lo que dicen los estudiantes: velocidad, distancia entre puertas, tiempo, inclinación. La relación más obvia para ellos es el aumento, incluso si no está tan claro qué aumenta y qué no. Las variables siguen constituyendo un revoltijo indistinto, en el que comenzamos a captar de una manera no tan clara rastros de encubrimiento. El lenguaje es el de todos los días, aún no científico, según la distinción de Vygotski (1985). También existe una confusión entre el valor de una cantidad (la distancia) y el valor de su incremento (23:50). En un cierto punto (24:39), un primer boceto de covariación, atrapado entre el momento en que un aumento constante corresponde a un aumento creciente de la velocidad (pero el lenguaje aplasta estas variaciones en las variaciones en los valores de las mismas cantidades). La covariación es más evidente entre el cambio de inclinación y el aumento de velocidad (25:00). Como resultado de una petición de la profesora (24:52), el lenguaje cotidiano de C es capaz de apoyar el discurso sobre las diferencias entre las diferencias sin tener que aplastar esto en los valores de las cantidades. El artefacto video es lo que más influye en este episodio: las referencias son numerosas y obvias.

Desajuste entre trayectoria y movimiento

27:00 Vosotros están atrapados con la pregunta: "¿Puedes encontrar una ecuación, una fórmula que describa el movimiento de la pelota?"
27:27 A1: Necesitamos encontrar la x, y la y; para el eje x algo que aumenta y para el eje y algo que disminuye.
27:46 I: ¿Qué es la línea decreciente?
27:55 A1: la línea rosa [en el applet es el color de la trayectoria de la bola] ... debe haber algo
28:17 I repite las palabras de A1: Necesitamos encontrar una x que crezca y una y que disminuya porque la línea rosa representa el movimiento de la pelota.
[A los estudiantes les resulta difícil encontrar las cantidades para poner en los dos ejes]
28:42 I: ¿Cuál es el algo, las variables que nos ayudan a describir el movimiento?
Voces diversas: tiempo y espacio; alguien dice: la inclinación
29:04 I: Mantengamos la inclinación fija; Más adelante veremos qué pasa variándola.
29:38 I: ¿Qué elementos debemos considerar para poder describir el movimiento?
29: 47 I: A1 dice tiempo y espacio.
30:00 I: algo que aumenta y algo que disminuye.
30: 05 E1: creo que su idea está mal:
30:08 I: ¡según E1, su idea está mal!
30:10 E1: ¡sí, ambos aumentan!
30:15 I: ¡según E1, ambos aumentan!
30:20 B1: la línea rosa es el plano en el que corre la bola,
30:30 I: la línea rosa es el plano en el que corre la bola, pero ¿cómo podría describirse el movimiento?

Una confusión típica entre la trayectoria y el movimiento de un cuerpo es evidente aquí, bien conocida en la literatura (Clement, 1985). Aquí es importante la intervención de la profesora, quien "refuerza" la discusión para evitar por ahora la superposición de la variable de inclinación y de tiempo (29:04), concentrando así a los estudiantes en las relaciones espacio - tiempo insiste en buscar dos variables que crezcan / disminuir juntos, hasta que un alumno (E1) diga que las dos variables aumentan (30:10). El artefacto Geogebra es lo que más influye en este episodio: la referencia a la línea rosa se deriva de esto, así como la variación de la inclinación (ya presente, sin embargo, en el primer episodio).

