



Análisis de las respuestas de escolares de 7 años al resolver problemas de comparación e igualación

Dra. Carmen Paz **Oval Soto**

Universidad de Magallanes

Chile

carmen.oval@umag.cl

Dra. Paola **Donoso Riquelme**

Universidad de Magallanes

Chile

paola.donosos@umag.cl

Resumen

El siguiente texto tiene por objetivo identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación. Para el logro de este objetivo, nos hemos basado en dos de las cuatro categorías de Carpenter y Moser (1983): comparación e igualación. El análisis de las producciones escritas de los estudiantes de 2do año de primaria permitió identificar los errores y los procedimientos más utilizados por ellos. Tal y como se esperaba, el problema de igualación es respondido de manera incorrecta por el 61% de los estudiantes mientras que el problema de comparación es respondido de manera incorrecta por el 62% de los estudiantes.

Palabras clave: resolución de problemas, matemática, errores, procedimientos.

Introducción

La resolución de problemas implica el desarrollo de habilidades, actitudes y valores que entrega la oportunidad a que los estudiantes puedan desarrollar el pensamiento crítico, la argumentación de sus ideas, entre otras competencias. Poirier-Proulx (1999) subraya que la resolución de problemas pone en juego tanto habilidades intelectuales como habilidades metacognitivas. La autora afirma que resolver problemas requiere también la utilización de conocimientos y de ciertas habilidades que el estudiante debe poseer para poder reconocer los aspectos que van a permitirle resolver la situación propuesta. La resolución de problemas crea un ambiente espléndido para poder desarrollar la comunicación dentro del grupo curso, puesto que, el estudiante a través de esta forma da a conocer los métodos empleados, se crea un espacio de discusión entre los estudiantes en el que el profesor es un mediador. Finalmente, la resolución de problemas ocupa un lugar importante tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en otras

disciplinas.

Marco teórico

Las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, sobretodo en educación básica, se han centrado en diferentes aspectos de la resolución de problemas. Entre estas investigaciones, algunas han abordado la resolución de problemas según su estructura (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983), la utilización del simbolismo matemático (Vergnaud, 1990) y la influencia de las variables didácticas (DeBlois, 2011; Weisser, 1999). Por otro lado, algunas investigaciones se han centrado en las dificultades de los estudiantes en resolver problemas en matemáticas debido a la comprensión de las relaciones y de los algoritmos (Baffrey Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez 1987; Carpenter y Moser, 1984; Fayol, 1990; Nantais, 1991; Vergnaud, 1990; Weisser, 1999).

Estas diferentes investigaciones se detuvieron en la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes desde el punto de vista de las estrategias de resolución privilegiadas así como también en la utilización del simbolismo matemático pasando por las cuatro operaciones elementales (adición, sustracción, multiplicación y división). Un análisis de los trabajos de investigación sobre resolución de problemas pone en evidencia el interés de estos autores sobre el desarrollo de conocimiento matemáticos de los estudiantes.

Categorización de problemas de Carpenter & Moser (1983)

Desde los años 1980, la resolución de problemas de estructuras aditivas ha sido un objeto de estudio importante en diferentes universidades de los Estados Unidos y Europa. Varios estudios realizados en esa época se volvieron clásicos en el área de la resolución de problemas en matemática. (Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1983; Riley et al, 1983; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982)

La investigación realizada por Carpenter y Moser (1983: 16) identificó cuatro clases diferentes de problemas que usan operaciones de suma y resta: cambio, combinación, comparación e igualación. Estas categorías nos permiten tener problemas verbales con las características semánticas que implican operaciones de suma, resta o ambas. Por su parte, Riley et al. (1983, p.160), en un proyecto de investigación que se centró en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas aritméticos estudiantiles, identificó tres clases diferentes de problemas: los problemas de cambio, comparación y combinación. También consideraron tres dimensiones importantes en la resolución de problemas de las estructuras aditivas: las relaciones semánticas, la operación involucrada y la identidad del elemento desconocido. Es sobre esta base que se han creado los diferentes tipos de problemas.

