



## Representaciones matemáticas y la invención de problemas desde la modelización

Karen **Porras** Lizano  
Universidad Nacional de Costa Rica  
Costa Rica  
karen.porras.lizano@una.cr

Enrique **Castro** Martínez  
Universidad de Granada  
España  
ecastro@ugr.es

### Resumen

En este documento se analiza el proceso de traducción entre representaciones matemáticas, al utilizar la invención con problemas en un proceso de modelización matemática en el aula de séptimo de la Educación Secundaria de Costa Rica, específicamente en el tema de proporcionalidad. Para recolectar la información se realizó la aplicación de observaciones participantes y un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos de las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. Se concluye que en las creaciones de problemas de los estudiantes, se observa en mayor preferencia representaciones como las verbales escritas y simbólicas numéricas y las operaciones aritméticas básicas fue la estrategia más utilizada. Además, los estudiantes presentaron un razonamiento proporcional deficiente y sin comprensión, evidenciado en la escaza fluidez representacional del objeto matemático.

*Palabras clave:* Sistemas de representación, modelización matemática; invención de problemas.

El objetivo principal de la educación es lograr que el estudiante construya un aprendizaje con una comprensión profunda y rica, visualizando lo que aprende de una manera útil y significativa (Skemp, 1999). Además, de que aplique los conceptos cuando los necesite y los utilice con flexibilidad al enfrentarse a nuevas situaciones. Para lograr lo anterior es trascendental el proceso de traducción entre las representaciones matemáticas, además al investigador le permite entender los problemas de comprensión que presentan los estudiantes al manejar la pluralidad de los sistemas de representación de un mismo concepto lo que repercute directamente en su rendimiento académico.

Esta comunicación muestra una investigación realizada con la idea de brindar información acerca de la construcción del conocimiento matemático, a través de las representaciones de los conceptos y las estrategias que los estudiantes utilizan al resolver tareas de modelización matemática. De estos procesos destacamos la importancia de las representaciones matemáticas, entendiendo estas “como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009, p. 3).

Por otra parte, al utilizar la modelización matemática se pretende estimular en el estudiante la experimentación de los conceptos para dotarlos de significado (Rico, 2000), al mismo tiempo que se promueve “mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática” (MEP, 2012, p. 11) y se incentiva capacidades de gran potencial como la imaginación, la creatividad e invención, dejando de lado la ejecución mecánica de tareas que promueven conocimientos insuficientes y sin comprensión, reflejándose en los bajos rendimientos académicos de los estudiantes.

En la misma línea, consideramos que la modelización matemática por medio de la construcción y desarrollo de un modelo, se matematiza la realidad de la situación específica (Castro y Castro, 2000) y el cual está integrado en la resolución de problemas como estrategia didáctica aplicada a situaciones asociadas con ambientes reales, físicos, sociales y culturales.

### **Representaciones de los conceptos matemáticos**

En la actualidad mucha de la información presente en los medios de transmisión se visualiza en diferentes representaciones como tablas, gráficos y fórmulas; ante lo cual el ser humano debe tomar una posición discriminatoria, analítica y objetiva. Por ello, el currículo en la educación de diferentes profesiones, en especial en el campo de la educación matemática, debe enfatizar en la resolución de problemas y la toma de decisiones, con el fin de dotar a las futuras generaciones de capacidades relevantes como el análisis, criticidad, la creatividad, entre otros.

Asimismo para generar el pensamiento matemático, primeramente se debe realizar una imagen mental de las ideas, lo que denominaremos como representaciones internas con el fin de manipularlas posteriormente. Luego, para poder realizar la comunicación debemos expresarlas externamente, con lo que creamos las representaciones externas, las cuales según Castro y Castro (2000) son “enunciados en forma natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras” (p. 101). Además, sirven como “estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales” (Castro y Castro, 2000, p. 101), lo que proporciona información conceptual relevante del estudiante.