Discontinuidad entre tres artefactos (Video-Geogebra-Tabla)
30:58 I: ¿Por qué ambos [tiempo y espacio] aumentan?
31.05 E1: cuando aumentas la longitud, la bola tarda más en hacerlo, entonces, si inclinas el piano, la bola es más rápida ...
31:11 I: no entendí
31:21 E1: según la inclinación del plano, aumenta el tiempo y ... toma menos tiempo ... la bola tarda menos en recorrer esa distancia ...
31:29 I: la pelota tarda menos tiempo en recorrer esa distancia.
31: 35 E1: la misma distancia, pero como el plano está más inclinado, la bola tiene más velocidad, es más rápida. [E1 con gestos imita el plano y el exceso de velocidad de la bola]
31:41 I: a la misma distancia ...
31: 45 E1: menor tiempo
31:48 yo: ¿y al mismo tiempo?
31:49 E1: mayor distancia.
...
32:27 C: la relación entre el espacio y el tiempo no aumentaba constantemente
32:42 I: ¿Qué aparece en el applet?
[La respuesta es que hay una tabla en la que el tiempo está en la primera columna, el espacio en la segunda, las primeras diferencias en el espacio en la tercera]
33:12 I: ¿Cómo leer la tabla?
33:20 más voces: basado en un cierto tiempo, la bola corre a través de un espacio determinado.
33:45 C: el espacio aumenta cada vez más; el tiempo es constante: 1, 2, 3
33:51 I: el espacio siempre aumenta como sucedió en el video: las puertas estaban más distantes porque el tiempo era el mismo y el espacio aumentó.
34:02 I: ¿Cómo escribo una relación entre este espacio y este tiempo?
[con preguntas oportunas, I indica a los alumnos a descartar que es una línea recta; el grupo E trabaja con Geogebra y encuentra que una parábola sale usando el comando cónico por 5 puntos, pero no pueden explicarlo]
37:00 B: si es una parábola, ¿hay algo en la segunda?
37:05 I repite las palabras de B.
37:10 A: en el video de arriba está escrito s: t ^ 2
37:15 I escribe la fórmula del video en el tablero.
37:34 I: ¿entonces?
... [rumor]
38:10 B1: en el video había las sumas de todas las rutas y, por ejemplo, cuando s tenía 16, el tiempo era 4
38:15 I dibuja un boceto de plano inclinado en la pizarra.
38:26 B1: si contamos el tiempo, vemos que s es t ^ 2: 4 ^ 2 = 16
39:13 B1: en el video hacia el final había sumas de todas las diferentes piezas ... las dos primeras ... las tres primeras ... y las diferentes piezas se dividieron según el tiempo que tomaron ... por ejemplo, las dos primeras piezas tomaron dos como tiempo y valieron 4 juntas ... así que si uno mira esa división e indica el espacio como **y** y el tiempo como **x** ... el tiempo en ese caso valió 2 y el espacio 4 ... Entonces, como dice allí, el tiempo para el segundo hace espacio porque 2 para el segundo es igual a 4 ... entonces y = x ^ 2
40:11 E1: es correcto, pero aquí es diferente si hacemos 2 ^ 2 no nos llega a nosotros ...
[el maestro repite lo que dijo B1 y acompaña las palabras que los ilustran en el dibujo del plano inclinado y finalmente escribe y = x ^ 2]

41:15 I: Pero E1 dice "está bien" aunque ...
E1: pero no viene.
41:19 I. Es correcto, sin embargo, no es tan correcto según E1, porque en los ejemplos no vino de esta manera.

En esta parte, además de los dos artefactos, Video y Geogebra, aparece un tercer artefacto, la tabla escrita en la pizarra por la profesora, bajo el dictado de un grupo de estudiantes. La discusión, apoyada por las intervenciones oportunas de la profesora, hace que los procesos de los estudiantes evolucionen hacia una primera formulación de la ley del movimiento, es decir, s = t ^ 2. Se alcanza a través de tres episodios, al final de los cuales, en un cuarto episodio breve pero importante, la ley es impugnada por un estudiante. En los cuatro episodios, los tres artefactos (indicados con V = video, G = Geogebra, T = tabla) están presentes en distintos momentos y se utilizan, a veces espontáneamente por los alumnos, a petición del profesor, para llevar a cabo investigaciones y verificaciones de tesis. Para explicar racionalmente el movimiento de la pelota (llamaremos a estos comportamientos de los estudiantes acciones epistémicas y semióticas[2]). Por lo tanto, un hilo de relaciones entre V, G, T, que va de una a otra y que generalmente son de discontinuidad, se crea a través de la discusión y las acciones epistémicas ([3]).

