



Álgebra y Pensamiento Algebraico. Una experiencia de reconceptualización

Leslie Mariel **Torres** Burgos

Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México

leslie.torres@correo.uady.mx

Karla Margarita Gómez Osalde

Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México

karla.gomez@correo.uady.mx

Resumen

El aspecto central de la discusión en el taller será una propuesta didáctica del álgebra en donde la matemática constituye un medio; es decir, se mira una matemática centrada en el desarrollo de formas de pensamiento, específicamente, que favorezca el pensamiento algebraico. Esto con el propósito de promover un conocimiento algebraico que de sentido y significado a los pensamientos y acciones ante la resolución de cierto tipo de problemas matemáticos. Para ello se recurrirá al diálogo reflexivo respecto a los alcances y limitaciones didácticas de una propuesta centrada en favorecer experiencias de aprendizaje, como guía para desarrollar el pensamiento algebraico en jóvenes de bachillerato.

Palabras clave: propuesta didáctica, pensamiento algebraico, álgebra escolar.

Introducción

En Aparicio, Sosa y Gómez, 2016 se menciona que, en la actualidad, para hablar del aprendizaje de las matemáticas se debe tomar en consideración que los estudiantes aprenden o no a partir de una confrontación de realidades. Por un lado, se vive una realidad social permeada de exigencias del dominio de herramientas matemáticas para el desarrollo de la ciudadanía plena, donde el aprendizaje debe ir más allá de los rudimentos aritméticos inflexibles que son base de los currículos escolares (Callejo et al., 2010). Esta realidad social, destaca la función de cada persona como ciudadano en sociedad, por lo que en un enfoque por competencias el énfasis recaerá en las herramientas necesarias para que un ciudadano se desenvuelva fuera de la escuela, es decir, que pueda emplear la matemática en su realidad y generar nuevo conocimiento dentro del ámbito donde se desarrolle.

Por otro lado, también se vive una realidad educativa que responde a necesidades curriculares específicas en función de un discurso Matemático Escolar, el cual, debido a la naturaleza que lo constituye, provoca diversas problemáticas relacionadas con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015). Este discurso, se rige por un paradigma inflexible y abstracto que se centra en formas de razonamiento a partir de algoritmos sin contextos ni experiencias asociadas a su conceptualización. De alguna manera, esta realidad educativa se encuentra deshumanizada y concretizada en aspectos científicos sin considerar la construcción social del conocimiento matemático. Un individuo construye saberes matemáticos propios a partir del uso de su conocimiento en situaciones que exigen de un pensamiento matemático asociado a la especificidad de las prácticas que conforman su quehacer como parte de la comunidad. (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016)

Ante estas dos realidades, se puede afirmar que el álgebra en la escuela vive una realidad escolar; es decir, está alejada de la realidad social, por lo que esta matemática no tiene un uso y sentido social, se queda limitada a operaciones, símbolos, algoritmos, que responden a situaciones de la misma matemática, pero que difícilmente se pueden extrapolar a situaciones reales en las que la matemática adquiere sentido y significado. De esta forma, la investigación en Matemática Educativa señala que el estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante, de las situaciones numéricas más concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes (Kieran y Filoy, 1989), constituyendo así una herramienta matemática que permite comprender, estudiar y modelar diferentes sucesos que se presentan en el mundo.

Ante esta realidad del álgebra escolar, surge la necesidad de generar nuevas propuestas didácticas que promuevan un aprendizaje funcional y con sentido social de los saberes propios de la disciplina, de manera que más allá de la centración en objetos matemáticos, se promueva el desarrollo de una forma algebraica de pensar; esto implica un cambio de mirada respecto a la matemática, de ser un fin; es decir, aprender matemáticas como base de nuevo conocimiento matemático, a entenderla como medio; esto es, aprender matemáticas como herramienta que permite responder y tomar decisiones en diversas situaciones.

De esta forma, en el taller se presenta una propuesta didáctica del álgebra para su conceptualización como una forma de pensamiento matemático; dicha propuesta se compone de experiencias de aprendizaje por medio de las cuales el estudiante conceptualiza el álgebra escolar, al tiempo que desarrolla su pensamiento algebraico y reconoce el sentido social de dicho saber.