Problemas de Cambio

Los problemas de cambio se caracterizan por el hecho de que tienen una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un cambio en esta cantidad inicial. Este tipo de problema implica al menos una transformación temporal aplicada a un estado inicial y que da como resultado un estado final. Riley et al. (1983) señalan que, en este tipo de problema, la transformación puede ser aditiva o sustractiva, como en el siguiente ejemplo: "Jean tiene 5 canicas. José le da tres más. ¿Cuántas bolas tiene John ahora?".

Problemas de Combinación

Este tipo de problema presenta una relación estática que involucra dos cantidades distintas que son parte de un todo. No hay transformaciones y lo desconocido puede afectar al total o a una de las partes. Este tipo de problema se presenta en los siguientes problemas: “*John tiene 4 caramelos. Anne tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen juntos?*” o “*Algunos niños van a patinar sobre hielo. Hay 3 niñas y 9 niños. ¿Cuántos niños van a patinar sobre hielo?*”

Problemas de comparación

En algunos casos, para Carpenter et al. (1981), los problemas implican la comparación de dos cantidades distintas. Los autores explican que en este tipo de problema, es necesario encontrar la diferencia entre las dos cantidades dadas. En otras palabras, el estudiante hace una comparación de los conjuntos para encontrar la diferencia, que puede relacionarse con uno de los dos conjuntos, como por ejemplo: “*Marc ganó 4 premios en el festival. Su hermana Connie ganó 8 premios en el mismo festival. ¿Cuántos premios ha ganado Connie más que su hermano Marc?*”. En este tipo de problema, Riley et al. (1983) identificaron tres tipos diferentes de problemas que implican la comparación: la diferencia, el conjunto comparado y el conjunto de referencia y la categoría no posee subdivisión.

Problemas de igualdad

Este tipo de problema tiene las mismas características que los problemas de cambio y comparación. La diferencia es que aquí se comparan dos conjuntos de datos, y para responder a la pregunta del problema, una de las dos cantidades debe ser igualada. Este es el caso en el siguiente problema: “*Pierre tiene 12 canicas. Betty tiene 7. ¿Qué debería hacer Betty para tener tantos mármoles como Peter?*” y está presente solo en Carpenter et al. (1981).

Vergnaud (1982) explica que los problemas de comparación, combinación y de cambio permiten al niño comprender las dos ideas principales del concepto primitivo del número: la cardinalidad y la adición. El autor señala que las situaciones de tipo aditivo son de disímil dificultad porque ellos están contruidos a partir de diferentes variables didácticas como las clases de problemas, los tipos de números y los cálculos a realizar, el orden de presentación de datos y el contenido de los problemas. El autor señala que desde que los niños están en la edad escolar, se enfrentan a situaciones en las que ellos deben apropiarse de los conocimientos diversos sobre el número.

Dificultades en la resolución de problemas

Si bien la resolución de problemas es un espacio privilegiado para el desarrollo de aprendizaje en matemática, diversos estudios realizados en el área de la didáctica de la matemática, sobretodo en la resolución de problemas de estructura aditiva, han mostrado la presencia de dificultades en la resolución por parte de los estudiantes. Las investigaciones llevadas a cabo por Riley et al (1983), Vergnaud (1982) así como también por Bermejo y Rodríguez (1987) han mostrado que ciertas variables didácticas, tales como el largo del enunciado del problema, la complejidad gramatical, el ámbito numérico en juego en la situación y el orden de los datos de un problema, tienen efectos significativos sobre la resolución de problemas en el estudiante. Estas variables pueden ser controladas por el profesor cuando crea los problemas que entregará a los estudiantes. De hecho, las investigaciones llevadas a cabo por Bermejo y Rodríguez (1987) y Fayol (1990) han mostrado que los problemas representados por frases donde la incógnita está en primer o en segundo lugar son más difíciles para los estudiantes que los problemas representados por ecuaciones donde el resultado es desconocido. Estas

mismas investigaciones han establecido también que la formulación verbal del problema aumenta el nivel de dificultad para los niños que deben resolver este tipo de problema propuesto por el profesor. Además, de estas variables se desprenden cuatro grandes conjuntos: cambio, reunión y complemento de conjuntos, comparación e igualación.

