XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo mediante una propuesta de aula para el grado tercero de educación básica

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Juan Sebastián **Cortés** Monroy
Universidad del Valle
Colombia
juan.sebastian.cortes@correounivalle.edu.co
Raúl Fernando **Mendoza** Yela
Universidad del Valle
Colombia
raul.mendoza@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los avances de una investigación en curso, cuyo propósito es caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica Colombiana en torno a los fraccionarios como relación parte-todo. Para ello, se diseña e implementa una propuesta de aula que toma como referente conceptual y metodológico el enfoque de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) y la propuesta de Ohlsson (1988) en torno al concepto matemático que se moviliza, y como referente curricular documentos de política pública nacional; en la cual se involucra el uso de artefactos (Radford, 2012) como el Tangram y las Regletas de Cuisenaire. El diseño que se propone parte de contextos reales favoreciendo la comparación cuantitativa de cantidades de magnitudes como el área, en el caso del uso del tangram, y de longitudes, en el caso del uso de las regletas.

Palabras clave: fraccionario, relación parte-todo, matematización, Educación Matemática Realista, artefacto.

1. Presentación del problema y justificación

La enseñanza y aprendizaje del número fraccionario ha sido y sigue siendo tema de debate y preocupación para la investigación en Educación Matemática. En efecto, distintos investigadores como Llinares y Sánchez (1997), Obando (2003), Freudenthal (1983), Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013), Rodríguez y Sarmiento (2002), Pontón (2008), entre otros, han puesto de manifiesto la diversidad de dificultades, obstáculos y errores que suelen presentarse en su aprendizaje pese al gran esfuerzo que los maestros colocan en su enseñanza. No obstante, y de acuerdo con Llinares y Sánchez (1997), los maestros, que suelen privilegiar la introducción de los fraccionarios en la escuela desde la "relación parte-todo", lo hacen con un énfasis, a veces exclusivo, en su representación simbólica y mediante un tratamiento inadecuado de las representaciones gráficas, que por lo general se reduce al conteo de partes sombreadas y no sombreadas, y a la asignación de etiquetas y roles para las partes de la fracción.

Desde esta perspectiva, Obando (2003) considera que dicha forma de presentar este concepto matemático conlleva a que, primero, se entienda la igualdad en la equipartición de la superficie de una figura bidimensional únicamente como congruencia entre las regiones en que se subdivide la figura, por lo que se termina concibiendo el número fraccionario como una etiqueta asignada a una región sombreada de una figura; segundo, se interprete el fraccionario $\frac{a}{b}$ como el acto de dividir la superficie de una figura bidimensional en b partes iguales y de estas tomar a partes, causando que los estudiantes conciban al fraccionario como dos números naturales que están separados por un vínculo (raya), sin relación alguna entre ellos.

En este sentido, Cortina et al. (2013) plantea que el uso inadecuado de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones, puede conducir a ciertas dificultades que impiden el desarrollo de concepciones maduras. En su investigación propone que la equipartición genera tres "imágenes", las cuales se constituyen en limitantes para la comprensión de los estudiantes, estas son: *la fracción como resultado de transformar un objeto*, donde a los educandos les resulta tentador asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto y tomar algunas partes de este, lo cual favorece únicamente las fracciones propias; *la fracción como tantos de tantos*, en esta "imagen" los estudiantes conciben la fracción como un subconjunto del conjunto que representa el todo, siendo el denominador la cantidad de elementos del conjunto y el numerador la cantidad de elementos que contiene el subconjunto de este conjunto, por lo que el numerador y el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo y no un solo número, el fraccionario; *la fracción como incluida en un entero*, esta "imagen" consiste en concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero, lo cual limita tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta (únicamente ≤ 1).

Como alternativa para evitar estas y otras problemáticas reportadas, Obando (2003) sugiere que una de las formas que se deberían privilegiar en el abordaje de este concepto matemático en el salón de clase, son los procesos de medición y comparación de cantidades de magnitudes, para que así, por ejemplo, la igualdad entre las regiones en que se subdivide una figura bidimensional por la equipartición se entienda como igualdad en cantidad de superficie, y de ahí, el fraccionario en su interpretación parte-todo se conciba como una relación cuantitativa entre magnitudes.