Fundamentación Teórica-Metodológica

Como se discute en el apartado anterior, en el taller se pretende reflexionar sobre una propuesta didáctica del álgebra centrada en promover el desarrollo del pensamiento algebraico; dicha propuesta atiende a la necesidad de referentes didácticos que favorezcan un álgebra funcional con sentido social, debido a que se ha reportado que las costumbres didácticas del profesor y la difusión escolar de las matemáticas en la escuela, han sido en las últimas décadas, regidas por una lógica axiomática deductiva de la disciplina, aun cuando el aprendizaje matemático requiere de experiencias y aprehensiones conceptuales, procedimentales y estructurales, inherentes a todo saber matemático (Aparicio y Sosa, 2017). Esto se identifica por ejemplo, en la transición de los jóvenes estudiantes de la aritmética al álgebra; puesto que el

tránsito entre ambas áreas de la matemática provoca rupturas cognitivas, de manera que lo útil y funcional en la aritmética no necesariamente se extrapola al álgebra; por lo que esa visión lógica axiomática deductiva de la matemática, será un obstáculo para el desarrollo de una nueva forma de pensar; debido a que concebir a la matemática de esa manera opaca su significado y sentido social, es decir, promueve una matemática propia de la escuela, en la que el aspecto conceptual de cada conocimiento matemático es minimizado respecto a lo procedimental, lo cual no favorece su uso fuera del escenario escolar. Ante esto, diversas investigaciones como Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Radford (2012), proponen el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas; es decir, identificar y desarrollar en los estudiantes aquellas actividades propias de una forma de pensar algebraica, de manera que el álgebra tenga sentido más allá de situaciones del contexto escolar.

Así, el significado usualmente asociado al Álgebra escolar como generalización “conceptual y operativa” de la aritmética; en el que poco se reconoce la importancia de las filiaciones y rupturas cognitivas y en general, epistémicas de los saberes algebraicos y el pensamiento asociado, requiere repensarse. Este enfoque clásico de enseñanza, otorgado a los saberes algebraicos, obstaculiza su sentido, entendimiento y uso como herramientas matemáticas para generalizar, modelar o trabajar con estructuras algebraicas. En ese sentido, no se favorecen los procesos cognitivos que permiten desarrollar el pensamiento algebraico tales como el pensamiento relacional, el sentido estructural, la generalización, simbolización, entre otros.

Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Kaput & Blanton (2001), entre otros autores, proponen que los estudiantes deben enfrentarse a situaciones, que promuevan la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones para el desarrollo de un pensamiento algebraico. Otras investigaciones, (Kaput, 2000; Vega-Castro, Molina, & Castro, 2012; Velásquez, 2014; Molina; 2007) han concluido que, para desarrollar este tipo de pensamiento matemático, es necesario enriquecer la actividad algebraica a partir de promover diversos procesos cognitivos en los estudiantes. De manera que se favorezca una concepción del álgebra que englobe la verbalización, la simbolización, el sentido estructural, el pensamiento relacional, la representación, la modelación, la generalización y la abstracción.

Para lo anterior, la propuesta didáctica del álgebra que se realiza se enmarca en la concepción sobre la conceptualización matemática de Aparicio, Sosa y Gómez (2016):

“Consiste en la posibilidad de reconocer, enunciar y usar un objeto matemático más allá del escenario en el que originalmente fue presentado/tratado. Conceptualizar entonces está asociado al tipo de experiencias que las personas puedan entablar con un mismo objeto matemático en más de una forma o registro de representación semiótica”.

De tal forma que la conceptualización del álgebra, no debe reducirse a la memorización de definiciones y propiedades o a entender los conceptos como definiciones, sino que, debe favorecerse su construcción desde las tres dimensiones que los conforman (*lo conceptual, lo procedimental y lo estructural*) permitiendo la adherencia a un objeto matemático aun cuando éste sea de naturaleza abstracta.

Los significados de los conocimientos matemáticos son parte del concepto matemático y depende de las formas en las que se utilizan o emplean. Enfatizan sobre la relación del saber qué y el saber cómo, durante su conceptualización. Sin embargo, Aparicio, Sosa y Gómez (2016) reconocen que todo conocimiento matemático es parte de una estructura matemática más amplia

en la que los conocimientos se relacionan por medio de significados y usos. Con ello, la conceptualización matemática propicia una adherencia al objeto matemático desde sus significados, procedimientos y estructuras (Gutierrez, 2017).

En este sentido, la propuesta didáctica del álgebra desarrollada, se compone de Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA), puesto que asume que el aprendizaje es resultado de experiencias de los individuos que aprenden. Este constructo considera al saber desde su naturaleza epistémica (*lo conceptual, operacional y estructural*), es decir, la complejidad de su construcción, así como su naturaleza didáctica (Aparicio y Sosa, 2013) por lo que se consideran un escenario propicio para la construcción de conocimiento matemático, al incorporar también aspectos propios del individuo, como su cognición.

Así, un DEA que favorezca el pensamiento algebraico, parte de la interpretación de la funcionalidad y el sentido social de los saberes matemáticos algebraicos y a partir de ello se generan argumentos, explicaciones e interpretaciones, mismos que permiten procesos de generalización, simbolización y modelación, característicos en álgebra. De modo que las caracterizaciones, definiciones y ejemplos ahora complementan la estructura conceptual y procedimental de los saberes puestos en juego.