Los estudios que se ocupan de la resolución de problemas con la estructura de aditivo (Baffrey Dumont, 1996; DeBlois, 1997) muestran que los estudiantes asocian el término utilizado en la operación aritmética sin necesidad de entender la relación en juego, por ejemplo, DeBlois (1997) presentó la siguiente situación a los estudiantes: Tienes 54 autos en tu caja de juguetes. Tu vecino tiene 42 autos menos que tú. ¿Cuánto tiene tu vecino con autos en su caja de juguetes? Para responder a esta situación, uno de los estudiantes que participó en el estudio restaba, pero le costaba entender que el resultado coincidía con el conjunto en comparación. En este caso, la comprensión de la situación, desde el punto de vista del niño, es rudimentaria. Otro aspecto importante observado en esta investigación es la diversidad de enunciados. Los niños tienden a reconstruir los problemas de diferentes maneras. En otras palabras, el estudiante cambia el significado de los datos del enunciado del problema para que coincida con la estrategia de resolución que conoce o porque la declaración es demasiado compleja para él.

Los cambios en los problemas involucran diferentes variables didácticas tales como la estructura del problema, el tamaño de los números y la familiaridad con el contenido matemático del enunciado. Estas variables didácticas pueden modificar las estrategias utilizadas por los estudiantes. Un estudio realizado por Weisser (1999) mostró que la variable "orden de presentación de los datos" no tiene una influencia significativa en la elección de las estrategias de los alumnos. La variable "tipo de números" parece tener una influencia significativa en la elección de la estrategia adoptada por el estudiante al resolver la situación propuesta, además de resaltar una cierta autonomía en el desarrollo de ciertas habilidades.

DeBlois (2011) informa que la enseñanza de algoritmos en niños de primer año podría ser perjudicial para el desarrollo del razonamiento matemático de los niños cuando resuelven problemas con una estructura aditiva. La autora explica que las estrategias de resolución de los niños evolucionan, es decir, los niños comienzan a pensar o actuar mentalmente para obtener una respuesta. Una vez que los niños han explorado este paso, pueden representar (o externalizar) este conocimiento ya sea por sus propias palabras o por símbolos personales hasta el uso de símbolos formales.

Se han realizado varias investigaciones para resolver problemas matemáticos en los estudiantes desde el punto de vista de las dificultades encontradas para resolver problemas en matemáticas. Estas dificultades están relacionadas, para algunos autores, con la comprensión del enunciado y la comprensión de los algoritmos de cálculo.

Comprender las relaciones

Diversas investigaciones han demostrado que cuando los estudiantes resuelven problemas tienen dificultades para comprenderlo, tanto sobre la posición de la incógnita como en la cuestión en el enunciado (Baffrey- Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; DeBlois, 1997; Fayol, 1990; Oval, Oliveira y López, 2017; Weisser, 1999). Por ejemplo, la investigación realizada por Bermejo y Rodríguez (1987) muestra que la estructura semántica del problema a resolver influye en la elección del estudiante de las estrategias de resolución. En otras palabras, los problemas en que la incógnita está en el operando ($a + b = ?$; $A = b$) se considera más difícil que aquellos en los que la incógnita está en

el resultado ($a + b = ?$)

Comprender los algoritmos

Varios autores han identificado los errores que los estudiantes hacen al resolver algoritmos de suma y resta (Bermejo et al., 2004, Carpenter y Moser 1984, Nantais 1991). Carpenter y Moser (1984) mencionan que el aprendizaje del algoritmo supone una comprensión de muchos elementos tales como la comprensión de la numeración posicional, la operación aritmética a realizar, los símbolos utilizados y las reglas o propiedades relacionadas con la operación. Bermejo et al. (2004) explican que incluso si el alumno resuelve un algoritmo paso a paso, eso no significa que haya entendido lo que hizo. De hecho, para comprender el algoritmo formal y su uso, el estudiante debe relacionar cada elemento (números y operaciones).