También, consideramos que el aprendizaje matemático se genera al tomar en cuenta dos elementos importantes, el aspecto representacional que configura al objeto y el desarrollo de un significado personal sobre este (Pecharromán, 2014); donde los procesos matemáticos están ligados a la utilización de una multiplicidad de representaciones semióticas de la misma naturaleza y parafraseando a González, Castro-Rodríguez y Castro (2016) tenemos que para lograr una efectiva comprensión matemática, es necesario que el alumno posea la “fluidez

representacional”, es decir que sea capaz de cambiar y coordinar diferentes registros de representación del objeto matemático.

### **Modelización matemática y el proceso de invención de problemas**

En este estudio consideramos que el inventar problemas forma parte integral del proceso de modelización matemática, concebida como una manera de matematizar la realidad, en el cual los modelos son considerados como sistemas conceptuales que se expresan usando sistemas de notación externos, y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) (Lesh y Doerr, 2003).

Galbraith y Stillman (2006) proponen una serie de transiciones en el proceso de modelización: (a) De la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, (b) De la declaración de problemas del mundo real al modelo matemático, (c) Del modelo matemático a la solución matemática, (d) De la solución matemática al significado de la solución en el mundo real y (e) Desde el significado de la solución en el mundo real hasta la revisión del modelo o la solución de aceptación (p. 144). Asimismo, en la primera transición es donde se realiza la invención de problemas, en la cual según Hansen y Hana (2015) citando a los mismos autores anteriores, es donde “se aclara el contexto del problema, haciendo suposiciones simplificadas, identificando entidades estratégicas y especificando los elementos correctos de las entidades estratégicas” (p. 42), es decir se brinda más relevancia a la creación del problema y constituye una experiencia valiosa para el estudiante dentro del proceso de modelización.

Concebimos como un problema a situaciones que su solución no es clara y su respuesta no es automática, ni mucho menos rutinaria; demandando procesos de análisis y elaboración en su solución. Asimismo, parte esencial de la modelización matemática es el problema y su formulación, el cual por medio del uso de conjeturas va sufriendo ajustes, en la definición de sus parámetros y objetivos, por lo tanto el ser capaz de plantear y concretar un problema adecuadamente a la luz de los datos y de los conceptos, es parte vital del uso de la matemática en el mundo real (English, 1997; Hansen y Hana, 2015; Silver, 1994).

De igual manera, destacamos la importancia de la aplicación del proceso de invención de problemas, pues motiva la participación activa del estudiante en su aprendizaje, donde este se identifica con el problema que construye, siendo producto su creatividad, imaginación y curiosidad; logrando a la vez construcciones muy elaboradas, con mucho valor didáctico. Para diversos autores, el proceso de invención de problemas puede “dar una mayor apropiación de su ambiente de aprendizaje, ya que es un componente natural de la instrucción orientada a la indagación y se basa en la creencia de dar prioridad a la pregunta sobre la respuesta” (Hansen y Hana, 2015, p. 40), además que son experiencias que preparan a los estudiantes para su desempeño profesional futuro afuera de las aulas.

El propósito de esta comunicación es analizar el proceso de traducción de las representaciones matemáticas al crear y resolver situaciones problema siguiendo un proceso de modelización matemática en su solución, con el fin de proponer mejoras en la enseñanza a través del diseño de tareas y estrategias didácticas que ayuden al estudiante a comprender significativamente los conceptos matemáticos.

## Método

Este proceso de investigación sigue un enfoque cualitativo, específicamente utilizamos un tipo de investigación no exploratoria, sin intervenir directamente en el fenómeno; cuyo diseño de investigación fue un estudio de casos, pues nos interesó el “Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2008), en particular cuando abordan y dan importancia al proceso de traducción de las representaciones generadas al construir y resolver problemas con matemática.

Los participantes fueron un grupo de 24 estudiantes del nivel de séptimo de un colegio académico diurno oficial, específicamente ubicado en la provincia de San José en Costa Rica. La edad promedio de los participantes es de 13 años y cuyo estatus socioeconómico predomina la clase media-baja. Se escogió este tipo de muestra, ya que según el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública es en este nivel es donde se desarrolla el contenido de proporciones, contexto matemático para lograr los objetivos propuestos del estudio. Además, durante el proceso de invención de problemas se dividió el grupo original en 8 subgrupos, con el fin de realizar un trabajo en equipo y colaborativo.

