



Características de la comprensión de niños de 9 años de las relaciones de inclusión entre figuras geométricas

Melania **Bernabeu** Martínez

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

melania.bernabeu@ua.es

Salvador **Llinares** Ciscar

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

sllinares@ua.es

Mar **Moreno** Moreno

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

mmoreno@ua.es

Resumen

Este trabajo pretende identificar características de la relación que los niños/as de 9 años establecen entre la identificación de atributos de una figura y su uso para determinar la pertenencia a una categoría como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Nos apoyamos en la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (Duval, 1995) y la coordinación de las aprehensiones (Duval (1998). Participaron 29 alumnos/as de tercero de primaria que respondieron a un cuestionario post experimento de enseñanza. Los resultados indican que la generación de las relaciones de inclusión entre las figuras parece estar vinculada a la habilidad de reconocer el atributo crítico usado para establecer la relación, sin considerar el resto de atributos. Este fenómeno se denomina deconstrucción dimensional (Duval, 2005), el cual se entiende como una manifestación de la aprehensión operativa al ser una forma del procesamiento visual de las figuras geométricas.

Palabras clave: pensamiento geométrico, relaciones de inclusión, atributo crítico, concepto figurado, aprehensiones cognitivas, deconstrucción dimensional, cambios de anclaje.

Introducción

En los últimos años se ha empezado a subrayar el papel de los procesos cognitivos en el aprendizaje de la geometría. Este aprendizaje va más allá de la consideración de los contenidos geométricos como únicos referentes en la comprensión de las definiciones y de los procesos de

clasificación (Sinclair, et al, 2016; Presemeg, 2006). Una aproximación al aprendizaje de la geometría se centra en la construcción gradual de la imagen del concepto basada en el desarrollo de la comprensión y de las formas de razonar con los atributos de las figuras. Esta aproximación asume que los niveles del desarrollo del pensamiento geométrico propuestos por van Hiele admiten grados de razonamiento y diferencias en el discurso de los estudiantes (Clements et al, 1999).

En particular, el foco sobre la relación entre la construcción gradual de la imagen del concepto y la definición del concepto ha puesto de manifiesto cuestiones sobre la relación entre definiciones equivalentes que podemos generar para las figuras geométricas y las relaciones inclusivas que puedan derivarse. Como, por ejemplo, la investigación de Bernabeu, Moreno y Llinares (2017a) sobre la consideración del triángulo equilátero como un tipo de isósceles o la de Popovic (2012) sobre la definición de paralelogramo como un tipo de trapecio (trapezium). Asimismo, el trabajo de Fujita y Jones (2007) explora la relación entre la comprensión de los cuadriláteros y la naturaleza de las clasificaciones inclusivas, mostrando la gran influencia de las figuras prototípicas en el uso de definiciones que generaban relaciones partitivas en el conjunto de figuras (el cuadrado no es un rombo). Estos resultados muestran la relación entre cómo los estudiantes definen y comprenden los polígonos, y la manera en la que pueden generar relaciones de inclusión entre las diferentes clases de figuras geométricas.

Estas investigaciones previas indican que la comprensión del concepto de polígono está vinculada a la manera en la que los estudiantes comprenden las figuras geométricas como elementos de una clase (figuras que comparten un atributo, aunque sean perceptualmente diferentes). En particular, el análisis del papel que desempeña la identificación de algún atributo común para considerar que dos figuras pueden ser parte de un mismo grupo, ha puesto de manifiesto que el control de la componente conceptual sobre la perceptual, en la comprensión de las figuras como elementos de una clase, depende del atributo considerado (Bernabeu, Llinares y Moreno, 2017b).

El objetivo de la investigación es identificar características de la relación que los niños de 9 años establecen entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecen como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos.