Por otro lado, Nantais (1991) explica que los errores ocurren por varias razones, pero que podrían estar relacionados con el conocimiento del sistema numérico o la enseñanza recibida del estudiante, es decir, diga las generalizaciones que puede hacer cuando el maestro le dice, por ejemplo, "que no puede restar un número pequeño de un número grande" (p.5). Como hemos visto anteriormente, los estudios presentados muestran que la estructura del problema y las diferentes variables consideradas en el problema tienen una influencia directa en la elección de las estrategias movilizadas por los alumnos y en las dificultades que pueden aparecer.

Así, como objetivo para esta comunicación nos hemos trazado el identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Metodología y Análisis de resultados

En este texto nos abocaremos a identificar los errores y procedimientos de resolución escolares de 7 años y que cursan 2do año de primaria. Los problemas fueron presentados de manera aleatoria e individual y creados a partir de las categorías de Carpenter y Moser (1983). En ambos casos los problemas fueron resueltos por 90 estudiantes. Los análisis realizados a los procedimientos de los escolares nos permitirán identificar los errores que cometen estos al momento de enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Resultados

De manera general, los resultados obtenidos muestran que al plantear problemas de igualación y comparación los estudiantes cometen más errores que en otro tipo de problemas. Ante el problema de igualación "*Sara tiene 13 libros. Si Francisca compra 5 libros, ella tendrá tantos libros como Sara. ¿Cuántos libros tiene Francisca?*", cuyo procedimiento correcto consiste en realizar un procedimiento sustractivo, restando 13 menos 5, para llegar a la respuesta que es *Francisca tiene 8 libros*, los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que del total de estudiantes que respondieron el problema de igualación 32% lo respondieron de forma correcta, 61% de manera incorrecta, y 7% no lo respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizaron los estudiantes, la tabla 1 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de igualación. Destaca que el algoritmo de sustracción permite resolver el problema, sin embargo, dos escolares plantearon el algoritmo de sustracción, pero obtuvieron un resultado incorrecto, lo que manifiesta la comprensión del enunciado, por tanto la dificultad radica en la resolución del algoritmo.

Tabla 1.

Registro de respuestas dadas al problema de Igualación

Respuestas	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Adición	Palotes	Palabras	Número	N° de Escolares
Correctas	26	0	3	0	0	29
Incorrectas	2	45	0	7	1	55
No responden	--	--	--	--	--	6
Total	28	45	3	7	1	90

Ante el problema de comparación *Susana tiene 28 chalecos. Ella tiene 9 chalecos menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia?*, cuyo procedimiento correcto consiste en realizar una adición, sumando 28 más 9, para llegar a la respuesta que es *Cecilia tiene 37 chalecos*, los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que 30% de ellos respondieron de forma correcta, 62% lo resolvieron de manera incorrecta y 8% no respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizados, la tabla 2 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de comparación. Destaca que el algoritmo de adición permite resolver el problema, sin embargo, nueve escolares plantearon el algoritmo de adición, pero obtuvieron un resultado incorrecto.