Para recolectar la información relevante de este estudio se realizó la aplicación de observaciones participantes y se realizó un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos, realizados en las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. De ambas técnicas se obtuvo evidencias sobre las representaciones, estrategias y los errores generados por los estudiantes al construir y resolver problemas de modelización matemática con proporciones en actividades de aula.

### Descripción de la etapa de trabajo de campo

En primer lugar se analizó el programa vigente de matemática del Ministerio de Educación Pública, con el fin de observar el papel que tiene los procesos de traducción de representaciones y observar los conocimientos, habilidades e indicaciones que se proponen en este documento, específicamente en el tema de proporciones.

Las actividades de invención de problemas se diseñaron de acorde a los objetivos de esta investigación, tomando en cuenta la bibliografía consultada y fueron validadas a través de juicio de expertos. Para su construcción se utilizaron contextos sociales, culturales y de la propia realidad de los estudiantes participantes.

Durante la implementación de las actividades de invención de problemas, se iniciaron las observaciones participantes del grupo, las cuales fueron grabadas para facilitar el análisis posterior. También en los primeros minutos de cada una se les explicó el protocolo de trabajo, siendo de suma relevancia el observar si los estudiantes escribían sus pensamientos matemáticos en los informes.

### Análisis de los resultados

En esta parte se presentan los resultados de dos actividades de invención de problemas, para cada una, en primer lugar se muestra sobre las representaciones y en segundo lugar, las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver los problemas que inventaron.

**Actividad 1 de invención de problemas.** En esta actividad se presentan imágenes (representaciones icónicas) de dos productos con sus respectivos precios del Mercado, una botella de Té Frío de 2.5 litros con un precio de ₡1800 y un Queque de Chocolate con un precio de ₡6000 para 12 personas. Además, se le solicita al estudiante construir un problema donde se utilicen los dos artículos o uno de ellos, pero que también sirva para determinar el gasto que se podría generar si la cantidad de personas es mayor. Asimismo, los estudiantes deben resolver el problema y escribir todas las operaciones que se realizaran en su solución.

Dos de las respuestas obtenidas en esta actividad se muestran en la figura 1, en ella se aprecian producciones de dos grupos de estudiantes participantes, en las cuales se observa representaciones como las verbales cotidianas y simbólicas numéricas, tanto en el enunciado del problema como en su solución. Los 8 grupos participantes realizaron traducciones similares a las expuestas en la figura 1, por lo que el proceso de traducción de representaciones icónicas a representaciones verbales escritas y simbólicas numéricas fue el único que se realizó por parte de los estudiantes en esta actividad.

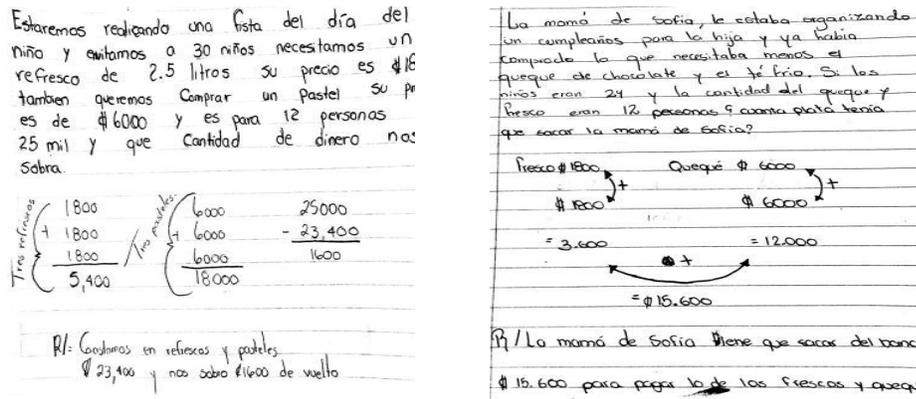


Figura 1. Las imágenes muestran las producciones de dos grupos, en las cuales se realizaron procesos de traducción de representación icónica a representaciones en lenguaje verbal escrito y simbólico numérico.