Método

En el estado de Yucatán, México, se ha llevado a cabo un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior (bachillerato) cuyo objetivo se centra en favorecer el desarrollo de formas de pensamiento matemático en los estudiantes. Para ello y como medio de diálogo entre el profesor, estudiante y saber, se ha elaborado e implementado, particularmente para la asignatura de álgebra, una propuesta didáctica compuesta de experiencias de aprendizaje que busca promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

La metodología desarrollada para el diseño de esta propuesta didáctica, se basa en la propuesta por Aparicio y Sosa, 2013 para la conceptualización de saberes matemáticos en educación básica. Se describen los momentos seguidos para su desarrollo:

Momento 1. Establecimiento de la Relación Sistemica (RS). Esta primera etapa consiste en identificar el Aprendizaje Esperado (A.E.), el Saber específico y determinar una posible relación en forma sistémica (integral) con los procesos que favorecen el pensamiento algebraico.

Momento 2. Problematización del Saber Matemático (PSM). Esta etapa consiste en reconocer la naturaleza epistémica y didáctica del saber matemático, es decir plantearse y responder preguntas de índole:

- Epistemológica: relativa a los procesos de construcción de conocimiento matemático;
- Cognitiva: relativa a procesos y representaciones mentales de las personas;
- Didáctica: relativa a las formas de organización y difusión escolar de los saberes.

Etapa 3. Trabajo de Ingeniería Didáctica y elaboración de diseños. En esta tercera etapa se desarrolla un trabajo de ingeniería didáctica con el que esencialmente debe determinarse un conjunto de análisis sobre el aprendizaje matemático a obtenerse como producto del plan de acción.

Con base en lo anterior se realiza el diseño de las tareas de aprendizaje, las cuales se

elaboran siguiendo las fases de la teoría de situaciones didácticas. Esto es, una tarea para la acción, una para la formulación y una de validación, juntas integran un diseño didáctico para el aprendizaje.

En la imagen 1 se muestra un esquema para la elaboración de DEA's:

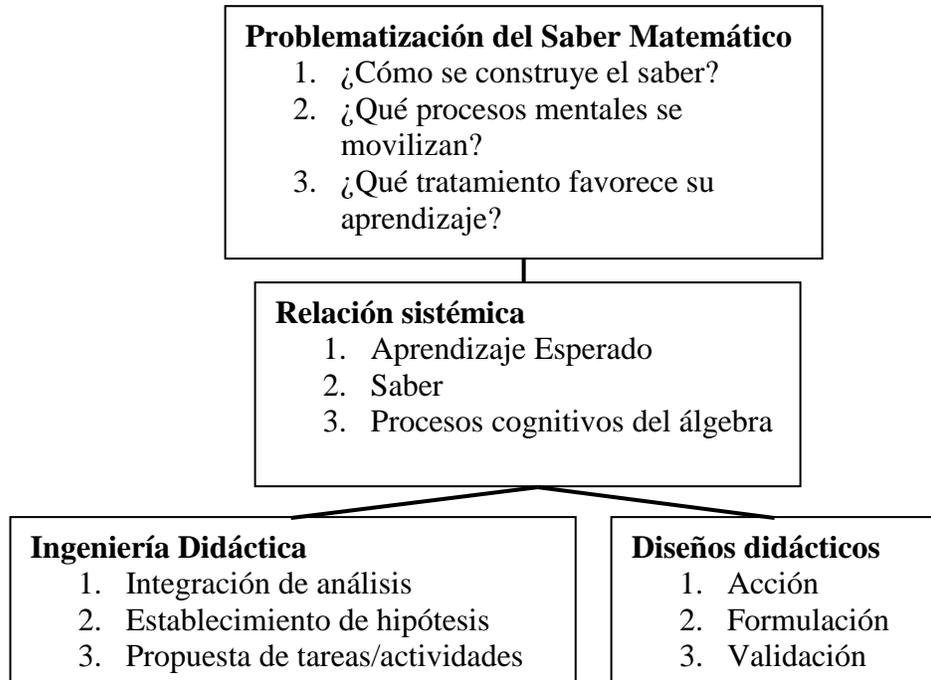


Imagen 1: Esquema de articulación didáctica para la elaboración de DEA's, (Aparicio y Sosa, 2013)

Particularmente, la propuesta didáctica para la conceptualización del álgebra como una forma de pensamiento algebraico, se puede analizar en el libro Álgebra y Pensamiento Algebraico (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016). La cual se organiza en tres bloques principales, lenguaje algebraico, operaciones algebraicas fundamentales y modelación con ecuaciones lineales y cuadráticas. En cada uno de los diseños de experiencias de aprendizaje, se presentan situaciones cotidianas en las que se hace uso del saber algebraico en desarrollo, de manera que se mire su sentido social a la par que se construye el conocimiento.

