



Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores

Cristina **Esteley**

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina

esteley@famaf.unc.edu.ar

María Florencia **Cruz**

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina

ma.florenciacruz@gmail.com

Sara **Scaglia**

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina

sbscaglia@gmail.com

Resumen

La discusión sobre las actividades matemáticas que deben poner en juego estudiantes en los diferentes niveles del sistema educativo y, en lo que atañe a la validación, se encuentra vigente en el campo de la educación matemática y resulta relevante para la formación de profesores. Este trabajo, que forma parte de una investigación más amplia, presenta un estudio de producciones escritas de futuros profesores en matemática en las que expresan sus ideas respecto a las actividades que caracterizan el quehacer matemático y en particular a la validación. El estudio se realiza apelando a una metodología de corte cualitativa. En el mismo, intervienen futuros profesores, del Profesorado en Matemática de una Universidad Nacional de Argentina.

El análisis realizado evidencia un reconocimiento por parte de los estudiantes a prácticas de validación ligadas principalmente a la demostración formal y esta última como actividad principal y fundamental del trabajo matemático.

Palabras clave: Quehacer Matemático, Validación, Futuros Profesores.

Introducción

Este trabajo presenta resultados preliminares de una investigación amplia realizada en el marco de una tesis de doctorado que se vincula con las atribuciones de sentido, por parte de futuros profesores en matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), sobre los procesos de validación matemática, cuando estos sujetos se involucran en un contexto de trabajo matemático-geométrico mediado por actividades de modelización matemática (MM) de naturaleza intra-matemática y el uso de tecnologías. Si bien el foco central es la atribución de sentidos en relación con los procesos de validación matemática, necesariamente con la tesis y con esta comunicación, emergen tres temáticas sustanciales para la educación matemática: 1) la

formación de profesores, 2) el trabajo con MM y 3) el uso de tecnología en clases de matemática. Sus relevancias se hacen evidentes en los trabajos de dos Survey Teams presentados en el marco del ICME13. Uno de ellos focalizado en la formación de profesores y otro en la educación geométrica y uso de tecnologías. De manera similar se pueden destacar los Topic Study Groups (TSG) tales como el TSG21 vinculado a MM y el TSG48 interesado en el desarrollo profesional de futuros docentes de matemática (Kaiser, 2017). Un ejemplo de producción que da cuenta del avance y preocupación sobre la interacción entre estas tres temáticas es el texto editado por Stillman, Blum y Kaiser (2017). En el mismo se recopilan los principales trabajos presentados en la 17 Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA17) y se hace evidente el deseo por buscar mayores conexiones entre los trabajos sobre MM y otras producciones propias del campo de la Educación Matemática ampliando las fronteras del ICTMA. Como se pone en evidencia más adelante en este escrito, ciertos capítulos de tal texto avanzan sobre validación al trabajar con profesores cuando los mismos se involucran con actividades de MM fundamentalmente de fenómenos extra-matemático, sin embargo, no hay artículos que den cuenta de validación en contextos de MM al trabajar con fenómenos intra-matemáticos.

En el ámbito local existen avances en el trabajo con MM de fenómenos extra-matemáticos y futuros profesores o profesores en servicio. Entre otros, los trabajos presentados en Esteley (2014) y en Villarreal, Esteley y Smith (2018). En todos ellos se discute acerca de algunos procesos de validación seguidos por futuros profesores. Sin embargo, en Villarreal et al. (2018) se marca como una necesidad profundizar acerca de lo que acontece con futuros profesores de universidades argentinas, cuando deben validar los modelos construidos para dar cuenta de fenómenos extra o intra-matemáticos. En este marco, los resultados de la tesis y este estudio podrían ofrecer aportes al desarrollo local, ampliar las fronteras de lo ya hecho para luego contrastar con producciones del ámbito internacional.

Discusiones en torno a la validación en el ámbito del trabajo matemático se hacen presentes y resultan relevantes en el contexto internacional de educación matemática (Reid y Knipping, 2010; Hanna y De Villiers, 2012; Stylianides y Harel, 2018). En Argentina documentos curriculares oficiales para escuelas secundarias y para formación docente expresan la necesidad de que los estudiantes en diferentes instancias de formación experimenten escenarios educativos en los que se propicien validaciones avanzando desde empíricas a otras con mayor grado de formalidad (Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe, 2014; Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática, 2012).

Se señala también que las actividades que se proponen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, entre ellas actividades de validación, deben estar influenciadas por rasgos característicos del quehacer matemático. Al respecto Brousseau (1986) afirma “El trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable a esta actividad científica” (p.6). Un modo de pensar la matemática como actividad científica, es apelando a la noción de la matemática como ciencia de los modelos.