La propuesta de este autor se fortalece con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN) (2006), donde se propone que a finales de grado tercero de Educación Básica, los estudiante deben ser capaces de describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes, siendo el establecer relaciones cuantitativas entre medidas (magnitudes) la esencia de la relación parte-todo (Obando, 2003).

Ahora bien, Freudenthal (1983) ha indicado que buena parte de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los fraccionarios se deben a que éstos son poco estudiados a partir de situaciones de la vida real de los estudiantes. Así mismo, Streefland (1991) y Martínez, Da Valle, Bressan y Zolkower (2002), plantean que es necesario buscar una relación cercana entre la enseñanza de las matemáticas y los contextos de la vida real de los estudiantes, dado que estos despiertan su interés al poner en juego elementos de su sentido común y conocimientos de lo que saben acerca de cómo son las cosas en el ámbito extraescolar, permitiéndoles acceder a las actividades con cierta familiaridad y comprensión previa. Es así como Freudenthal (1983) y Goffree (2000), llaman la atención en que para la introducción de los fraccionarios desde la relación parte-todo en el aula es necesario diseñar situaciones problemáticas concretas en contextos reales para que el alumno pueda dar sus propios significados, así como crear modelos de una situación real que le permita investigar, apropiándose de dichos modelos para solucionar otros problemas, es decir, que se pueda *matematizar* la situación.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, en el trabajo que aquí se reporta, se adopta la postura de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) (en adelante, EMR) para diseñar una propuesta de aula, donde, a partir de los procesos de medición y comparación de magnitudes, como el área y longitud, favorecidos a través del uso del Tangram y las Regletas de Cuisenaire en contextos y situaciones reales, se favorezca una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo en un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica, y así poder caracterizar los procesos de matematización que logran el grupo de estudiantes focalizados al desarrollar la propuesta.

2. Marco de referencia conceptual

El planteamiento del marco conceptual toma en consideración el estudio de los referentes curricular y didáctico, a partir de los cuales se logran identificar elementos conceptuales de los números fraccionarios y estrategias metodológicas que permiten interpretar y organizar el estudio de las condiciones, restricciones y posibilidades que están involucradas en el diseño de una propuesta didáctica relativa a la enseñanza de los números fraccionarios en su interpretación como relación parte-todo desde un enfoque *realista* de la matemática. A continuación se exponen los elementos más sobresalientes de este marco.

2.1 Referente curricular

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (MEN, 1998) una visión global e integral del quehacer matemático debería considerar tres grandes aspectos que permitan organizar el currículo, a saber: los procesos generales, que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; los conocimientos básicos, que se relacionan con el desarrollo de los pensamientos numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medida, aleatorio y sistemas de datos, y variacional y sistemas algebraicos y analíticos; y el contexto, el cual se relaciona con tres escenarios como lo son el de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otras ciencias.

Tomando en consideración esta forma de estructurar el currículo, en este trabajo interesa para el diseño de la propuesta hacer énfasis en los procesos generales de razonamiento, comunicación y modelación. En cuanto a los conocimientos básicos, interesa favorecer los producidos por los pensamientos numérico y métrico con sus respectivos sistemas. Por último, referente a los contextos las situaciones se diseñan en ambientes cotidianos y matemáticos.

Ahora bien, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se considera que el paso del número natural al número fraccionario requiere la comprensión de las medidas en situaciones donde la unidad de medida no está contenida un número exacto veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Desde esta perspectiva se plantean distintos estándares que se deben lograr con los estudiantes para favorecer en ellos diferentes interpretaciones de los fraccionarios tales como razón, operador, parte-todo, entre otras. De esos estándares se consideran para el diseño de la propuesta de aula algunos de los sugeridos para finales de grado tercero, los cuales guardan coherencia con el énfasis conceptual puesto en la investigación y se relacionan con los pensamientos numérico y métrico, estos son: Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros); Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones; Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes; Comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles.

