



## Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por licenciandos sobre números racionais

Eleni **Bisognin**  
Universidade Franciscana  
Brasil  
eleni@ufn.edu.br

Patricia **Pujol** Goulart Carpes  
Universidade Franciscana  
Brasil  
patriciacarpes@unipampa.edu.br

### Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados parciais de uma pesquisa que visa identificar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por licenciandos de Matemática. Foram propostas questões aos participantes de uma oficina a fim de mobilizar conhecimentos do professor para ensinar números racionais. Os dados foram obtidos por meio dos registros escritos das soluções das atividades e foram analisados considerando-se a dimensão didática com ênfase na faceta epistêmica do modelo de Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) definido por Godino, pela qual é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor. Os resultados apontam que os licenciandos, em sua grande maioria, apresentam concepções errôneas e/ou não reconhecem as diferentes representações do número racional. Embora os alunos tenham apresentado dificuldades na resolução das atividades propostas durante a oficina, eles tiveram a oportunidade de (re)conhecer e refletir sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar esse tópico.

*Palavras chave:* Números racionais, dimensão epistêmica, formação inicial de professores.

### Introdução

O presente trabalho tem como propósito apresentar resultados parciais de uma investigação que visa identificar e analisar os conhecimentos didático-matemáticos sobre

números racionais mobilizados por licenciandos em Matemática, durante uma formação realizada, tendo por base a perspectiva dos Conhecimentos Didático-Matemáticos, (CDM), desenvolvido por (Godino e colaboradores, 2009).

Em se tratando de um conteúdo específico, o conjunto dos números racionais, consideram-se pertinentes os conhecimentos do professor voltados diretamente ao tema. Segundo (Romanatto, 1997), a compreensão efetiva desse conjunto numérico deve perpassar por uma teia de relações nele incidentes ou emergentes. Desse modo, os números racionais devem ser compreendidos pelos seus diferentes significados, assim como, pelas suas possíveis representações – fração, decimal, porcentagem, pictórica, tendo em vista sempre a limitação de notação que cada representação de número racional pode apresentar

Pelas várias contextualizações que os números racionais permeiam, seus significados são distintos. (Kieren, 1980) aponta que a compreensão completa dos números racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam. Os construtos (ou significados) dos números racionais apontados pelo autor são parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

A formação proposta aos licenciandos em Matemática na forma de uma oficina, intentou vislumbrar possibilidades de contextualizações dos números racionais para que os mesmos pudessem ter uma compreensão melhor deste conjunto, bem como estimular os conhecimentos pertinentes ao professor ao ensinar os números racionais, tais como: possíveis questionamentos aos alunos de suas concepções errôneas, emprego de diferentes tipos de registros - o que pode facilitar a compreensão, pois um registro pode ser mais familiar ao aluno do que outro e conhecimentos matemáticos específicos – o todo dividido em partes iguais, a soma de todas as partes recompõe o todo ou calcular partes de um todo (operar sobre uma quantidade).

As pesquisas voltadas para a formação inicial de professores têm crescido nos últimos anos e tem apontado para os diferentes e complexos conhecimentos que o professor dever ter para ensinar de forma idônea um tópico específico e, assim, facilitar a aprendizagem de seus alunos. Neste sentido, nesse trabalho, toma-se o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos do professor, apresentado por (Godino, 2009), para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em Matemática sobre os números racionais, pois esse modelo considera distintas dimensões no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo específico de Matemática.

### **Referencial teórico**

O ensino de um conteúdo específico de Matemática requer do professor uma apropriação de uma teia de conhecimentos, por muitas vezes complexa, que envolvem conhecimentos didáticos e matemáticos. Entretanto, quais seriam os conhecimentos necessários para um processo de ensino idôneo? Diante desta complexidade, (Pino-Fan e Godino, 2015), elaboraram um sistema de categorias para analisar os conhecimentos do professor de matemática, denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM). As categorias elaboradas estão relacionadas com os tipos de ferramentas teóricas de análise do enfoque ontossemiótico do conhecimento e instrução matemática – EOS (Godino, 2017; Godino, Batanero & Font, 2007).