En esta actividad la única estrategia que se utilizó para resolver el problema construido por los estudiantes fue el uso de operaciones aritméticas, se observa que los estudiantes usaron los precios de los artículos varias veces, por ejemplo en la primera imagen de la figura 1 se puede visualizar que el contexto cotidiano utilizado fue una fiesta del día del niño para 30 niños, en su solución suman tres veces el precio del refresco y tres veces el precio del queque, no utilizan proporciones para resolver el problema. De igual manera, sucede en la segunda imagen de la figura 1.

**Actividad 2 de invención de problemas.** En esta actividad se les presentó a los estudiantes, en una representación tabular, los votos obtenidos de primera vuelta de las elecciones presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018, en ella se les brinda cantidades absolutas y relativas de las personas inscritas del padrón electoral, los votos válidos, los votos nulos y blancos; sin embargo en el abstencionismo no se brinda la cantidad absoluta, pero si la cantidad relativa (ver apéndice A). Además, se les propuso construir un problema en el que debían utilizar los datos brindados, además tenían que resolverlo y escribir todas operaciones utilizadas en su solución.

De esta actividad obtuvimos resultados como los que se muestran en la figura 2, en ella se presentan los procesos de traducción de las representaciones externas usados por dos grupos de estudiantes. Se encontró que 6 de los 8 grupos participantes generaron construcciones de problemas con representaciones de lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico. Pero 2 de los 8 grupos realizaron propuestas de problemas donde se involucraban representaciones con lenguaje icónico (gráfico), verbal escrito y simbólico numérico a la vez.

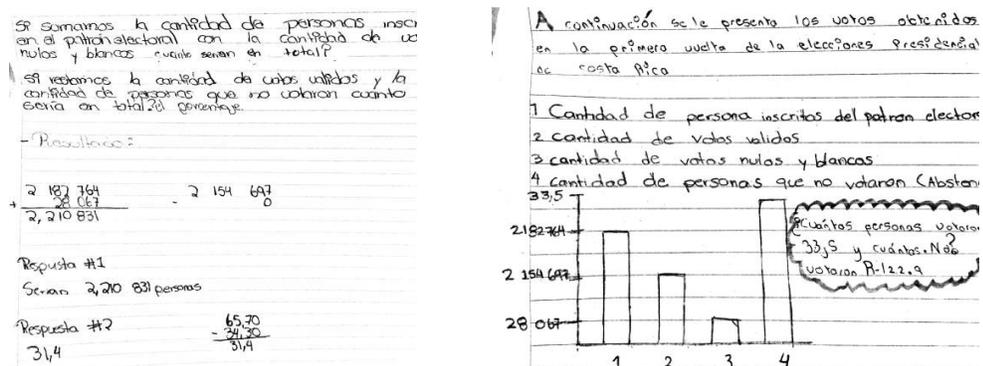


Figura 2. Las imágenes muestran las traducciones de representación tabular a lenguaje verbal escrito, lenguaje simbólico numérico y lenguaje icónico.

En esta actividad se produce una diferencia mínima con relación a las estrategias de la actividad 1, en la figura 2 se presenta dos de estas creaciones, en la primera imagen uno de los grupos siguió un camino donde utilizó operaciones aritméticas básicas tanto de cantidades absolutas como de cantidades relativas. En la segunda imagen se muestra la creación que realizaron dos de los ocho de los grupos participantes, donde se utiliza el lenguaje icónico (gráfico de barras) como estrategia para resolver este problema, cuya construcción es incorrecta (pues se produce un error al usar cantidades absolutas y relativas en el eje vertical del gráfico), no se muestra ninguna operación adicional.

Por otra parte, en ambas actividades observamos que los estudiantes no utilizaron los procesos de proporciones como la regla de tres, ni el uso de porcentajes, ni el uso de representaciones de simbología algebraica.

