XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

La tecnología digital como herramienta mediadora para la modelización e interpretación de problemas en contexto: el caso del plano inclinado y la cicloide invertida

Freddy Yesid Villamizar Araque
freddymatedu@gmail.com, fvillamizar@cinvestav.mx
Alfredo Martínez Uribe
alfymago@hotmail.com , amartínezu@cinvestav.mx
Carlos Armando Cuevas Vallejo
ccuevas@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México

Resumen

En el presente trabajo se plantea la modelización como una alternativa para resolver situaciones en contexto de las matemáticas y la física. Particularmente se propone el problema del rodamiento simultáneo de dos bolas, una sobre media cicloide invertida y otra sobre un plano inclinado y explorar las ideas previas acerca del tiempo, velocidad y energía presentes en dicho experimento, así como la habilidad matemática para la interpretación de gráficas, obtenidas en la modelización del fenómeno, mediada con la tecnología digital. En los resultados de la actividad aplicada a estudiantes de maestría en educación matemática, se encontró que, la tecnología digital bajo una secuencia didáctica apoya el trabajo experimental simplificando los procesos de modelización de un fenómeno físico, y promueve el uso de las representaciones para resolver una situación problema.

Palabras clave: modelización, plano inclinado, braquistócrona, cicloide, tecnologías digitales.

Introducción

Una de las maneras que Galileo utilizó para interpretar la caída libre fue simplificada mediante el uso de planos inclinados y el uso de las proporciones que surgieron de la regla del valor medio geometrizada por Oresme (Drake, 1975; Clavelin, 1996; Hawking, 2003; Feynman, 2008). Por otra parte, la cicloide fue considerada por los antiguos matemáticos como la Helena de la geometría por ser una de las curvas más bellas, pero esa belleza, no radica tanto en su apariencia sino en las propiedades que esta posee. El problema de la cicloide planteado por Johann Bernoulli fue el siguiente: si tenemos dos puntos fijos A y B (A está a mayor altura y B a menor) ¿cuál debe ser el camino por el que una bola metálica pulida, ruede en el menor tiempo? (Figura 1) (Boyer, 1986; Portal Académico CCH, 2008; Cosmos y Matemáticas, 2013).

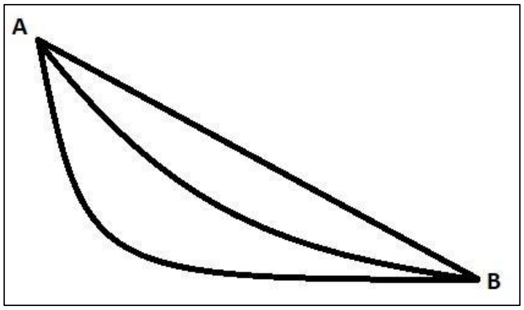

Figura 1. Ejemplos de trayectorias por la cual puede rodar una bola

Este tipo de situaciones por lo general inducen al estudiante a respuestas respecto del movimiento, situadas en las teorías aristotélicas o del ímpetu (McDermott, 1984; Saltiel y Viennot, 1985), ideas que por lo general no son acordes al conocimiento científico sino al sentido común, denominadas por algunos como *ideas previas* (Viennot, 1979). Por tal razón, nos cuestionamos lo siguiente:

- ¿Qué ideas previas manifiestan los estudiantes para interpretar la situación problema anterior sobre el rodamiento de una bola sobre un plano inclinado y otra sobre la cicloide invertida?
- ¿Cómo el uso de la tecnología digital permite al estudiante realizar procesos de modelización para interpretar una situación problema, modificando sus ideas previas?

Marco teórico

La situación problema descrita anteriormente, brinda un contexto para involucrar al estudiante dentro de una actividad donde se exploren las ideas previas sobre movimiento y posteriormente se promuevan cambios conceptuales. Las ideas previas son aquellos conocimientos que poseen los estudiantes, previos o posteriores a la enseñanza escolar, que por lo general, pueden ser erróneas, incompletas o que no concuerdan exactamente con el conocimientos científico además de ser persistentes (Viennot, 1979; Hierrezuelo y Montero, 2006). Al respecto McDermott (1984), Saltiel y Viennot (1985), afirman que muchas de las ideas que dan los estudiantes sobre el movimiento de un cuerpo (independiente del nivel académico), se pueden situar en las teorías aristotélicas o del ímpetu. Para efectos del presente trabajo, se recopilarán las ideas previas que poseen los estudiantes acerca de la caída de una pelota sobre un plano inclinado y media cicloide invertida (ver anexo 1 del apéndice A).