En el marco de las ideas previas y atendiendo a lo explicitado en el currículo local de matemática para escuelas secundarias, se señala como desafío para la formación docente la reflexión, análisis y puesta en juego de actividades que caracterizan al quehacer matemático, incluyendo el proceso de validación. A partir de tales consideraciones, se lleva a cabo la tesis que enmarca el presente trabajo, en el que se estudia la producción escrita de futuros profesores

cuando dan cuenta de sus ideas respecto a la validación y a las actividades que caracterizan a la ciencia matemática. En particular se busca dar respuestas a las preguntas: a) ¿Qué actividades reconocen estos futuros profesores como propias de la matemática o del quehacer matemático? y b) ¿Qué entienden por procesos de validación en instancias de trabajo matemático?

Marco Teórico

Si bien en el marco de la tesis se parte de pensar la matemática como ciencia de los modelos y, en ese sentido, las actividades matemáticas consideradas relevantes para la investigación son aquellas relativas al proceso de MM y en ese ámbito el proceso de validación, para este trabajo se decide tomar aportes más generales. Esta decisión se toma porque el presente estudio se focaliza en instancias iniciales de la tesis y, según datos ya recogidos se reconocen historias de formación de los sujetos con los que se trabaja (Cruz, Esteley, Scaglia, 2018) muy alejadas del trabajo con MM. En ese sentido, se amplían las fronteras del trabajo con MM, tomando aportes de autores tales como Bishop (2001), reconocido por sus aportes en el ámbito internacional, e Itzcovich (2007), con reconocimiento local, para dar cuenta de actividades vinculadas con el quehacer matemático. Se apela a producciones de Balacheff (2000) o Reid y Knipping (2010) para caracterizar procesos de validación. Se toman aportes de Doerr, Ärlebäck y Misfeldt (2017) y Saeki, Kaneko y Saito (2017) para avanzar sobre ideas relativas a validación en procesos de MM.

Actividades que caracterizan al quehacer matemático

Bishop (2001) considera la matemática como producto cultural y describe actividades que propician la producción matemática en diferentes culturas, reconociendo su potencial para el desarrollo de la comprensión matemática. Por la naturaleza del propósito y alcance de esta comunicación, interesa destacar la de explicar. Para el autor, explicar posibilita la conexión entre fenómenos y la teoría que los fundamenta, eleva la cognición humana más allá de la experiencia directa, permite que los demás y el propio sujeto comprendan el por qué del fenómeno que sucede. De esta actividad surgen reglas lógicas, pruebas, gráficos, ecuaciones, etc.

Itzcovich (2007) discute el sentido y las características que se otorgan al trabajo matemático escolar. Señala que la actividad matemática reconocida por los sujetos se encuentra influenciada por sus experiencias con procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, determina actividades matemáticas que deben realizar los alumnos para involucrarse tales como: resolver problemas, explorar y representar, elaborar conjeturas, validar conjeturas, determinar dominio de validez y generalizar y modelizar.

Itzcovich (2007) afirma que en la resolución de problemas se movilizan conocimientos disponibles que no son suficientes para dar una respuesta, por lo que se producen conocimientos. En este sentido destaca la importancia de los procesos de representación y la puesta en juego de exploraciones. Particularmente en instancias de producción de conocimientos respecto a una problemática refiere a modelizar y organiza dicha actividad en etapas: recorte de la problemática en juego, identificación y establecimiento de relaciones entre variables y transformación de las relaciones en función de la matemática. El autor señala que en instancias de trabajo matemático se conjetura, es decir se establecen afirmaciones de las que se tiene cierto margen de certeza, aunque no se pueda asegurar que realmente es así. Luego de la formulación de una conjetura se lleva a cabo la validación, en la que se emplean argumentos matemáticos para fundamentar los resultados obtenidos.

Validación en el ámbito del trabajo matemático

Los términos que se utilizan para referenciar la validación de una aseveración se emplean de diferentes modos en la vida cotidiana, las matemáticas y la educación matemática. Este hecho puede producir confusión y particularmente ser un obstáculo para futuras investigaciones en el ámbito de la educación matemática (Balacheff, 2002/2004; Reid, 2005, citados en Reid y Knipping, 2010). Balacheff (2000) hace referencia a la expresión “procesos de validación” cuando estudiantes se involucran en el trabajo matemático del siguiente modo:

En este estudio utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). (p.13)