Marco Teórico

Las referencias teóricas que permiten encuadrar este problema de investigación son la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (de lo visual a lo discursivo y viceversa) (Duval, 1995) y la coordinación entre la aprehensión perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1998). Fischebein (1993) considera que las figuras geométricas tienen simultáneamente propiedades figurales y condiciones conceptuales lógicas. Esto permite observar la influencia de las figuras prototípicas sobre los procesos de razonamiento de los estudiantes, aunque ellos conozcan las definiciones formales de los conceptos. Para caracterizar los procesos de razonamiento de los estudiantes que implican aspectos figurales y conceptuales, Duval (1998, 2018) propone centrar la atención en la coordinación de tipos de aprehensiones: la aprehensión perceptiva (reconocer y nombrar una figura en diferentes formas y orientaciones); la aprehensión discursiva (que permite asociar atributos de las figuras a afirmaciones matemáticas); y la aprehensión operativa (modificaciones de una figura geométrica manteniendo los atributos que la definen). La coordinación entre las aprehensiones nos permite explicar las dificultades de los niños/as en reconocer un atributo común entre dos figuras y que no es compartido por una tercera figura, lo que se considera la base del razonamiento que lleva a la comprensión de los procesos de clasificación. Esta aproximación al análisis de los razonamientos de los niños/as,

incide en subrayar la dificultad que tienen algunos de ellos/as en centrarse en alguna subconfiguración o atributo de la figura por el papel predominante de la aprehensión perceptiva. Duval (2005) indica que identificar un atributo de una figura geométrica implica una deconstrucción dimensional, lo que se entiende como un proceso de visualización geométrica que permite el reconocimiento perceptual de una figura en una configuración de unidades figurativas de dimensiones inferiores (lados, vértices, ángulos, ...). Por ejemplo, determinar que dos figuras tienen el mismo número de lados supone que el alumno/a centra su atención en el atributo “número de lados”, lo que le permitiría descartar los demás atributos.

Reconocer un atributo de una figura geométrica significa determinar las condiciones necesarias para identificar un ejemplo de un concepto geométrico. Al identificar dicho atributo se pone de manifiesto las transformaciones entre las diversas representaciones semióticas (representación visual y verbal) (Duval, 1995). Existen dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión (Duval 1995, 2006). Para esta investigación, nos vamos a basar en la conversión, la cual consiste en una transformación de una representación de un registro a otro (cambio de anclaje) sin cambiar los atributos que denota. Este cambio de anclaje puede realizarse bidireccionalmente, de lo discursivo a lo visual (cuando se representa una figura a partir de unas condiciones dadas) o de lo visual a lo discursivo (cuando se reconocen los atributos de una figura y se emiten declaraciones sobre estos) (Duval, 1995). Esta transformación es la que permite considerar una definición dando un conjunto mínimo de atributos.

Por lo tanto, el objetivo de la investigación se concreta en la siguiente pregunta de investigación:

- ¿qué relación existe entre identificar atributos en una figura y usar estos para categorizarla?

Método

Participantes

En esta investigación participaron 29 alumnos/as de tercero de educación primaria (9 años) de una escuela española. Teniendo en cuenta el currículo español de tercero de educación primaria, se diseñó e implementó un experimento de enseñanza de 10 sesiones, cada una de una hora de duración y cuyo objetivo fue desarrollar, entre otros, la capacidad de análisis e identificación de atributos críticos que categorizan a las figuras geométricas (número de lados, concavidad/convexidad, ejes de simetría, etc.). Todos los alumnos contestaron a un cuestionario al finalizar el experimento de enseñanza (post-test).

Instrumento

El instrumento de recogida de datos lo constituye el cuestionario diseñado *ad hoc*, formado por 12 ítems, al que respondieron los alumnos al finalizar el experimento de enseñanza. Los ítems (agrupados en 6 tareas) pretendían aportar información sobre la capacidad de:

- Identificación de los atributos críticos de los polígonos (Tarea 1, ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e). (Figura 1)

b) La figura “O” no es un polígono. Indica con tus palabras qué cambiarías para que fuera un polígono. Dibújalo.