La situación planteada fue resuelta por Isaac Newton y su solución analítica dio origen al cálculo de variaciones (ver anexo 2). Una de las propiedades de esta curva (cicloide inverida) descrita en la solución de Newton se denomina *braquistócrona*, que proviene del griego *βραχιστοζ* (braquistos) que quiere decir, el más corto, y *χρονοζ* (cronos), tiempo; en otras palabras la braquistócrona se refiere a la curva de más corto tiempo. La solución analítica a dicha situación descrita en el anexo 2, requiere de conocimientos matemáticos más avanzados como el cálculo de variaciones, propuesto por Newton, sin embargo, consideramos que con la tecnología digital sirve como herramienta mediadora para la modelización sin tener que recurrir a la profundización de los cálculos.

La modelización o *modelling* es definida por Confrey y Maloney (2007, p. 60) como "El proceso de enfrentar una situación indeterminada, problematizarla, produciendo investigación, razonamiento, y estructuras matemáticas para transformar dicha situación". Esencialmente puede describirse como el proceso de llevar una situación del mundo real a un modelo matemático que la represente, teniendo en cuenta que este modelo representativo permita predecir e interpretar la situación ideal del mundo real, tal y como se muestra en la figura 2 .

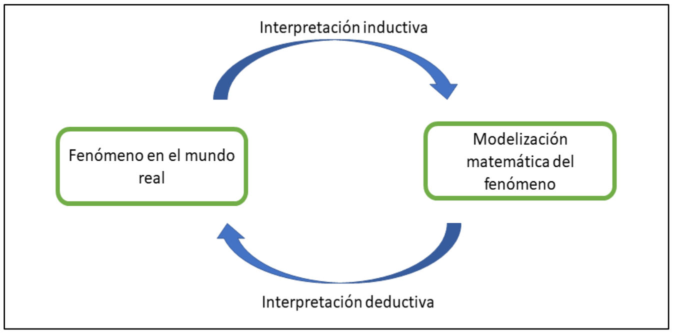

Figura 2. Modelo para la modelización matemática de las ciencias. (Lesh, 1997; Cirillo et al., 2016; Cuevas, Villamizar y Martínez 2017)

Por excelencia el modelo matemático de una situación física es algebraico; sin embargo, consideramos que, en el aprendizaje, los conceptos ya sean físicos o matemáticos presentes en un fenómeno físico, pueden manifestarse en diversas representaciones.

Para guiar la actividad en el proceso de modelización de la situación problema, utilizaremos el modelo Cuvima planteado por Cuevas, Villamizar y Martínez (2017), quienes incorporan de manera importante el uso de los dispositivos digitales (smartphone, Tablets o computadoras) como herramientas mediadoras en la experimentación de un fenómeno físico y la obtención de datos para su modelización. El modelo consta de cuatro marcos, los cuales aplicaremos para la situación planteada como se muestra en la Figura 3:

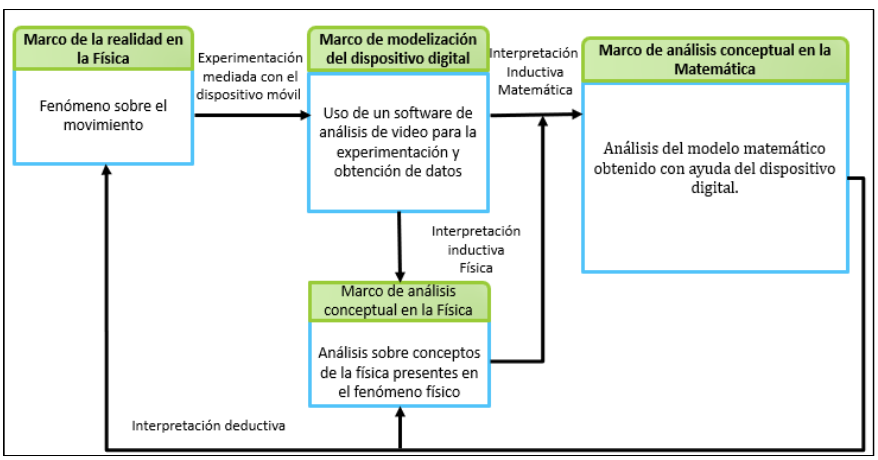

Figura 3. Adaptación del modelo Cuvima para la situación problema propuesta

- El primer marco (*Marco de la Realidad en la Física), parte de la situación problema acerca del fenómeno de movimiento de dos bolas al rodar libremente por dos superficies (plano inclinado y cicloide invertida).*
- El segundo marco (*Marco de modelización del Dispositivo Digital)*, está conectado al primero mediante un proceso de experimentación mediado con la tecnología digital. En este marco, el estudiante debe realizar el experimento apoyándose con recursos digitales para la obtención de datos del experimento. El dispositivo digital provee para la

modelización del fenómeno experimentado, datos ya sea mediante una imagen, registro tabular o alguna representación gráfica.

- El tercer marco (*Marco de Análisis Conceptual en la Física)* está conectado al tercero mediante el proceso de interpretación inductiva en la Física, el cual consiste en realizar un análisis (puede ser mediante la discusión grupal entre profesor y estudiantes) sobre los conceptos físicos implícitos en las representaciones dadas por el dispositivo digital sobre el experimento. En este caso se refiere a cómo se manifiesta la velocidad y sus cambios sobre el movimiento.
- En el cuarto marco (*Marco de Análisis Conceptual en la matemática),* se realiza mediante el proceso de interpretación inductiva en la matemática, es decir, en la obtención de un modelo matemático que represente el fenómeno. En este caso, la tecnología digital puede ayudar en la obtención de este modelo ya se mediante una expresión algebraica, una representación geométrica o gráfica. El modelo obtenido que representa el fenómeno físico en la realidad debe ser validado mediante la interpretación deductiva, es decir, usar el modelo para describir la realidad y conceptos en la física. En este caso, los estudiantes harán uso del modelo matemático para interpretar la situación problema referente a la propiedad de la curva cicloide invertida, denominada braquistócrona.

El modelo Cuvima permite guiar las actividades de modelización mediante el uso de las tecnologías digitales y hacer énfasis en los conceptos de la física y matemáticas presentes en el fenómeno experimentados, mediante los procesos de interpretación inductiva y deductiva el cual debe ser guiado en la actividad por el profesor.

Metodología

Como instrumento de medición se aplicará un test en distintos momentos y una actividad de modelización, a diez estudiantes de maestría de educación matemática, de la siguiente manera:

- Aplicación del test para recopilar ideas previas (anexo 1) en una sesión de media hora.
- Experimentación con la cicloide invertida, sin uso de la tecnología digital. Los estudiantes dejarán rodar dos bolas de las mismas características, sobre un plano inclinado y sobre la cicloide invertida, en una sesión de media hora.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación en una sesión de media hora.
- Experimentación de la situación problema mediada con el uso de la tecnología digital. En este caso harán uso de un software de análisis de video, en una sesión de hora y media.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación con la tecnología digital, en una sesión de una hora.

Los resultados se analizarán teniendo en cuenta qué cambios en los razonamientos de los estudiantes hay antes de la experimentación y posterior a ella con y sin uso de la tecnología digital.

Resultados

Resultados parciales sobre el pretest (antes de la experimentación)

Se observaron respuestas variadas. Para 4/10 estudiantes la pelota que rueda sobre la superficie curva o cicloide invertida llega primero al suelo y con mayor velocidad, porque la inclinación hace que acelere más. Luego 4/10, otro grupo de estudiantes consideraron que la pelota que llega primero y con mayor velocidad, es la que rueda por la superficie recta o plano inclinado porque recorre menor distancia que la superficie curva. Finalmente, 2/10 estudiantes consideraron que ambas bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, porque las velocidades a pesar de que cambian, se pueden compensar en algún momento o simplemente porque parten simultáneamente a una misma altura, y además, porque las bolas son iguales.

Resultados posteriores a la experimentación sin tecnología digital.

Los estudiantes modificaron las respuestas referidas a que las bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, y también los que respondieron que llegaba primero la bola sobre la superficie inclinada. Algunos explicaron que tenía que ver con que la superficie curva le “imprime” mayor velocidad a la bola, otros no daban argumentos.