O modelo interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões: dimensão matemática, dimensão didática e a dimensão meta didático-matemática. A dimensão matemática refere-se a solidificação dos conhecimentos de tópicos específicos de matemática pelos professores. É subdividida em conhecimento comum, aquele que é suficiente para responder uma questão mais elementar, e no conhecimento ampliado, aquele que vincula um

objeto de estudo com um nível mais avançado.

A dimensão didática é composta por seis facetas, sendo: a epistêmica (conhecimento especializado de matemática), a cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), a afetiva (conhecimento de aspectos emocionais, atitudes, crenças dos alunos), a interacional (conhecimento sobre as interações na sala de aula), a mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem do aluno) e a ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares e sociais que influenciam a gestão da aprendizagem dos alunos).

A faceta epistêmica articula diferentes conhecimentos da matemática escolar com maior profundidade e amplitude, além disso, via esta faceta o professor deve ser capaz de mobilizar diversas representações de um objeto matemático, resolver a tarefa mediante distintos procedimentos, vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos de nível educativo que se ensina ou de níveis anteriores ou posteriores, compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto, proporcionar diversas justificativas e argumentos, e identificar os conhecimentos postos em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática (Pino-Fan; Godino, 2015, p. 13).

A faceta meta didático-matemática é composta pelos conhecimentos sobre os critérios da idoneidade didática (avalia um processo de ensino e aprendizagem) e os conhecimentos sobre as normas e metanormas (a promoção da reflexão, da avaliação e da detecção das melhores potencialidades da prática).

Em se tratando de uma formação inicial de professores, (Godino et al, 2013), elaboraram um guia onde explicitam os componentes e indicadores da idoneidade de um programa de formação de professores. Desse modo, se o professor adquire competência em aplicar este instrumento pode ter facilitada sua tarefa de planejar, implementar e avaliar processos instrucionais idôneos. Os componentes de guia são as seis facetas (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica).

O guia apresenta indicadores para cada faceta implicada no processo de formação, a fim de precisar a faceta epistêmica, na qual será base para análise dos dados dessa pesquisa, toma-se os seus indicadores para detalhar. A faceta epistêmica é composta pelo conteúdo matemático, ecológico, afetivo, interacional, mediacional e cognitivo.

Os indicadores do conteúdo matemático num processo de formação consideram as situações-problema para a construção do conhecimento matemático, assim como, o selecionar e adaptar problemas que gere significado ao objeto de estudo (considerando as representações, argumentações e procedimentos). O conteúdo ecológico deve prever conhecimento das orientações curriculares, postura crítica e investigativa perante as inovações didáticas. (Godino et al, 2013)

O conteúdo cognitivo deve prever as etapas, as dificuldades recorrentes, obstáculos epistemológicos e conhecimentos prévios dos alunos para aquele nível de ensino do tópico específico de estudo. O conteúdo afetivo deve prever a competência em buscar situações pertinentes ao campo de interesse dos alunos e que sejam úteis na vida cotidiana dos mesmos. O conteúdo interacional deve prever a importância do diálogo e comunicação para a aprendizagem. O conteúdo mediacional deve prever reconhecer a importância dos recursos didáticos na aprendizagem de Matemática, assim como, as limitações e gestão do tempo. (Godino et al, 2013).

Nesse trabalho será utilizado o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em

Matemática sobre os números racionais.

### **Metodologia**

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, isto é, ao pesquisador qualitativo os dados numéricos são interpretados de forma crítica, não os toma apenas pelo seu valor facial (Bogdan; Bilklen, 1994). Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, via uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão. Nesta ótica, o pesquisador é passível de apontar limitações e potencialidades na sua análise, assim como não possui um roteiro pré-determinado, rígido, a ser seguido.

Para tal análise foi desenvolvido um encontro de formação durante a Semana Acadêmica do curso de Matemática – Licenciatura de uma Instituição de Ensino Superior (IES) pública do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A proposta constitui-se de uma oficina, de quatro horas, que visava mobilizar os conhecimentos didático-matemáticos sobre os números racionais dos participantes, futuros professores de Matemática.