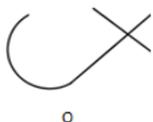
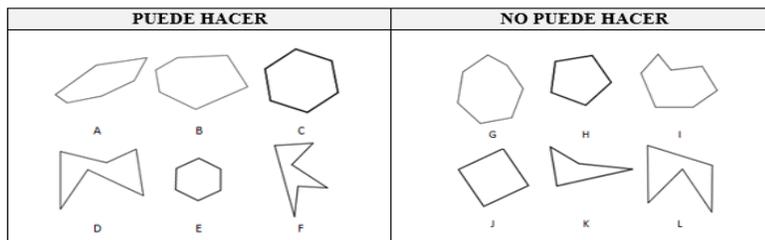


Figura 1. Ítem 1.b: identificar atributos críticos de un no-polígono y transformarlo en polígono.

- Identificación del atributo crítico que comparte un grupo de polígonos en relación a otro grupo de polígonos que no lo comparte, y representación de un ejemplo y un no-ejemplo de polígonos del conjunto identificado, tanto a partir de imágenes (registro visual) (Tarea 2: concavidad/convexidad; Tarea 3: número de lados igual a 6/número de lado diferente a 6 (Figura 1); Tarea 4a: polígonos con un eje de simetría/ningún eje de simetría), como a partir de una condición dada (registro verbal) (Tarea 6a: representa tres cuadriláteros con dos lados paralelos/tres cuadriláteros que no cumplan esa condición).

Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.



a) Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar sí pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que no pueda hacer y di por qué.

<u>PUEDA HACER</u>	<u>NO PUEDE HACER</u>
Dibuja:	Dibuja:
Explica:	Explica:

Figura 2. Ítem 3: identificar el atributo crítico de un conjunto de figuras, explicar y representar ejemplos y no-ejemplos.

- Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras y una figura dada (Tarea 4b: Si un rombo -2 ejes de simetría-, pertenece al grupo de los polígonos con un eje de simetría o al de los que no tienen eje de simetría; Tarea 5: si un triángulo equilátero -tres lados iguales- pertenece o no al grupo de los triángulos con dos lados iguales, o al de los triángulos sin lados iguales) o un registro verbal y una figura dada (Tarea 6b: si un cuadrado -lados paralelos dos a dos- pertenece al grupo de los cuadriláteros con 2 lados paralelos).

Teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación, hemos tenido en cuenta 7 ítems, los correspondientes a las tareas de la 2 a la 6. Todos ellos nos permiten observar la conversión entre el registro visual y verbal que se produce cuando los niños/as tienen que explicar los atributos de una figura, establecer relaciones entre estos o representar una figura a partir de unos criterios dados. Asimismo, la secuencia de tareas del cuestionario permite obtener información sobre el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

Análisis

Se analizaron un total de 203 respuestas procedentes de los 7 ítems del cuestionario. Poniendo nuestra atención en cómo los niños/as usaban el registro verbal para describir la resolución de la tarea y cómo representaban según las condiciones dadas. A partir del sistema de códigos, construimos categorías para obtener las frecuencias de las tareas e identificar los atributos que generan mayores dificultades. Por lo tanto, conocer cómo es la comprensión de las

figuras geométricas y las relaciones que se establecen para categorizar las figuras.

Resultados

Los resultados los presentamos en dos secciones: (i) identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos y (ii) reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada.

Identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos

Los atributos considerados en los ítems 2, 3 y 4a, respectivamente, fueron la concavidad, el número de lados igual a 6, y la simetría de los polígonos (Tabla 1). El atributo más difícil de reconocer fue la simetría de los polígonos (ítem 4a), ya que 21 de los 29 niños/as no identificaron este atributo crítico en el grupo de polígonos. Mientras que el atributo más fácil de reconocer fue la concavidad (Figura 3).