Los resultados anteriores evidencian en algunos casos que los estudiantes manifiestan sus razonamientos con base en la forma de las trayectorias y en ningún caso utilizaron un razonamiento matemático para dar su explicación.

Resultados de las actividades con tecnología digital.

Los estudiantes realizaron la toma de un video sobre el experimento, el cual fue exportado a un software de análisis de video (*Tracker Physics*) para capturar los datos de posición, velocidad y aceleración del movimiento de cada bola a lo largo del tiempo. Los datos fueron llevados a una hoja de Cálculo en Geogebra (ver Figura 4).

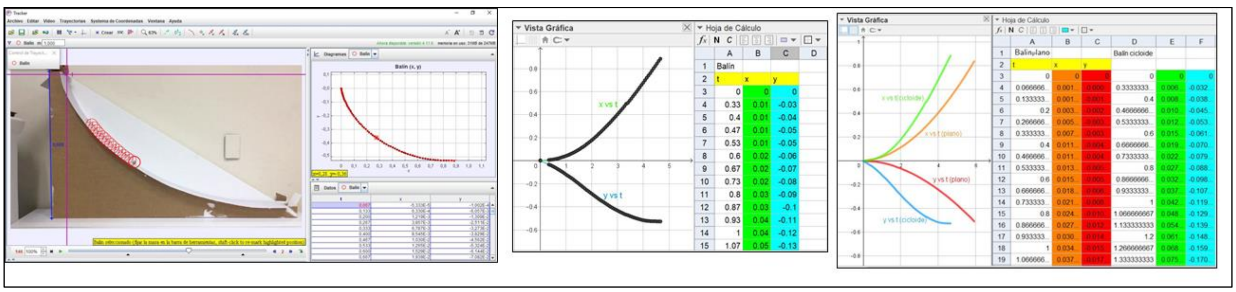

Figura 4. Modelización mediada por la tecnología digital y representaciones gráficas del movimiento de las bolas.

Los pasos de la modelización siguen los marcos del modelo Cuvima (Figura 3) y los resultados fueron discutidos al final de la actividad entre profesor y estudiantes.

Resultados posteriores a la experimentación con tecnología digital

Una vez que realizaron las actividades, se aplicó el test, observando que los estudiantes modificaron sus respuestas. Pese a que no hubo una respuesta basada en una solución analítica, los estudiantes hicieron uso de las representaciones (plano cartesiano, tabla de valores) para interpretar y dar una solución a la situación problema planteada. Se discutió acerca de la propiedad denominada braquistócrona en la cicloide invertida, a partir de las representaciones de velocidad y aceleración obtenidas mediante el uso de los dos paquetes de software.

Discusión de los resultados y conclusiones

La tecnología digital sirvió como una herramienta de apoyo en la experimentación como mediadora para la obtención de representaciones de un fenómeno físico y para la solución de una situación problema en el contexto de la física. Sin embargo, la interpretación de los conceptos tanto en la matemática y la física deben ser orientados mediante una secuencia didáctica implícita en la actividad.

El modelo Cuvima sirvió como modelo metodológico para que el profesor pudiera desarrollar el proceso de modelización, así como la organización de los recursos utilizados, es decir, proponer el momento adecuado para modelizar con la tecnología digital y posteriormente discutir e interpretar los resultados obtenidos. Las representaciones gráficas que surgen de la modelización del fenómeno experimentado, permitieron que los estudiantes modificaran sus ideas previas sobre el fenómeno físico.

Referencias y bibliografía

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos: Madrid.

Clavelin, M. (1996). La philosophie naturelle de Galilée. France: Albin Michel.

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 57-68). US: Springer.

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. In C. Hirsch & A. McDuffie (Eds.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (p.p. 3-16).

Cosmos y Matemáticas (2013). *La Cicloide: La Helena de la Geometría.* Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: https://matematicasycosmos.wordpress.com/2013/12/08/la-cicloide-la-helena-de-la-geometria/

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 129-150.

Drake, S. (1975). The role of music in Galileo´s experiments. Scientific American, 232 (6), 98-104

Feynman, R. (1964/2008). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Barcelona: Tusquets editores.

Hawking, S. W. (2003). A hombros de gigantes. Barcelona: Editorial Crítica.Portal Académico CCH (2008). *Curvas maravillosas. La braquistócrona.* Recuperado el 27 de septiembre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html.