Tabla 2

Registro de respuestas dadas al problema de Comparación

Respuestas	Algoritmo de Adición	Algoritmo de Adición y palotes	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Sustracción y palotes	Palabras y palotes	Palotes	Palabras	Números	N° de Escolares
Correctas	21	3	0	0	1	0	2	0	27
Incorrectas	9	1	38	2	0	1	4	1	56
No Responden	--	--	--	--	--	--	--	---	7
Total	30	4	38	2	1	1	6	1	90

Conclusión

Los análisis realizados en torno a la resolución de problemas de comparación e igualación nos han permitido identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al momento de resolver los problemas planteados. El análisis en torno a los procedimientos como tal, muestran la utilización del algoritmo tradicional con las dificultades que esto conlleva. En relación a las respuestas otorgadas por los estudiantes al problema de igualación, el análisis de las respuestas correctas permite identificar 2 categorías de respuesta: una de ellas es la realización del algoritmo de sustracción y la segunda es el registro gráfico correspondiente a dibujar la cantidad total de “palote” y tachar aquellos que hay que sustraer. Respecto al registro de las respuestas incorrectas, se identifican 4 tipos de registros: error de resolución del algoritmo de sustracción, la realización del algoritmo de adición lo que evidencia la incomprensión del enunciado, repetición de la información del problema sin necesariamente llegar a resolverlo y finalmente, escribe una respuesta numérica sin dejar rastro del procedimiento que utilizó para la resolución.

Si nos enfocamos en las respuestas correcta del problema de comparación, el análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar 4 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y “palotes”, palabras y “palotes” y solo palabras. Respecto a esto último,

los estudiantes no registran de manera gráfica su respuesta y sólo escriben el resultado sin dejar rastro del procedimiento realizado. En relación a las respuestas incorrectas, se identifican 7 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y “palotes”, algoritmo de sustracción, algoritmo de sustracción y “palotes”, “palotes”, palabras y números. En las producciones escritas de estudiantes que resolvieron con algoritmo de adición pero su respuesta es incorrecta, se debe a una dificultad en la comprensión de la relación entre los sumandos o en el valor posicional al momento de realizar la adición.

Las dificultades evidenciadas por este grupo de estudiantes permitirán al profesor tomar decisiones en beneficio del desarrollo de la habilidad de resolución de problemas y a los estudiantes superar aquellos errores que manifiestan en su actividad matemática.

Referencias y bibliografía

- Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(2), 321–343. Retrieved from <http://www.erudit.org/revue/RSE/1996/v22/n2/031883ar.pdf>
- Bermejo, V., & Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y aprendizaje*, 39-40, 71–81.
- Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27–39. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/748656>. doi:10.2307/748656
- Carpenter, T., & Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press.
- Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202.
- De Corte, É., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 363–381.
- De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77(4), 460–470. doi:10.1037//0022-0663.77.4.460
- Deblois, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et francophonie*, XXV(1). Retrieved from <http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/25-1/rxxv1-08.html>
- DeBlois, L. (2011). Enseigner les mathématiques: des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter (p. 223). Québec, Canada: Presses de l'Université Laval (PUL).
- Fayol, Michel. (1990). La résolution de problèmes et sa genèse. In Michel Fayol (Ed.), *L'enfant et le nombre: du comptage à la résolution de problèmes* (pp. 149–184). Neuchâtel, Suisse: Éditions Delachaux & Nestlé.
- Nantais, N. (1991). L'analyse d'erreurs appliquées aux algorithmes arithmétiques. *Instantanés Mathématiques*, 27(5), 6–11.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, (13), 373–394.
- Oval, C., Oliveira, I, López, C (2017) Resolución de Problemas en Matemáticas: Procedimientos de

Resolución em estudiantes de 7 años. Libro de Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Madrid.

Poirier, L., & Bednarz, N. (1997). Comprendre le sens du symbolisme mathématique... Une question d'autobus. *La revue de l'ADOQ*, 9(2), 9–10.

Poirier-Proulx, L. (1999). La résolution de problèmes: une stratégie de pensée. In L. Poirier Proulx (Ed.), *La résolution de problèmes en enseignement. Perspectives en Éducation*. Bruxelles, Belgique: DeBoeck.

Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. *Cognition & Instruction*, 5(1), 49. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=7383489&site=ehost-live>

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York, USA: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogenetique. *Revue française de pédagogie*, (36), 28–43.

Weisser, M. (1999). Les problèmes d'arithmétique : traits de surface , modes de résolution et taux de réussite. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 25(2), 375–399.