Es decir, el valor epistémico de las acciones que los estudiantes realizan con tales artefactos a menudo es inconsistente. Esta discontinuidad culmina en el cuarto episodio, en el que E1 (40:11) hace explícito un conflicto entre lo que se dijo anteriormente y los resultados obtenidos en G por su grupo (E).

En lo que sigue usaremos dos tipos de notación, que indican dos formas opuestas en las que un artefacto X ingresa en los procesos de los estudiantes. Por un lado, se puede realizar una acción epistémica para investigar / descubrir qué sucede en una situación dada utilizando el artefacto, sin tener en cuenta ninguna hipótesis al respecto; vamos a escribir: X→. Por otro lado, el artefacto se puede usar con un objetivo específico, por ejemplo, para probar una hipótesis; vamos a escribir: →X. De manera análoga, indicaremos con I→ las intervenciones específicas de

---

[2] Los signos siempre están involucrados en las acciones epistémicas que veremos, en un sentido amplio de la palabra signo. Por eso prefiero hablar de acciones epistémicas y semióticas. Para una discusión sobre las relaciones entre los dos aspectos, vea los capítulos 9 y 11 de Bikner y Prediger (2014).

[3] *Acción epistémica*. El término fue introducido en las ciencias cognitivas por Kirsch & Maglio (1994) para designar "acciones que los humanos (u otros agentes) toman para alterar su entorno físico con la intención de recopilar información y facilitar la cognición". Las acciones epistémicas pueden descubrir información que está oculta, o reducir la memoria requerida en la computación mental, o reducir el número de pasos involucrados en el cálculo mental, o reducir la probabilidad de error en el cálculo mental. Para la enseñanza de las matemáticas, el término fue utilizado por Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, T. (2001), quienes a su vez lo derivaron de Pontecorvo & Girardet (1993), quienes las definieron como "acciones mentales por las cuales uno usa o construye conocimiento ". Dreyfus & Kydron (2014), usar la noción de acción epistémica para definir los micro procesos de abstracción como Acciones en Contexto (AiC): esto constructo teórico central de AiC es un modelo teórico-metodológico, según el cual se describe y analiza el surgimiento de un nuevo constructo "por medio de tres acciones epistémicas observables: reconocer (R), construir con (B) y construir (C). Reconocer se refiere a que el alumno vea la relevancia de un conocimiento específico anterior para el problema en cuestión. Construir-con comprende la combinación de constructos reconocidos, para lograr un objetivo localizado, como la actualización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema. El modelo sugiere construir como la acción epistémica central de la abstracción matemática" (Dreyfus & Kydron, p.89 ss).
Aquí usaremos este marco sin entrar en detalles por razones de espacio.

la profesora, mientras que lo indicaremos con I⇓ cuando la profesora repite (resuena) una oración pronunciada por un alumno para subrayar la importancia o la corrección, posiblemente incluso recurriendo a gestos.

El primer episodio va de 32:27 a 33:51. E1 (de 31:05 a 31:30) en una modalidad predominantemente G→, y posteriormente (31: 41-31: 49) producido después de la intervención de la profesora (I→). Aquí hay una primera forma de covariación (32:27), formulada exclusivamente con lenguaje natural, posiblemente junto con la producción de gestos icónicos o metafóricos ([4]).

En *el segundo episodio* (32: 27-33: 51), C primero describe la covariación (32:27) de manera diferente que antes, nuevamente en lenguaje natural. I (32:42) empuja a los estudiantes (I→) a usar G y subraya la tabla numérica contenida en ellos, invitándolos a leerla, es decir, a experimentar una modalidad T→.