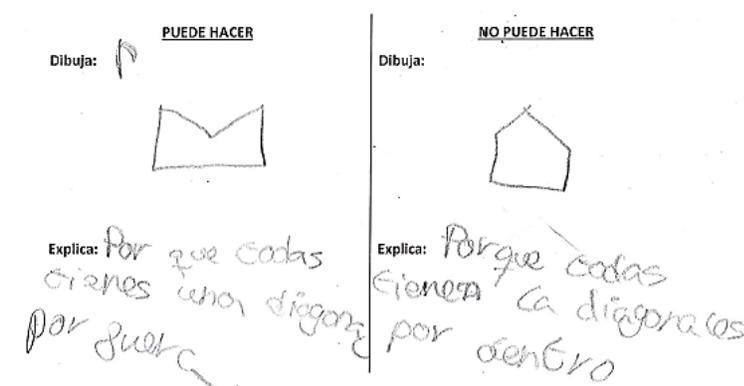


Figura 3. Ítem 2: respuesta G2A4

Tabla 1

Identificación de atributos críticos (n=29).

	No reconocen	Reconocen	TOTAL
Ítem 2: concavidad – convexidad	16	13	29
Ítem 3: número de lados igual a 6	17	12	29
Ítem 4a: Figuras simétricas	21	8	29

En relación a la tarea de identificar atributos críticos de la definición que permitieran representar ejemplos y no-ejemplos (Ítem 6a), tan solo 6 de los 29 alumnos/as fueron capaces de representar correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos y tres no-ejemplos de cuadriláteros que no cumplieran estos atributos. 11 alumnos/as representaron correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos, pero incorrectamente los no-ejemplos, pues representaron tres no-polígonos o tres no-cuadriláteros. El resto de los alumnos (n=12) no supieron identificar el atributo crítico que les permitiera representar los ejemplos y no-ejemplos o no representaron nada.

Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada

Ningún alumno supo identificar en el ítem 4b la relación entre la simetría de la figura representada (un rombo con dos ejes de simetría) y el conjunto de polígonos con el atributo crítico “tener un eje de simetría” y “no tener ejes de simetría”.

Las frecuencias obtenidas a partir de las relaciones de inclusión, tanto en el conjunto de los triángulos como en el de los cuadriláteros, fueron inferiores a las tareas de identificar el atributo común del conjunto de polígonos (Tabla 2).

Tabla 2

Reconocimiento de relaciones de inclusión

	No reconocen relación de inclusión		Reconocen relación de inclusión	TOTAL
	Explicación no coherente	Reconocen relaciones partitivas		
Ítem 4b: Rombo	29	-	-	29
Ítem 5. Triángulo equilátero	18	5	6	29
Ítem 6b. Cuadrado	19	-	10	29

En el ítem 5, de los 11 niños/as que reconocen relaciones entre los triángulos, 5 de ellos reflejan un conocimiento de la relación partitiva que implica la separación de los triángulos isósceles y de los triángulos equiláteros (Figura 4); mientras que los otros 6 establecieron relaciones de inclusión entre los triángulos, considerando el triángulo de tres lados iguales como perteneciente a la categoría de triángulos con dos lados iguales.

a) ¿Puede la Máquina de Dibujar hacer la figura "M"? ¿Por qué?



Figura 4. Ítem 5: respuesta de relación partitiva de G2A5

En cambio, en el ítem 6b los 10 alumnos/as que realizaron relaciones entre las figuras fueron de carácter inclusivo, considerando el paralelogramo como un tipo de trapecio (cuadrilátero con dos lados paralelos) (Figura 5).

a) ¿Puede la Máquina de Dibujar hacer la figura "A"? ¿Por qué?

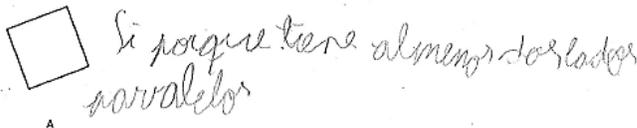


Figura 5. Ítem 6b: respuesta de relación inclusiva de G2A18

Discusión

El objetivo de esta investigación era identificar características de la relación que los niños de 9 años establecían entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecían como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Las frecuencias obtenidas en los resultados han mostrado que la mayoría de los alumnos/as todavía no han desarrollado las habilidades (aprehensiones) (Duval, 1995) para identificar los atributos críticos de las figuras geométricas (deconstrucción dimensional) (Duval, 2005) que permitan categorizar las figuras y así, establecer relaciones de inclusividad. De esta manera, la relación entre identificar un atributo crítico y usarlo para determinar la relación de inclusividad de las figuras, parece depender de cómo los niños/as comprenden las condiciones

conceptuales que componen la imagen del concepto, que Fischbein (1993) denominó el concepto figural, y de cómo combinan las aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) (Duval, 1998).