### Conclusiones

Entre los resultados de este estudio destacan la importancia de promover la invención de problemas desde la perspectiva de la modelización matemática, pues las actividades propuestas fueron excelentes oportunidades de la construcción de su conocimiento matemático, ya que al crear un problema los estudiantes pusieron en práctica habilidades como la creatividad y la indagación al mismo tiempo que visualizaban la integralidad y utilidad de la matemática.

Las situaciones construidas por los estudiantes durante el proceso de invención de problemas, contenían representaciones de los conceptos matemáticos en lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico en mayor preferencia, también se obtuvieron en menor cantidad propuestas de problemas con los mismos tipos de representación anterior pero con una variante de utilizar el tipo de representación con lenguaje icónico (gráfico); con lo cual se visualizó la

relación que tiene la representación con el significado personal del objeto matemático, desde las experiencias que el estudiante posee y construye en relación directa con él (Pecharromán, 2014).

Asimismo, al construir y resolver problemas por medio de las actividades de este estudio, los estudiantes no mostraron diversidad en los sistemas de representación utilizados, es decir no poseían una “fluidez representacional” y por lo tanto, no comprendían en forma significativa el objeto matemático involucrado en el estudio.

### Referencias y bibliografía

- Castro, E., y Castro, E. (2000). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 143–162.
- González, F., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA*, 10(4), 280-306.
- English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities [ El desarrollo de habilidades como plantear problemas en los niños de quinto grado]. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.
- Hansen, R., y Hana, G. M. (2015). Problem Posing from a Modelling Perspective [Planteamiento de problemas desde una perspectiva de modelado]. En F.M. Singer , N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* [ Planteamiento de problemas matemáticos: Desde la investigación hasta la práctica efectiva] (pp. 35–46). Cham: Springer International Publishing.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). Metodología de la Investigación (6ta ed). México: McGrall Hill.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving [Fundamentos de una perspectiva de modelos y modelos sobre la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la resolución de problemas]. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* [Más allá del constructivismo: Perspectivas sobre Modelos y Modelado en la Solución de Problemas Matemáticos, Aprendizaje y Enseñanza] (pp. 203-204). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.
- Lesh, R., y English, L. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectivs on mathematical learning and problem solving [Tendencias en la evolución de los modelos y perspectivas de modelado en el aprendizaje matemático y la resolución de problemas].

*Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 487-189. Recuperado de <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a5.pdf>

Martinez, A., Rivaya, F. J., Aguila, F., Cara, S., Navarro, J. A., Burgos, E.,... Torres, E. (1989). Bases psicopedagógicas. En A. Martinez y F. J. Rivaya (Eds.), *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental* (pp. 17-36). Madrid: Síntesis, S. A.

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 111-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Silver, E.A. (1994). On Mathematical Problem Posing [ Sobre la invención de problemas]. *For the Learning of Mathematics* [ Para el aprendizaje de las matemáticas]. 14 (1), p. 19-28.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata

### Apéndice A

#### Actividad 1 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan dos productos con sus respectivos precios del Mercado



**Precio: ₡1800**  
Cantidad 2.5 Litros para 12 personas



**Precio: ₡6000**  
Cantidad para 12 personas

Construye un problema en el cual se utilice los dos artículos o uno de ellos que se le brindaron anteriormente en las imágenes, pero además que sirva para determinar el gasto que se podría generar con los artículos propuestos, si la cantidad de personas es mayor. Resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.

#### Actividad 2 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan los Votos obtenidos en la primera vuelta de las Elecciones Presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018.

<b>Cantidad de personas inscritas del padrón electoral</b>	<b>2 182 764</b>	<b>100%</b>
<b>Cantidad de votos válidos</b>	<b>2 154 697</b>	<b>65,70 %</b>
<b>Cantidad de votos nulos y blancos</b>	<b>28 067</b>	
<b>Cantidad de personas que no votaron (Abstencionismo)</b>		<b>34,30 %</b>

Construye un problema en el cual se utilice los datos brindados en la tabla anterior. Además, resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.