Reid y Knipping (2010) y Balacheff (2000) consideran la prueba como un modo particular de validación empleado comúnmente en el aula de matemática de distintos niveles. En particular, los primeros señalan que estudiantes de matemática moderna pueden considerar que el avance de esta ciencia se logra por la acumulación de conocimiento, debido a la fuerte influencia de las características y formas de “prueba” que se muestran en diversos textos desde la época de Euclides. Los autores destacan que el número de pruebas que cumplen con la definición formalista planteada por Aristóteles no son muchas, lo cual puede ser una fuente de confusión cuando se afirma que los estudiantes de matemática deben comprender y realizar pruebas formales. En este sentido, Balacheff (2000) distingue entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Las primeras son prácticas y recurren a la acción real, a la experiencia o a la ostensión y las segundas se apoyan en la formulación de propiedades y relaciones que se ponen en juego por lo que se alejan de la acción real.

Respecto a la validación en el marco del proceso de MM, cabe destacar que Doerr et al. (2017) al discutir acerca del empleo de ciclos de modelados, señalan la importancia de que las actividades de modelado que enfrentan estudiantes excedan la creación de modelos descriptivos que se validan por comparación de datos empíricos, con el fin de avanzar hacia actividades que incluyan explicaciones, implicaciones varias y el uso de medios computacionales. En esta línea Saeki et al. (2017) realizan una investigación en la que se fomenta el pensamiento crítico de estudiantes que validan modelos empleando hechos históricos y religiosos potenciando la toma de decisiones en el marco extra-matemático.

Metodología de la investigación y procedimientos seguidos

Para dar cuenta de los objetivos generales de la investigación que enmarca este estudio y con el fin de responder las preguntas formuladas en este trabajo, se opta por una investigación cualitativa, de corte interpretativo. Algunos de los procedimientos metodológicos empleados son compatibles con ciertos rasgos característicos de la investigación de diseño (Confrey, 2006).

La investigación se lleva a cabo con 17 futuros profesores que cursan Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el primer semestre de 2018. El programa de formación tiene una duración de 5 años y se organiza con asignaturas de matemáticas específicas (61% sobre el total de materias), asignaturas de educación general (13%; ej. psicología de la educación), asignaturas de educación matemática (8%) y asignaturas de formación general (18%; ej. inglés). La asignatura GEE se

dicta durante el primer semestre del tercer año del profesorado. Los estudiantes del mismo no han transitado aún por asignaturas de educación matemática y no han experimentado escenarios educativos en los que se emplea la MM como abordaje pedagógico. Se asume que en su recorrido por la carrera han tenido amplias oportunidades para interactuar con diversas actividades propias del quehacer matemático y con diferentes modos de validación en este ámbito.

En el marco de la tesis, se diseña una propuesta de enseñanza en la que se trabaja el tema “poliedros” en un escenario de modelización en la que intervienen todos los alumnos inscriptos en el curso. La propuesta completa se desarrolló en seis encuentros de 3 hs reloj cada uno durante las tres primeras semanas de cursado. Las clases estuvieron a cargo de las docentes encargadas del curso. La puesta en aula de la primera clase tiene dos instancias principales. En la primera las docentes realizan una descripción de los modos de trabajo que se emplean en la materia, su organización y algunas consideraciones respecto al empleo del método axiomático deductivo en el dominio del trabajo geométrico. En la segunda los estudiantes responden la siguiente consigna de trabajo:

Tabla 1

Consigna presentada a los estudiantes (Notas de campo).

Consigna 1: Lean en grupos de cuatro estudiantes los siguientes interrogantes y discutan posibles respuestas a los mismos. Luego realicen una narración en la que recuperen las respuestas de todos los integrantes del grupo (explicitando los acuerdos y desacuerdos que hayan surgido durante las discusiones):

- 1- ¿Cuáles son las actividades que lleva a cabo una persona que hace Matemática?
- 2- ¿Qué entienden por “proceso de validación” en instancias del trabajo matemático?

Con estas preguntas, previas al trabajo con MM, se buscaba que los estudiantes pusieran en evidencia respuestas formuladas a partir de sus experiencias matemáticas anteriores a la inmersión en el escenario de MM¹ y en el trabajo de validación que lo acompaña. En esa primera clase se encuentran presentes 15 estudiantes organizados en tres grupos de cuatro integrantes y un grupo de tres. Durante esta instancia se registra la información en audio, video y registros de *Word* donde realizan las narraciones objeto u unidad textual de análisis. Con el análisis se busca identificar las actividades matemáticas con que cada grupo da sentido al quehacer matemático y los modos en que dan cuenta de la validación. Con ese fin, se realizan lecturas cuidadosas de las narraciones vinculadas con la Consigna 1 y se identifican términos o frases relevantes utilizadas por cada grupo. Los grupos se identifican como G1, G2, G3 y G4. Los extractos textuales de los estudiantes se presentan en letra cursiva y son incluidos como evidencia de las interpretaciones realizadas. Se señala que este trabajo permite reconocer, previo a la entrada al escenario de MM, las primeras ideas de los estudiantes para luego poder contrastar con las ideas que se irán configurando en instancia del trabajo con MM.