Nesta oficina participaram 26 licenciandos e foi organizada em dois momentos. O primeiro tratando de como os participantes entendem/definem um número racional e como empregam esse conhecimento em uma situação-problema. Cada participante elaborou a sua resposta e, após, foi socializado com o grande grupo.

No segundo momento, os licenciandos se organizaram em trios e receberam duas situações-problema. Como havia 8 trios e 1 dupla, a cada 3 grupos receberiam os mesmos problemas. O passo seguinte foi unir os grupos com os mesmos problemas para que esses novos grupos elaborassem uma solução, ou seja, que fossem rediscutidos os procedimentos e estratégias de solução. E, por fim, foi compartilhado entre todos, as soluções e encaminhamentos elaborados e concomitantemente os formadores foram indicando e discutindo as possibilidades e definição do significado que o número racional assumiu nas situações-problema.

A seguir são apresentados os resultados dessa oficina. Os dados foram levantados por meio dos registros das atividades supracitadas dos licenciandos.

### **Resultados e discussões**

A formação de professores de Matemática, em específico, tem avançado nas últimas décadas e apontando os conhecimentos que os professores devem possuir para um processo de ensino. Por meio do modelo CDM, toma-se, neste estudo, para análise dos dados a faceta epistêmica, pois engloba os conhecimentos comum, ampliado e especializado do professor em um tópico específico de matemática.

Via a faceta epistêmica é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor: o nível de aplicação e o nível de identificação. O primeiro no qual o licenciando deve fazer uso de diversas representações, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos, empregar diversos significados parciais do objeto matemático para resolver atividades, neste caso com os números racionais. O segundo nível se refere a competência dos professores/licenciandos para identificar conhecimentos (linguísticos, conceitos, propriedades, procedimentos, argumentos) que emergem da resolução de uma atividade, neste caso de números racionais (Pino-Fan, Font; Godino, 2014).

Deste modo, para a análise dos dois níveis de conhecimentos supracitados, toma-se o primeiro momento da oficina no intuito de melhor descrever, discutir e compreender os dados, isto é, a mobilização (ou não) dos conhecimentos didáticos-matemáticos envolvendo os números

racionais.

A primeira atividade tem o caráter de identificar/compreender o entendimento de número racional pelo licenciando, isto é, toma-se o primeiro nível de aplicação do conhecimento necessário ao professor de matemática do tópico específico, número racional. Ressalta-se que todas as atividades da oficina foram planejadas para o nível de Ensino Fundamental. Logo, toma-se o conhecimento do professor para esse nível de ensino.

As representações e conceitos apresentados pelos licenciandos, nesta oficina, muitas vezes se demonstraram inconsistentes, pois apenas uma parte, 27% dos participantes, apresentaram conceitos/argumentos coerentes para definirem o conjunto numérico dos números racionais. As falas dos alunos comprovam esse dado.

São números que seguem um padrão entendido pela razão. São formados em uma representação fracionária de  $\frac{a}{b}$  sendo  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ . (Aluno A).

São os decimais exatos e as dízimas periódicas. São os números na forma fracionária  $\frac{a}{b}$ , onde  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ . (Aluno B).

Todas as representações adotadas para identificar um número racional foram na forma de fração. Um aluno apenas citou os números decimais como representação do número racional (Aluno B). Não foi sugerida a representação de porcentagem do número racional ou considerando, ainda, no campo de definição/argumentação não foi explorado a ideia de classes de equivalência.

O restante dos participantes, que estão em semestres distintos (início ou fim da graduação) não identificam/compreendem os números racionais ou, ainda, apresentam algumas concepções errôneas sobre os mesmos. Eles os identificam como números fracionários, mas não como dízimas periódicas; identificam que pode ser um número decimal, com número de casas finito, mas não pode ser inteiro ou, ainda, que está contido no conjunto dos números irracionais.