2.2 Referente didáctico

En este apartado se realiza una conceptualización didáctica, basada en elementos matemáticos, de los fraccionarios a partir de los planteamientos de Ohlsson (1988). Luego, se presenta el enfoque conceptual y metodológico de la EMR en términos de Freudenthal (1973, 1991). Por último, se exhibe el rol cognitivo, epistemológico y ontológico que tienen los artefactos en la actividad matemática (Radford, 2012).

2.2.1 El concepto de número racional. Ohlsson (1988) plantea la teoría de los constructos matemáticos, donde estos se entienden como entidades conceptuales (en este caso matemáticas) que están compuestas no sólo de un significado matemático (definiciones, axiomas y teoremas), sino también de un significado aplicacional, lo que incluye todas aquellas situaciones problema y registros simbólicos que estén relacionados con la teoría. Bajo esta perspectiva, propone cuatro subconstructos para el constructo de número fraccionario, a saber: función cociente, número racional, vectores binarios y función compuesta. En el segundo de estos se ubica la relación parte-todo como uno de sus significados aplicacionales. Según este autor la relación parte-todo presenta tres interpretaciones:

i. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes cada una de las cuales mide $\frac{1}{m}$ de la unidad correspondiente.
ii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes iguales (iguales en cuanto a la magnitud en que se parten o comparan) de las m partes en que se ha dividido la unidad.
iii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa la razón de la cantidad n a la cantidad m.

En la propuesta que se diseña en la investigación se favorecen las dos primeras interpretaciones, puesto que la tercera de ellas está más cercana al concepto de razón.

2.2.2 La educación matemática realista. Este enfoque conceptual y metodológico, propuesto inicialmente por Freudenthal (1991, 1983), toma como base la concepción de que la matemática es una actividad humana que consiste en matematizar, esto es, organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma, por lo que insiste en la necesidad de proponer a los estudiantes actividades de organización de situaciones problemáticas genuinas que dan lugar a procesos de matematización, siendo *la fenomenología didáctica* una potente ayuda para lograrlo. La EMR se compone a partir de seis principios, los cuales son:

Principio de actividad. El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos, porque la matemática debe ser para todos.

Principio de realidad. Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, es decir, en situaciones problemáticas que son reales en la mente de los educandos.

Principio de interacción. La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, donde la interacción entre los participantes puede provocar que cada uno reflexione con base en lo que aportan los demás, y así, lograr alcanzar niveles más altos de comprensión.

Principio de reinvención. La enseñanza debe tomar la forma de reinvención guiada, es decir, que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente.

Principio de niveles. El aprendizaje es un proceso discontinuo que involucra distintos niveles de comprensión (matematización horizontal y vertical), y es a partir de los diferentes contextos, situaciones y modelos que se favorece el cambio de nivel. Estos niveles son:

- **Situacional:** Comprensión en el contexto de la situación.
- **Referencial:** Esquematización a través de los *modelos de*, descripciones, entre otros.
- **General:** Exploración, reflexión, generalización y formulación de *modelos para*.
- **Formal:** Procedimientos estandarizados y manejo de la notación convencional.

Principio de interconexión. Los contenidos matemáticos no deben ser tratados de manera aislada. Por tanto, se requiere de situaciones problemáticas incluyan contenidos matemáticos interrelacionados, pues así, los estudiantes podrán acceder a diversos modos de matematización.

Así, los principios que caracterizan la EMR se constituyen en el eje fundamental no solo para la elaboración de la propuesta (principio de actividad, principio de realidad y principio de interconexión) sino también su implementación (principio de interacción y principio de reinvención) y análisis de las producciones de los estudiantes (principio de niveles).

2.2.3 El uso de artefactos en la actividad matemática. Según Radford (2012), los artefactos son entendidos como recursos que desempeñan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dado que ofrecen nuevas posibilidades para pensar y aprender, contribuyendo así a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, reconoce que para obtener estos beneficios es necesario estudiar los roles cognitivo, epistémicos y ontológico de ellos en la actividad matemática.