Con base en lo anterior, se propone desarrollar el taller en dos momentos o etapas, de manera que se discuta y reflexione respecto al álgebra escolar y al pensamiento algebraico, desde la práctica docente; para posteriormente presentar una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico; de manera que se propondrá una visión general de lo que significa desarrollar una forma didáctica de pensar y practicar el álgebra en situación escolar.

Las estrategias a considerar en cada uno de los momentos en los que se divide el taller, se describen en la Tabla I siguiente:

Tabla I

Momentos del taller.

Momento	Estrategias
1. Álgebra escolar y Pensamiento algebraico	Discusión sobre las problemáticas asociadas a procesos de enseñanza aprendizaje del álgebra escolar, a partir de ejemplos específicos.
2. Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico.	Reconocimiento de los elementos considerados en algunos Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA).

Los DEA que se analizarán durante el taller forman parte del libro *Álgebra y Pensamiento Algebraico* (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016).

Conclusiones

La experiencia desarrollada en un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior en el estado de Yucatán, respecto a la implementación de los DEA, ha puesto de manifiesto cierto grado de modificación en la organización de las prácticas en las aulas, percibiéndose mayor interés, participación y disposición por parte de los estudiantes hacia el estudio, mediante la realización de actividades centradas en su aprendizaje y en una visión funcional de los saberes matemáticos.

Se ha evidenciado que la conceptualización de la noción de variable es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico y la posterior conceptualización de otros saberes propios del álgebra escolar.

De igual forma, se evidenció la necesidad de conceptualizar la propuesta didáctica generada con los docentes; es decir, es necesario que el docente viva experiencias de reconceptualización tanto matemática como didáctica de manera que se desarrollen elementos en esas dos direcciones, puesto que el entender el álgebra como una forma de pensamiento provoca que los estudiantes desarrollen nuevos argumentos, razonamientos y explicaciones, que generan una respuesta no única en las actividades.

En ese sentido, se espera que los participantes al taller profundicen y amplíen su visión del álgebra, reconociendo dos perspectivas didácticas distintas para su enseñanza aprendizaje; es decir, que se reconozca que el álgebra, no es una combinación de símbolos, letras y números, o una forma general de la aritmética o únicamente un lenguaje de las matemáticas; porque si bien el álgebra es todo lo anterior, el énfasis de esta área de las matemáticas se encuentra en una forma de establecer relaciones entre magnitudes variables. Es decir, el reconocimiento de elementos variantes y constantes y la generación de relaciones matemáticas es fundamental para el desarrollo de un pensamiento algebraico.

De igual forma con el estudio del concepto ecuación, se espera que se reconozca la relación entre la modelación matemática elemental y el pensamiento algebraico ante el análisis y resolución de situaciones que demandan del uso de la variable.

Finalmente, se espera socializar una propuesta de tratamiento didáctico del álgebra escolar en bachillerato, discutida y reflexionada con profesores del estado de Yucatán, México; y con base en ello, señalar alcances y limitaciones de dicha propuesta.

Referencias y bibliografía

- Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica*. Mérida, Yucatán, México.
- Aparicio, E. y Sosa, L. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma de pensar didácticamente. Artículo presentado en el 1er Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente. Guerrero, México.
- Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, M. (2016). *Álgebra y Pensamiento Algebraico*. Experiencias de aprendizaje en bachillerato. Mérida, Yucatán: Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán. (no publicado)
- Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (2016). Lo matemático como argumentación en el aprendizaje Escolar. Una reflexión desde la investigación para la Educación. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*. 1(1). 427-435.
- Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 154 - 159). México: Red Cimates.
- Callejo, M., Goñi, J., Alsina, C., Civil, M., Giménez, J., Gómez-Chacón, I., Venegas, Y. (2010). *Educación matemática y ciudadanía*. Barcelona, España: Graó.
- Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (2015) *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.
- Demonty, I. Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Springer*.
- Gutiérrez, A. (2017). *Hacia una epistemología para la conceptualización escolar del método de L'hospital a partir de un enfoque geométrico-variacional*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas. Mérida, México.
- Kaput J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. En: National Research Council (ed.) *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium*. National Academy Press, Washington, DC.
- Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351)*. Melbourne: University of Melbourne.
- Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Vega-Castro, D, Molina, M, & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 233-258.
- Velásquez, E. (2014). *Unidad didáctica para el proceso de generalización y solución de ecuaciones, utilizando métodos informales, como apoyo para el sexto grado*. Tesis de Maestría no publicada., Universidad Nacional de Colombia.