Números que são usados para representar resultados “quebrados”, partes de algo. Usados em ocasiões onde se usa no lugar de  $n^\circ$  inteiros. (Aluno C)

Podemos reconhecer por números racionais aqueles que podem ser expressos pela forma de fração de modo que estejam divididos entre numerador e denominador. (Aluno D).

O Aluno D apresentou um conceito importante sobre os números racionais, de divisão (numerador e denominador). Entretanto, não mencionou quais números podem assumir o dividendo e divisor.

A segunda atividade visava mobilizar o segundo nível de conhecimento, de identificação. O quadro 1 ilustra uma situação-problema e possíveis encaminhamentos do professor.

## Quadro 1

## Atividade proposta aos licenciandos

Ana deu um meio de suas balas para sua irmã e Jorge deu também a sua irmã um quarto de suas balas. Quem deu mais balas?

A *aluna 1* apresentou como resposta a essa situação que Jorge deu mais balas, pois deu o dobro de balas que Ana.

A *aluna 2* apresentou como resposta que Ana tinha dado mais balas, pois deu a metade de suas balas e Jorge deu menos da metade de suas balas.

a) No seu entendimento, qual erro a Aluna 1 cometeu? Escreva como tu explicarias à aluna o erro cometido e quais encaminhamentos daria para a solução correta.

b) A resposta da Aluna 2 poderia estar correta, porém sua justificativa não é suficiente para garantir que a resposta esteja correta. O que tu questionarias à aluna para garantir que sua resposta esteja correta?

c) Quando tu ensinas os números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes dos alunos?

*Fonte:* da pesquisa.

Todos os participantes identificaram o erro da Aluna 1, consideraram apenas os denominadores das frações para realizar a comparação da quantidade de balas dada. Os encaminhamentos propostos pelos licenciandos vão desde considerar que a fração  $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$  seja pela divisão ou pela representação pictórica (retângulo dividido em partes iguais). Assim como, em questionar qual o todo (a quantidade de balas de cada pessoa) para daí, sim, saber quem deu mais balas. Sete alunos não apresentaram encaminhamentos para que a Aluna 1 pudesse compreender corretamente a situação.

Para explicar a ela a forma de encontrar a solução correta, diria para imaginar uma laranja, cortá-la em tantas vezes quanto é o denominador, pegar um só pedaço e ver qual é o maior. (Aluno E).

Pegaria um pacote de balas e dividiria em 2 partes, de modo que o aluno perceba a quantidade dessa divisão. Em seguida usando o mesmo pacote dividiria em 4 partes iguais, e de mesmo modo perceber a quantidade de balas. (Aluno F).

Explicaria a aluna que nesse caso  $\frac{1}{2}$  é maior que  $\frac{1}{4}$ , pois ao fazer a divisão entre numerador e denominador desses números certifica-se disso. (Aluno F).

Nos encaminhamentos para a resposta da Aluna 2, cerca de 46% dos licenciandos, apresentaram entendimentos pertinentes para elucidar a situação, isto é, apenas citaram que a Aluna 2 deveria perceber que não está definido a quantidade de balas. Apenas dois licenciandos apresentaram o questionamento ao aluno. A seguir, apresenta-se as duas questões propostas.

Não é suficiente, pois não há a informação do total de balas que Ana tinha e nem do total de balas que Jorge tinha. Questionaria: “ E se o n° de

balas de Ana for diferente do nº de balas de Jorge? (Aluno G).

E se Jorge tivesse mais balas que Ana? Mas para a resposta estar correta: se eles realmente tivessem o mesmo número de balas, demonstre com desenho e frações a quantidade de balas dadas. (Aluno H).

Os outros 64% dos participantes apresentaram respostas inconsistentes ou errôneas, tais como: “a quantidade de balas de Ana teria que ser maior que as de Jorge”, “que a aluna demonstrasse como ela chegou a este resultado”, “eu pediria para ela fazer uma representação” e “pediria para a aluna responder os valores das divisões de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  para que assim visse que 0,5 é maior que 0,25”. Nota-se que no último caso o licenciando não considera qual é o todo de balas.