Las intervenciones de los estudiantes (33: 20-33: 45) explican lo que se informa en T con referencia al video visto (V→), una referencia que se hace explícita en (33:51).

El tercer episodio (34: 02-33: 45) es decisivo. I pides a los alumnos (34:02: I→) que escriban una fórmula que exprese la relación entre *t* y *s* en el movimiento de la pelota. Así evoca un cuarto artefacto: la fórmula (F) con sus varias representaciones (algebraica, cartesiana): →F. Una vez que se ha descartado la línea, para los estudiantes, dado su conocimiento, la parábola comparece, evocada primero por ellos como "algo al cuadrado" (37:00). La evocación se ve nuevamente reforzada por la referencia a V (37:10: V→) y la acción de I (37:15: I→). Aún con referencia al video, B1 es capaz de evocar la fórmula (38:26: V→) y explicarla (39:13: V→).

En *el cuarto episodio*, E1 socava la fórmula de B1 basándose en su investigación en G (G→).

Aquí surge un conflicto entre lo que se vio en V y las experiencias realizadas en G: lo indicaremos con V←→G. Está subrayado por I (I→) y se pasará en episodios posteriores.

Tabla 1

Datos escritos en la pizarra

t (sec)	1	2	3	4
s (cm)	2.13	6.51	19.15	36.64

Continuidad entre cuatro artefactos: Video-Geogebra-Tabla-Formula

[El grupo D mira el video nuevamente en el punto citado. Hay zumbido en el aula. El grupo B finalmente interviene]

43:00 B: Hemos hecho con Geogebra y el ángulo de 25 ° y estos resultados vienen [I escribe en la pizarra: Tabla 1]

43:53 B: hicimos 19.15 / 3 ^ 2 y es 2.13

44:04 B: tratamos de hacerlo con otros y siempre hay el mismo resultado [2.13]

[4] En la clasificación de Mc Neill (1992) los gestos se definen como *icónicos*, si tienen una relación de similitud con el contenido semántico del discurso que lo acompaña y *metafóricos* si son similar a los gestos icónicos, pero el contenido semántico es una idea abstracta.

44:12 I repite las palabras de B y escribe los cálculos en la pizarra.
44:47 I: ¿y qué?
44:50 B: siempre tienes un valor constante ... No creo que sea algo aleatorio.
…
45:25 I: ¿por qué dijiste "entonces esa es la fórmula escrita allí"?
[la fórmula, en el video, es s: t ^ 2; hasta ahora el signo: tal vez ha sido posiblemente interpretado como un signo de puntuación. Ahora I escribe en la pizarra el signo / en lugar de: subrayando lo que sugiere B]
...
45:55 I: entonces, ¿qué podemos concluir?
46:04 B: que la relación entre el espacio recorrido y el tiempo hasta el segundo da una constante.
[I resume lo que se ha hecho hasta ahora; señala que en lugar de escribir **y** y **x** escribimos s para el espacio y t para el tiempo]
47:14 E2: en este caso podría ser y = 2.13 * x ^ 2, en este caso con 25 °, porque es en este caso que viene un valor constante de 2.13 ... El valor puede variar.
...
47: 45 I: ¿si el ángulo varía?
47:48 E2: el valor constante puede variar
[I sugiere probar con diferentes valores de inclinación y los estudiantes intentan usar Geogebra]
…
48:20 B: [ininteligible] el número constante también depende del ángulo
48:28 I: Repito porque habla en voz baja; dijo: si cambiamos el ángulo de 28 ° [con los dedos índice y medio simula una ampliación de un ángulo], la constante cambia y se convierte en 2.36, pero siempre es 2.36.
48:45 E2: Podría ser y = kx ^ 2, donde k es la constante que varía con la inclinación.
[I escribe la fórmula en la pizarra]
48:53 I: B1 dice que podría ser una cosa así, ¿donde k varía? ... [girando a E2]
49:00 E2: basado en inclinación
[I repite sus palabras]
49:12 E2: en consecuencia, el espacio varía.
[I repite sus palabras]
49:19 E2: cambiando todos los coeficientes
49:26 I: podría ser correcto
[invita a todos a consultar con Geogebra si la fórmula es correcta]
...
[en los últimos 10 minutos, los alumnos: comprueban la fórmula con varios ángulos y observan que k crece mientras el ángulo crece; observan que se puede encontrar k considerando el valor de s para t = 1, o dividiendo por 2 las segundas diferencias de s con la variación de t, segundas diferencias que asumen un valor constante igual a 2k; el grupo C considera las parábolas de la gráfica s = s (t) que se obtienen con dos valores de k vecinos: parecen superponerse, pero al usar el zoom se dan cuenta de que las curvas son distintas; lo describen diciendo que "la pelota siempre baja a la misma velocidad" y alguien señala que "tiene la misma tendencia"].