De acuerdo con esta perspectiva, en el diseño de la propuesta de aula que en esta investigación se desarrolla, se asumen el Tangram y las Regletas de Cuisenaire como artefactos cuyos roles se presentan de la siguiente manera: En cuanto al rol cognitivo, estos artefactos no son sólo mediadores o facilitadores de la adquisición de conocimiento sobre los fraccionarios como relación parte-todo, sino que se vuelven parte de la manera en que se llega a pensar sobre estos y a conocerlos, desde esta perspectiva, la presencia de estos dos artefactos modifica cognitivamente la forma como se acercan los estudiantes a los fraccionarios. Referente al rol epistemológico, la inserción de estos artefactos permite concebir el fraccionario como un concepto matemático que no sólo tiene significado en el contexto abstracto de las matemáticas, sino que colabora en la construcción de este concepto, cuyo significado se genera por medio del razonamiento producido por la manipulación de estos artefactos. Además, estos artefactos incorporan formas particulares de comunicación, permitiendo complementar el conocimiento mediante la interacción con otros estudiantes o el mismo profesor (actividad conjunta). Por último, en el rol ontológico estos artefactos se consideran no como un medio para acceder a objetos matemáticos y formas matemáticas de razonamiento, dado que estos no se conciben como entidades trascendentales, estáticas o inmutables, sino como parte de la actividad matemática (como práctica material) de un grupo de estudiantes de grado tercero.

3. Diseño metodológico de la investigación

Para el desarrollo de la presente investigación se asume la metodología cualitativa de corte descriptiva e interpretativa (Monje, 2011), puesto que en este trabajo se busca, a través de la recopilación de información, datos y reflexiones que dejan los estudiantes al interactuar con las actividades propuestas, dar respuesta al objetivo trazado en el estudio. Para lograr esto, primero se ha delimitado el campo de estudio en términos de: ubicar una problemática, adoptar un marco de referencia conceptual, definir el tipo de estudio a realizar (metodología) y configurar el diseño de la propuesta de aula. Luego, llega el momento de la implementación de la propuesta de aula con un grupo de estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria, donde se obtiene información mediante registros fílmicos y hojas de trabajo donde se expresen las producciones escritas de los estudiantes, para, posteriormente, simplificar la recolecta de datos a partir de la creación de categorías de respuestas afines, lo que permite manejar de mejor manera el corpus de datos recolectado. Por último, se procesa la información recogida de la implementación contrastándola con los fundamentos conceptuales adoptados, para presentar las conclusiones y reflexiones en torno al objetivo trazado en el estudio.

Ahora bien, la propuesta de aula que en este trabajo se realiza está configurada por dos situaciones, la primera vinculada al uso del Tangram y la segunda al uso de las Regletas. A continuación se hace una descripción de la primera de estas, resaltando especialmente los elementos del marco conceptual que en ella se movilizan.

La situación denominada *Fraccionando el Cuadro de Colores* está compuesta por cuatro actividades, cada una de las cuales corresponden a los cuatro niveles de comprensión (matematización horizontal y matematización vertical) descritos en la EMR. En ella se recrea el caso de una profesora de artística que desea colorear un cuadro de vidrio con forma cuadrada para obsequiar, pero éste se le ha caído al suelo partiéndose en siete fragmentos con forma poligonal, coincidiendo con la forma de cada una de las siete fichas del Tangram. Pese a lo sucedido, la profesora decide aprovechar las partes que resultaron para decorarlas con pintura y que de esta forma el regalo no se pierda. A partir de eso se les solicita a los estudiantes desarrollar las actividades. Tal y como se aprecia, la situación se instaura en un contexto de la vida diaria (MEN, 1998), real en el sentido propuesto por Freudenthal (1983), y plantea el uso del Tangram para, mediante un trabajo grupal entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, se aborde, como se verá en adelante, la comparación de las superficies de sus fichas, esto es, para trabajar sobre una magnitud continua. De este modo, se parte del estudio de una situación para que en su matematización propicie el acercamiento a algunos fraccionarios, dando cuenta así de los principios de actividad, realidad e interconexión.

Actividad 1. En esta actividad se les solicita a los estudiantes recortar las piezas que resultaron al quebrarse el cuadro a partir de una cartulina blanca entregada que de antemano tiene marcadas con líneas punteadas dichas piezas, resultando así las siete fichas del Tangram. A partir de la manipulación y visualización de éstas, se propone a los estudiantes analizar qué tipo de forma tienen las figuras (cuadrada, triangular, etc.) y si poseen o no la misma cantidad de superficie. Con esto se promueve el pasaje de un contexto cotidiano a un contexto matemático, dando cuenta del *nivel situacional* (matematización horizontal).