Resultados: Análisis de las producciones de los estudiantes

El quehacer matemático

La primera aproximación al hacer matemática del G1 se vincula principalmente con resolver ejercicios intra y extra-matemáticos. Los integrantes explicitan la necesidad de

¹ En el escenario de MM puesto en aula se invita a la reflexión acerca del proceso de MM vivido por ellos, y se hace hincapié en los procesos de modelización y validación.

comprender los conocimientos anteriores (planteado por autores) y poder en base a eso, hacer nuestro camino, es decir, explorar, cometer errores que nos permitan llegar a verdades ya existentes o nuevas. Se considera que con “ejercicios” refieren a dar respuestas a situaciones dadas por otros empleando el lenguaje matemático. Respecto a lo planteado por Itzcovich (2007) se relaciona esta consideración con la resolución de problemas. Se evidencia también la vivencia de experiencias en las que la actividad matemática se vincula con la comprensión de producciones de matemáticos, y luego de lo anterior la experiencia con un tipo de trabajo más constructivo, como ser, resolver problemas, explorar y representar (Itzcovich, 2007).

El G2 en un primer momento expresa que las actividades que se realizan al hacer matemática son *razonar, deducir, demostrar, resolver, relacionar, crear hipótesis, mediante el empleo de todas las herramientas como ser software, material bibliográfico, entre otros.* En este fragmento se aprecia una actividad vinculada a la de explicación (Bishop, 2001). También se hace evidente la validación en ámbito de trabajo matemático, mientras que, al indicar resolver, relacionar y crear hipótesis se establece relación con resolver problemas y conjeturar (Itzcovich, 2007). Emerge así el razonamiento en el sentido de Balacheff (2000). Luego afirma que al hacer matemática se enseñan y transmiten conocimientos matemáticos, que se vincula con ideas próximas a la reproducción de ideas, conceptos y nociones matemáticas más que a la producción propiamente dicha.

El G3 destaca en primer lugar la búsqueda, selección y análisis de material bibliográfico, nuevamente se pone en escena la necesidad de interpretar y trabajar en torno a conocimientos disponibles en fuentes que se consideran legitimadas y no se aprecia referencia a la construcción personal de otras nociones. Luego plantea que al hacer matemática se realizan las siguientes actividades: *razonar, deducir, investigar, conjeturar, establecer relaciones, buscar contraejemplos, demostrar, entre otras.* La idea de matemática se encuentra principalmente vinculada a la explicación (Bishop, 2001) y a la elaboración y validación de conjeturas (Itzcovich, 2007). Finalmente destaca que las actividades que se realizan dependen del rol que ocupa la persona, sin embargo, no realiza mayores consideraciones al respecto.

Los estudiantes del G4 afirman: *Para nosotras una persona que hace matemática realiza las siguientes actividades: en primer lugar elige un tema que le interese, luego se aboca a la investigación de dicho tema y su aplicación en diferentes ámbitos. Luego elabora un esquema con las ideas más relevantes recaudadas de la investigación, para luego proponer (crear) nuevos conceptos (definiciones, propiedades, teoremas, axiomas, etc.).* Se destaca que los estudiantes consideran la posibilidad de creación de la matemática y sus ideas se relacionan con la MM en términos de Itzcovich (2007).

En las producciones de los tres primeros grupos se evidencia un reconocimiento de prácticas matemáticas en las que parecieran prevalecer la reproducción más que prácticas vinculadas con la producción y construcción de nuevos conceptos matemáticos. Sin embargo, se destaca que G4 realiza consideraciones respecto a la creación matemática. De las actividades matemáticas mencionadas por los autores en la revisión bibliográfica se aprecia de modo predominante la referencia por parte de los estudiantes de actividades ligadas a la resolución de problemas, la formulación de conjeturas y a su validación y/o explicación. A su vez se destaca que no mencionan como parte fundamental de la actividad matemática la formulación de problemas y la resolución por parte del sujeto que los elabora. Tampoco se aprecia preponderante evocación a la exploración, generalización, modelización, entre otros.