En esta parte tenemos la evolución positiva del conflicto V←→G, que concluyó la parte anterior. Su superación tiene tres aspectos:

(i) el entretejido sinérgico (en el sentido descrito para el tercer ejemplo) entre G y V, y de estos a su vez con T, cuya introducción ha sido solicitada por I varias veces;

(ii) una comprensión más profunda de la covariación *s-t* a través de la construcción de una nueva fórmula que surge de las acciones epistémicas y semióticas generadas por la sinergia V-G-T;

(iii) la generación (y comprensión) de una nueva covariación de segundo nivel más compleja, en la que también entra un parámetro, que depende de la inclinación del plano inclinado.

Esta parte tiene tres episodios.

En *el primer episodio* (43: 00-45: 25), un grupo describe el resultado de sus exploraciones de la tabla en G y explica cómo puede aparecer una constante en la fórmula, que en su lugar no se mostró en el video y que E1 había resaltado (43: 00-44: 04: G→). Evidentemente, este resultado es el resultado de una investigación dirigida con G (→G). En 44:50 el estudiante asume la no aleatoriedad del valor constante. En este punto (45:25) llega una nueva lectura de lo que apareció en V (→V), subrayada por la reescritura con un nuevo signo de la fórmula del video.

En *el segundo episodio* (45: 55-49: 26) llegamos a la covariación descrita en (iii). Varios estudiantes encuentran que la constante depende del valor del ángulo de inclinación del plano (46: 04-47: 48). La propiedad se experimenta en G con diferentes valores del ángulo (→G). La covariación de segundo nivel se explica en 48:28 y 48:45 con contribuciones de diferentes estudiantes. Se dan cuenta de que k es un parámetro ("la constante cambia [con el ángulo], pero siempre es 2.36"). Estas últimas intervenciones expresan la capacidad de los estudiantes para leer la fórmula $s = kt^2$ en un "nivel doble": al primero nivel la covariación s, t; al segundo nivel la covariación de (s,t) y k.

El tercer episodio contiene varios refinamientos del resultado anterior esencialmente debido a las re-lecturas de la fórmula F y a varias exploraciones en G, en las cuales tenemos ambos modalidades en ambos casos: G→, →G, F→, →F.

El progreso de las distintas modalidades en los episodios de continuidad y discontinuidad se resume en la Tabla 2.

Tabla 2

Continuidad y discontinuidad entre artefactos en los diversos episodios

Discontinuidad	G→	I→	T→	F→	V→	V ←→ G
	2	5	1	1	3	1
Continuidad	G→	→ G	→V	F→	→ F	
	2	3	1	1	1	

Discusión

Donde llegamos

En este artículo, presentamos una introducción didáctica a la covariación en matemáticas. Este objetivo planteó inmediatamente cuatro tipos de problemas:

a) la conveniencia de un cuidadoso análisis epistemológico y cognitivo del concepto de covariación;
b) la necesidad de desarrollar situaciones didácticas (en el sentido de Brousseau) que permitan a los estudiantes desarrollar problemas de covariación, definidos de acuerdo con el estado analizado en a);
c) la importancia de definir el papel de las tecnologías en estas situaciones;

d) la necesidad de contar con herramientas para observar los fenómenos didácticos que ocurren en clase con la propuesta de tales situaciones.