Actividad 2. En esta actividad, se remplaza el Tangram hecho por los estudiantes en papel por uno de madera, cuyas fichas están etiquetadas con una letra y pintadas de colores distintos. A partir de la manipulación con el artefacto, se proponen una serie de preguntas en las que se deben realizar comparaciones, en cuanto a cantidad de superficie, entre las siete figuras del Tangram y el cuadro completo (la unidad). Dicha comparación (medida relativa entre áreas) se puede expresar como la cantidad de veces que cabe la superficie de una figura en la superficie de otra, favoreciendo las comparaciones que dan a lugar a expresiones como: cabe dos veces, está cuatro veces, entre otras, para ir avanzando hacia la construcción de expresiones como “ser la mitad de” o “ser la cuarta parte de” asociadas a las primeras, respectivamente. Así por ejemplo, si la superficie del cuadrado (llamado F) cabe exactamente dos veces sobre la superficie de uno de los triángulos con mayor superficie (llamado A), se genera en el estudiante la idea que la superficie de F es la mitad de la superficie de A. De esta forma, hace presencia el nivel referencial (matematización vertical), por cuanto se describen relaciones matemáticas a través de “modelos de” una situación particular y se inicia así la aproximación a la segunda interpretación (ii), arriba señalada, de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988).

Actividad 3. Se propone aquí a los estudiantes la reflexión sobre las expresiones, procedimientos, estrategias y modelos hasta aquí utilizados, para que así logren detectar la existencia de aspectos generalizables de los mismos, permitiéndoles deducir que los modelos construidos no sólo son para una situación en particular, dando a lugar a los “modelos para” la resolución de las mismas. En este sentido, se quiere que la relación cuantitativa de ser un medio de, un cuarto de, etc., no se conciba como exclusiva de la comparación entre dos triángulos del Tangram, más aún, en el contexto propio de la comparación de superficies, sino que se logre generalizar a otros contextos y situaciones. Es así como se promueve en los estudiantes el nivel general (matematización vertical) y se continúa movilizando la segunda interpretación (ii).

Actividad 4. Con esta última actividad se desea, por un lado, que los estudiantes pasen de expresiones en lenguaje natural (“ser un octavo de”) al lenguaje simbólico ($\frac{1}{8}$), es decir, que puedan reconocer la existencia del número fraccionario como el símbolo que expresa las relaciones cuantitativas dispuestas a lo largo de la situación; y por otro, que se construya la idea del fraccionario n/m como las n partes que miden $1/m$ de la unidad. De esta manera, se propicia el nivel formal (matematización vertical) y la primera interpretación (i) de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988) en torno a la relación parte-todo de los fraccionarios.

Es pertinente señalar que el manejo del Tangram presenta limitaciones en cuanto al aprendizaje de los fraccionarios, debido a que éste sólo permite el abordaje de algunos de ellos ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$) (Rodríguez y Sarmiento, 2002). Es por ello que se propone abordar una segunda situación vinculada al uso de las Regletas, que propicie el estudio de otros fraccionarios como $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, entre otros, y mediante el estudio de otra magnitud como lo es la longitud.

Referencias

Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25* (2), 7-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht.

Goffree, F. (2000). "Principios y paradigmas de una 'educación matemática realista'", Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional, Barcelona, Graó, vol. 9, pp. 151-167.

Llinares, S., y Sánchez, M. (1997). *Fracciones: La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis S.A.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A. y Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma, 22*(1), 59-94.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Monje, C. (2011). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa Guía Didáctica*. Recuperado de *https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf*

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA. 8*(2), 28-41.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 282 – 288). New York: Springer.

Rodríguez, C. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista EMA, 7*(1), p. 84-100.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer. Dordrecht. The Netherlands.

Vasco, C. (1994). El archipiélago fraccionario. En A. C. Castiblanco (Ed.), Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (Vol. 2, pp. 23-45). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.