Por ejemplo, la mayor dificultad que se presenta en el reconocimiento del atributo común recae sobre el atributo referente a la simetría de las figuras (ítem 4), que implica realizar una aprehensión operativa, aparte de la perceptual y discursiva, imaginándose un eje de simetría y doblando la figura para comprobar que coinciden sus dos mitades. Por otro lado, las dificultades que se presentan en las tareas de relacionar figuras geométricas recae sobre la habilidad de centrarse en un atributo crítico (el que establece la relación) sin considerar el resto de los atributos. El desarrollo de esta habilidad que Duval (2005) denomina deconstrucción dimensional parece clave en la generación de las relaciones inclusivas entre las figuras.

Otro aspecto que ha puesto de manifiesto nuestros resultados son el papel de la expresión verbal en describir el proceso de deconstrucción dimensional como paso de la aprehensión perceptiva a la aprehensión operativa. Esta característica se ha puesto de manifiesto cuando algunos estudiantes intentaban explicar por qué un cuadrado puede ser considerado un cuadrilátero con dos lados paralelos generando una explicación en la que no intervenía el atributo crítico (dos lados paralelos). Este resultado muestra en qué medida el desarrollo del lenguaje geométrico puede ayudar al desarrollo del pensamiento geométrico.

El hecho de que durante el módulo de enseñanza se aportara a los alumnos/as definiciones que implicaban relaciones inclusivas entre las figuras favoreció que los alumnos establecieran relaciones inclusivas en los ítems 5 y 6. Otro aspecto clave en los resultados del post-test son las características de las tareas con relación a los cambios de anclaje que se precisan para resolverlas. Por ejemplo, el ítem 5 presenta tres cambios de anclaje: identificar el atributo común que compartía cada grupo de figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), establecer la relación entre dicho atributo y la figura mostrada (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y finalmente, explicar la relación entre las figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo); mientras que el ítem 6 solo presenta dos cambios de anclaje: reconocer los atributos de la definición y compararlos con la representación (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y explicar la relación entre la definición y el paralelogramo (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), que coinciden con los dos últimos del ítem 5. Comparando ambos resultados, parece que el cambio de anclaje más complejo es el primero, pasar de lo visual a lo discursivo: reconocer el atributo crítico del conjunto de figuras y relacionarlo con el concepto figural (Duval, 1995; Fischbein, 1993).

Para finalizar, el hecho que 5 alumnos/as realizaran una relación partitiva en el ítem 5 podría estar relacionado con la influencia de las figuras prototípicas (triángulo equilátero) como ya se ha comprobado en otras investigaciones (Fujita y Jones, 2007). Por lo que intuimos que las figuras prototípicas siguen siendo los ejemplos visuales de los conceptos geométricos, ya que los alumnos/as todavía no comprenden las condiciones conceptuales que forman parte del concepto figural (Fischbein, 1993).

Reconocimiento

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

Referencias y bibliografía

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017a). *Desarrollo de la comprensión del triángulo en Educación Primaria*. Comunicación presentada en el II CEMACYC-Congreso de Educación

- matemática de América Central y el Caribe, Cali, Colombia, Octubre-Noviembre.
- Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017b). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192–212.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Dordrecht: Kluwer
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. (2018). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. London: Springer.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162
- Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205–304). Rotterdam: Sense Publishers.
- Popovic, G. (2012). Who is this trapezoid, anyway? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(4), 196–199.
- Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM.Mathematics Education*, 48, 691-719.