El artículo responde a estos cuatro puntos ilustrando las respuestas con un ejemplo, tanto por razones de espacio como para no sobrecargar el hilo del discurso.

Para a): la covariación es una idea que está presente en el pensamiento matemático moderno, el nacimiento del álgebra moderna y el pensamiento funcional relacionado con la revolución científica, un aspecto paralelo del cual es el análisis elemental del Cálculo, y específicamente del concepto de función. Como lo han demostrado varios estudios, este aspecto, con pocas excepciones, está apenas presente en los libros de texto de matemáticas, que dan una definición de función abstracta y estática, o en el mejor de los casos se refieren a la metáfora de entrada-salida de las máquinas. No es una coincidencia que este enfoque esté más presente en los textos que tratan sobre problemas físicos, biológicos, económicos, etc. en el que es necesario modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo. Así que preferimos considerar la covariación como una forma más amplia de pensamiento, razonamiento covariante, que considera los objetos matemáticos considerando y buscando sus relaciones mutuas.

Para b) A diferencia de otras obras, el razonamiento covariante no se considera aquí como limitado a la introducción de funciones. Como se señala en a), tiene un valor epistemológico y cognitivo mucho más amplio: su contraparte didáctica está constituida por la forma covariante que se esconde detrás de la formulación abierta de los problemas, que contrasta la forma estándar generalmente presente en los libros de texto ("muestra que" en lugar de "explora"). La referencia a los objetos multiplicativos de Piaget y Lawvere ilustró los significados cognitivos y epistemológicos de esta elección didáctica, que reestructura las situaciones didácticas para poner en juego el razonamiento covariante en general, incluido, por supuesto, un enfoque no estático de las funciones conjunto.

Para c): tratar con la covariación en un entorno de papel y lápiz es muy abstracto y puede ser difícil de entender: por ejemplo, las barreras cognitivas pueden atribuirse a lo que algunas personas llaman confusión entre vías y trayectorias en el caso de que se consideran cronogramas (pero esto también puede aparecer en otras situaciones). La tesis del artículo es que la covariación se puede abordar con cierto éxito desde los primeros años de la escuela utilizando herramientas tecnológicas. De este modo se ha introducido la covariación instrumentada. De hecho, es posible concebir situaciones educativas en las que el razonamiento covariante se produce mediante una mediación adecuada de herramientas tecnológicas en las que se explota su potencial semiótico para producir una forma de covariación instrumentada.