Para o item c) da atividade, dificuldades de ensino e aprendizagem envolvendo os números racionais, cinco participantes não apresentaram resposta. Quatro participantes não citaram o âmbito da dificuldade, mas consideram como dificuldades reconhecer e resolver frações, as operações, a comparação de frações com denominadores distintos. Dez participantes se referem às suas próprias dificuldades de aprendizagem, sendo elas: nomenclatura, soma e subtração de frações, ordenação dos números racionais e conversão de fração para decimal. Seis participantes citaram dificuldades de ensino, sendo operações com frações, comparar e reconhecer uma fração como divisão. Percebe-se que o licenciando fala em dificuldade em aprendizagem (a sua própria) ou em ensino – dificuldade dos alunos (para quem já teve essa experiência em estágios por exemplo). Não mencionam ambos: ensino e aprendizagem. E quando falam em ensino, apontam as dificuldades dos alunos e, não as suas no ato de ensinar (pode ser pelo fato que não haja dificuldade ou por não refletirem sobre suas práticas de ensino).

### **Considerações finais**

O presente trabalho teve como propósito apresentar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática participantes de uma oficina sobre números racionais. Por meio das atividades propostas durante a oficina, sua resolução e discussão percebe-se que os licenciandos têm a perspectiva da consolidação dos conhecimentos matemáticos para atuação na docência. Entretanto, na perspectiva didática há um sombreamento. Dúvidas no que exatamente esses conhecimentos se referem ou como são “adquiridos”.

A discussão de quais são os conhecimentos que o professor deve ter para ensinar um tópico específico de matemática, para uma prática idônea, não é adquirido apenas numa oficina. Há distintos e/ou complementares estudos sobre quais e como esses conhecimentos se mobilizam na formação inicial ou continuada de professores.

Baseado na faceta epistêmica do CDM e dos dados dessa formação, verificou-se que os licenciandos tem uma preocupação maior em expor o conhecimento matemático, isto é, apresentar uma solução (normalmente cálculo como argumentação). E quando questionados sobre os encaminhamentos do professor para elucidar uma questão ou outra estratégia de solução ou registro, percebeu-se a limitação dos mesmos.

O denominado conhecimento especializado do professor, presente na faceta epistêmica, é um dos conhecimentos que diferencia o professor de Matemática. A situação elaborada para a distribuição de balas entre os irmãos emprega um conhecimento comum, a quantidade de balas para cada um. Entretanto, cabe ao professor, elaborar a questão ao nível de conhecimento dos alunos, assim como, quais serão os conhecimentos emergentes da situação e os diferentes

registros de representação. Neste sentido, é cabível ao professor, questionar as diversas estratégias dos alunos buscando uma formalização dos conceitos/temas abordados.

Por fim, ressalta-se que durante a oficina foi possível (re)conhecer os conhecimentos necessários ao professor para ensinar: os matemáticos e os didáticos. No tema específico dos números racionais, os licenciandos tiveram a oportunidade de ter um olhar não apenas de aluno, mas, também, de professor.

### **Referências e Bibliografia**

- Bogdan, R.C.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*. Nº 20.
- Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 1-2.
- Godino, J. D. (2017) Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. 2017. In CONTRERAS et al (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, <<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>>. Acesso em 20 jun 2018.
- Godino, J.D. et al. (2013). Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática. *REVEMAT*. Florianópolis, 8, 1, 46-74.
- Kieren, T. (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. ( eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 162-180.
- Pino-Fan, L.R; Font, V.; Godino, J. D. (2014). *El conocimiento didático-matemático de los profesores: pautas y critérios para su evaluacion y desarrollo*. Disponível em <[http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014\\_Extracto-sin-portada.pdf](http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014_Extracto-sin-portada.pdf)> Acesso em 18 mai 2018.
- Pino-Fan, L.R.; Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor. *Paradigma*, XXXVI, 1, 87-109.
- Romanatto, M.C. (1997). *Número racional: relações necessárias a sua compreensão*. 169f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.