La validación

El G1 respecto a la validación destaca que se entiende como el proceso *mediante el cual podemos otorgar legitimidad a cierta teoría o enunciado. Durante este proceso, la justificación de la teoría se realiza a través de un conjunto de argumentos (axiomas, teoremas demostrados, definiciones) o es descartada, al encontrar un contraejemplo o contradicción con una proposición ya verdadera.* Se aprecia el reconocimiento de la validación relacionada principalmente con el empleo de “pruebas intelectuales” en términos de Balacheff (2000), particularmente en lo que atañe a la demostración a partir de un conjunto de axiomas y como parte del proceso de validación se referencia también a la refutación.

El G2 plantea que ese proceso consiste en seguir pasos para lograr un resultado válido. A su vez destaca que *en estos pasos se vuelcan todos aquellos conocimientos y herramientas adquiridas y ya validadas con anterioridad.* Menciona la puesta en juego de pruebas, aunque no realiza consideraciones sobre el uso de la demostración formal mediante el método axiomático deductivo. Al señalar el empleo de afirmaciones validadas previamente posiblemente refiere al uso de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), pero no limita esta idea a un único método.

El G3 afirma que, con proceso de validación en instancias del trabajo matemático, se alude al *análisis de proposiciones para refutar o afirmar la veracidad de las mismas. En caso de ser válidas se demostrarán y en caso contrario se desarrollará un contraejemplo.* Se aprecia nuevamente la necesidad del empleo de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), en particular el uso de la demostración reconocida en la comunidad matemática. Respecto a la mención del uso del contraejemplo para refutar, es posible que refiera a proposiciones de carácter universal, pues no se puede refutar con un contraejemplo una de carácter existencial.

El G4 señala: *entendemos que es la verificación de que lo que se creó es válido a través de una demostración.* En este caso claramente se vincula la validación con la demostración.

En general, los grupos consideran que la validación constituye una parte sustancial del trabajo matemático. Se aprecia también un reconocimiento de la demostración aceptada por la comunidad matemática como fiable para aceptar una conjetura. Esto puede estar influenciado por experiencias vividas en las diferentes asignaturas de matemáticas específicas transitadas en el marco de la carrera y más aún por la presentación de la asignatura GEE en la que se discuten ideas vinculadas con el empleo y modo de proceder con el método axiomático deductivo.

A modo de discusión

Los resultados presentados dan respuestas a las dos preguntas planteadas. Se destaca que, si bien las respuestas ofrecidas, en sinergia con lo planteado por Reid y Knipping (2010) evidencian reconocimiento por parte de los estudiantes a formas de probar con el estilo de presentación de los Elementos de Euclides, las mismas no evidencian apreciaciones respecto a validaciones de tipo empírico. En este marco, cabe destacar que tampoco se realizan consideraciones de validaciones en el sentido mencionado por Doerr et al. (2017) y Saeki et al. (2017). Esto se debe quizás porque el contexto de trabajo matemático presente en estos artículos es esencialmente extra-matemático que contrastaría con los ámbitos de trabajo matemático usuales para los futuros profesores de la UNL. Cabe recordar que el propósito de la tesis es focalizarse en procesos de MM intra-matemáticos, de este modo: algunas percepciones de los estudiantes van a ir siendo reconsideradas y será necesario profundizar más aun la revisión de las referencias ya que son escasas las producciones que dan cuenta de los procesos de validación al

trabajar con MM intra-matemática. Sin embargo, aportes de los autores recién mencionados pueden ofrecer pistas para repensar el trabajo de validación en el ámbito de formación de los futuros profesores cuando ellos trabajan en espacios de MM de fenómenos intra-matemáticos

Referencias y bibliografía

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.
- Bishop, A. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno*, 26, 61-72.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. Traducción de J.Centeno Pérez, B. Melendo Pardos, J. Murillo Ramón.
- Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. (pp. 135-151). New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- Cruz, M.F., Scaglia, S. & Esteley, C. (2018). La construcción de definiciones geométricas. En Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42- 47). Santa Rosa: Universidad Nacional de la Pampa.
- Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. & Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. (pp. 71-81). Switzerland: Springer.
- Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.
- Hanna, G. y De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Iztcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar*. Buenos Aires: Aique.
- Kaiser, G (Ed.) (2017) Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. Cham: Springer
- Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe.
- Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática. (2012). Disponible en: <http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en-tratamiento/subcomision-de-profesorados/>
- Reid, D and Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Saeki, A., Kaneko, M. & Saito, D. (2017). Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. (pp. 313-323). Switzerland: Springer.

- Stillman, G.S., Blum, W. & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Switzerland: Springer.
- Stylianides, A.J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective*. Cham: Springer.
- Topic Study Group 21. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*. ICME13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_21.pdf.
- Topic Study Group 48. *Pre-service mathematics education of secondary teachers*. ICME 13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_48.pdf.
- Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50, 327–341.