Para d). Los diversos ejemplos ilustran la complejidad de los fenómenos de enseñanza / aprendizaje relacionados con la covariación instrumentada. No solo las herramientas tecnológicas desempeñan un papel esencial en esto, sino todos los recursos semióticos utilizados: desde el discurso verbal hasta inscripciones (esbozos, fórmulas), gestos, etc. Hemos visto cómo es la competencia entrelazada, a veces conflictiva, a veces sinérgica, de todos estos recursos, la que estimula y apoya los procesos de aprendizaje de los estudiantes. También hemos visto que el papel del profesor es crucial para estimular, apoyar y guiar estos procesos. En otros trabajos, el autor ha introducido una herramienta de análisis semiótico adecuada para leer la estructura y dinámica de este complejo entrelazamiento de recursos semióticos presentes en el aula: el haz semiótico (“semiotic bundle” en inglés: Arzarello, 2006). Esto amplía la noción del sistema semiótico clásico para sistemas de signos como gestos e inscripciones, todos presentes en los procesos observados en el aula, como lo ilustra abundantemente la literatura. El haz semiótico es una estructura dinámica que integra todos estos recursos semióticos en un solo todo, considerando tanto las relaciones mutuas entre ellos como su evolución en el tiempo. En este sentido, es una generalización del estudio por parte del sistema de gestos y discursos de McNeill (1992) y otros, porque por un lado integra en el modelo no solo el habla y los gestos, sino también las inscripciones (de fórmulas a las gráficas) en las que se basa el pensamiento matemático. Por otro lado, presenta un modelo que evoluciona con el tiempo: debido a su estructura rica, el modelo de haz semiótico permite capturar la dinámica compleja del pensamiento matemático en variables observables cuando ocurren en una situación de interacción, y así hacerlas accesibles a la investigación científica. Naturalmente, para lograr esto, también es necesario filmar con varias cámaras lo que sucede en las interacciones en clase entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores, mientras se mantiene un registro de sus producciones escritas. En el análisis final de estos documentos, también utilizamos el modelo de microgénesis de un problema adaptado de las investigaciónes de Saada-Robert (1989). Desafortunadamente, el espacio permitido no nos permite ilustrar este aspecto aquí.

A donde nos gustaría llegar

Hay diferentes problemas que deja abierta esta investigación. Por un lado, necesitamos una mayor colección de datos sobre el trabajo en el aula, que se centre en la introducción del razonamiento covariante para proporcionar más información sobre la dinámica de su aprendizaje, especialmente sobre las dificultades de los estudiantes, y posiblemente en ingeniería didáctica apropiada para superarlos. Por otro lado, es importante desarrollar una profundización cognitiva y epistemológica de la noción de covariación: por ejemplo, las ideas de Piaget y Lawvere sobre los objetos multiplicativos deben estudiarse en relación con los procesos de resolución específicos de problemas abiertos y los fenómenos de la microgénesis de la representación de un problema, discutidos por Saada—Robert (1989).

Reconocimiento. Agradezco al Dr. Eduardo Basurto, quien ha revisado pacientemente el texto en español de mi artículo.

Referencias y bibliografía

Arsac, G. & Mante, M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Arsac, G., German, G., & Mante, M. (1991). Problème ouvert et situation-problème, IREM de Lyon.

Arzarello F., (2006). Semiosis as a multimodal process. Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. Especial, 267-299.

Arzarello F., (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. 10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture (Editor: M. Niss). IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2014). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Heidelberg: Springer.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. The Netherlands. (http://people.umass.edu/~clement/pdf/Misconceptions%20in%20Graphing.pdf)

Dreyfus, T. y Kydron. I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Editors). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.

Heidelberg: Springer. Cap. 6, pp. 85-96.

Fibonacci (2012) Inquiry in Mathematics Education, (http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/ resources-for-implementing-inquiry.html).

Galilei, G. (1615), Lettera a Madama Cristina di Lorena Granduchessa di Toscana. In: Opere, Edizione Nazionale a cura di Antonio Favaro, Giunti-Barbera, Firenze 1968, vol. V, pp. 309-348. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Galilei, G. (1638), Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Leyden: Ludovico Elzeviro. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education. 32, 195-222.

Kirsh, D., Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. Cognitive Science 18, 513-549.

Lawvere, F.W. & Shanuel, S.H. (1991). Conceptual Mathematics, Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Tome I: La pensée mathématique. Presses universitaires de France.

Plano inclinado. Vídeo del Museo Galilei (Florencia) https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html

Pontecorvo and Girardet (1993): Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction*, 11, 365-395.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. Psychologie française, 34(2-3), 193-206.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S.B. & Coulombe, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* - North America Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

Vygotsky L.S. (1985). *Thought and Language*. Second revised and expanded edition, edited and translated by E. Hanfmann, G. Vakar, and A. Kozulin. Cambridge, MA: MIT Press.