Hierrezuelo, J., y Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química.* México: Fontamara.

McDermott, L.C. (1984). Research on conceptual understanding in mechanics. Physics Today, Julio, 24-34.

Portal Académico CCH (2008). Curvas maravillosas. La braquistócrona. Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html

Saltiel, E., y Viennot, L. (1985). ¿Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? (J. Carrascosa, traductor) Enseñanza de las Ciencias, 137-144.

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élemetaire.* París: Hermann.

Apéndice A
Anexo 1: situación problema planteada

Dos pelotas idénticas se deslizan libremente desde una misma altura. Una sobre un plano inclinado o rampa y la otra sobre una superficie curvilínea como se muestra en la Figura 5. Ambas superficies son lisas.

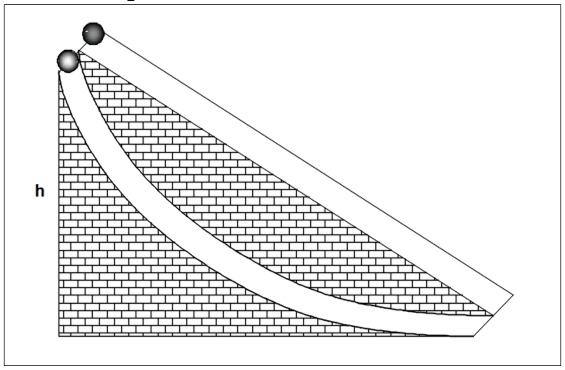

Figura 5. Plano inclinado vs cicloide invertida

1. ¿Qué pelota llegará primero al suelo? ______________________________

Explica tu respuesta:

____

____

____

2. ¿Qué sucede cuando las pelotas llegan al punto más bajo o a ras de suelo?:

a) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MAYOR que la de la pelota en la rampa.
b) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MENOR que la de la pelota en la rampa.
c) Las velocidades de cada pelota al llegar al suelo son IGUALES.
d) No sé

Explica tu respuesta. ¿Puedes proponer un razonamiento matemático?

Nota: se hará referencia a la magnitud de la velocidad neta.

Anexo 2: solución analítica de Newton sobre la cicloide invertida[1]

Si se toma un diferencial dS de la media cicloide invertida (ver Figura 6), se puede calcular su longitud de arco mediante la ec. 1:

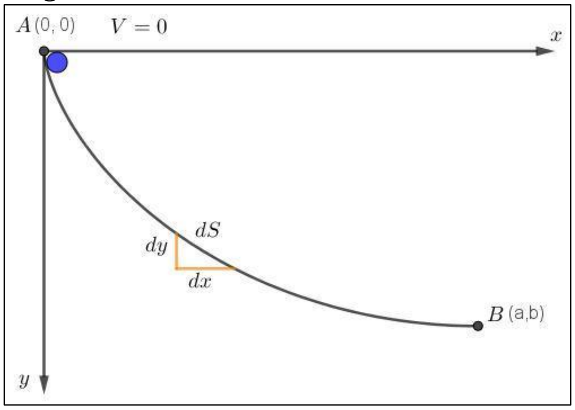

Figura 6. Media cicloide invertida con sus diferenciales

$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (ec. 1)

Sabiendo que la velocidad con la que rueda la bola es:

$V = \frac{dS}{dt}$ (ec. 2)

Obtenemos que:

$dt = \frac{dS}{v}$ (ec. 3)

Si utilizamos el teorema de la conservación de la energía mecánica, se obtiene que velocidad es:

$V = \sqrt{2gy}$ (ec. 4). De donde g es la aceleración de la gravedad.

De modo que al sustituir (1) y (4) en (3), se obtiene que:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\sqrt{2gy}}$$

$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{a=\pi R} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}}\, dx$ (ec. 5)

Resolviendo (5) (se omite todo el procedimiento) se llega a determinar que las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$\{x = R(\theta - Sen(\theta))\ y = -R(1 - Cos(\theta))$ $0 \leq \theta \leq \pi$ (ec. 6)

Si el ángulo que barre la rueda es $\theta = \pi$ entonces, el tiempo más corto, en que la bola tarda en llegar del punto A al B es:

$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (ec. 7)

[1] La solución mostrada está escrita en término actuales, y no es precisamente la notación utilizada por Newton.