XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conocimiento geométrico en contextos escolares

Myrian Luz **Ricaldi** Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón
Perú
myrianricaldieb@unife.pe

Resumen

El presente artículo describe los resultados de la aplicación de una prueba diagnóstica para determinar el nivel de conocimiento geométrico de dos grupos de estudiantes del segundo grado de secundaria en la ciudad de Lima. La investigación es de naturaleza cualitativa, toma elementos teóricas del modelo de Van Hiele. El objetivo del estudio fue describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos en estudiantes del nivel de educación secundaria. Los hallazgos más importantes son que los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación; además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios que le corresponde.

Palabras clave: evaluación diagnóstica, conocimiento geométrico, modelo de Van Hiele, limitaciones del aprendizaje, educación secundaria.

Introducción

Cuando se analiza un problema didáctico es necesario hacer explícita la concepción del conocimiento que subyace a la intervención de los procesos de construcción, tal concepción enfocará la atención en aspectos del contenido matemático y tecnológico que definirán dichos procesos. En este sentido, la presente investigación pretende realizar un estudio de carácter descriptivo, desde el punto de vista socio-constructivista que describa y analice el nivel de conocimientos geométricos logrado por los estudiantes del segundo grado de secundaria.

Objetivo de la investigación

Describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos vinculados al estudio del triángulo en estudiantes del nivel de educación secundaria.

Marco Teórico

Cuando se incorpora un saber al sistema educativo como objeto de enseñanza se focaliza con una intencionalidad didáctica. Esto tiene que ver con la epistemología del conocimiento para entender la razón de ser de su incorporación al ámbito escolar. En el caso de la Geometría, se inicia el estudio exploratorio en el libro clásico de historia de la matemática de Boyer (1996) que dice:

> La geometría euclidiana plana consiste en el estudio de las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano, llamadas transformaciones rígidas o movimientos. (p. 678)

De lo anterior se podría afirmar que resulta natural reconocer que el ser humano desde su primera infancia experimenta directamente con las formas de juguetes u otros elementos. Al mismo tiempo, cuando se mueve actúa sobre su entorno tomando posesión del espacio. Además, en este proceso se orienta, analiza las formas y establece relaciones espaciales. Por lo tanto, el estudio inicial de la geometría debería estar indisolublemente relacionado con la experiencia a través de los sentidos.

Al mismo tiempo, algunos autores señalan que los docentes tienden a no enseñar contenidos geométricos, a pesar de figurar en los programas, por desconocimiento del área o por no valorar su real importancia (Báez e Iglesias, 2007). En este panorama de necesidades todavía no atendidas se considera que la geometría escolar es importante porque:

- Estimula el razonamiento y posibilita el desarrollo de habilidades como clasificar, definir, particularizar, generalizar, etc. (Pérez y Guillén, 2007).
- Desarrolla la percepción espacial y la visualización. En este proceso la visualización es esencial para lograr una adecuada percepción espacial.
- Forma parte del lenguaje cotidiano, se encuentra presente en la comunicación referida a la ubicación, el tamaño o la forma de objetos.
- Tiene importantes aplicaciones en la vida real, muchas aplicaciones cotidianas involucran una base geométrica.
- Sirve como base para la comprensión de conceptos de otras disciplinas; además, es un recurso para la visualización de diversos conceptos.

Investigaciones más recientes respaldan y justifican la necesidad de incorporar el estudio de la geometría en contextos escolares. Así, tenemos a Sharygin (2004) quien indaga sobre los motivos que justifican el estudio de la geometría en la escuela y argumenta que son varios: valor práctico, conocimiento, desarrollos cultural, espiritual, intelectual, creativo, estético, mental y moral. Particularmente Bartolini (2007) considera a las perspectivas espaciales como objeto de enseñanza por su relevancia: matemática, cultural, cognitiva, social y educativa.

Las investigaciones antes señaladas dan un marco para el estudio de la Geometría a nivel escolar. Por otro lado, es relevante precisar que en su estudio se sugiere dejar de lado el énfasis en los cálculos operativos y en los resultados meramente numéricos centrados en la medición. En contraposición, hay que incidir más en el desarrollo de las nociones geométricas y en el establecimiento de las relaciones entre éstas; en la visualización de elementos, en la representación gráfica de situaciones y figuras, para atender a sus propiedades. Al mismo tiempo, es necesario enfatizar en el uso de la justificación lógica, que considere, al mismo tiempo, el nivel de evolución del pensamiento de los estudiantes según su edad.

Por otro lado, la presente investigación considera como marco teórico de referencia, desde la perspectiva matemática, la teoría de niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. En *The Childs Thought and Geometry*, Pierre Van Hiele (1984), describe la influencia de la evolución del pensamiento geométrico en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico. De acuerdo a esta teoría, el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no se asocian a la edad y que sólo permiten el tránsito de un nivel a otro superior cuando se ha logrado el dominio de habilidades secuenciales.

Según Van Hiele, en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento.

A continuación, se describirán las características de cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (Reconocimiento):

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico, se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades, que puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Nivel 3 (Ordenación o clasificación)

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Se detecta la necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Esto explicaría porque no se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se realiza, según su necesidad, deducciones y demostraciones lógicas y formales para justificar las proposiciones planteadas.
- Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5 (Rigor)

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- Se puede trabajar la geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Se debe precisar que en las investigaciones reportadas suelen considerarse los tres o cuatro primeros niveles, según el nivel educativo donde se lleven a cabo tales investigaciones.

Participantes e instrumentos

Se recogió información de dos grupos de estudiantes varones del 2do grado de secundaria, cada uno de los grupos estaba formado por 26 estudiantes y sus edades fluctuaban entre 11 y 13 años. En cuanto al tipo de muestra que se usó en el estudio esta fue intencional, lo cual permitió manejar de manera adecuada las características excepcionales; es decir, se buscó una muestra que era comprehensiva y que ponía el énfasis en los casos más representativos. Para la recolección de datos se aplicó una prueba diagnóstica, instrumento que buscó identificar las principales dificultades asociadas al estudio de temas geométricos. Para la elaboración de la prueba se consideraron elementos de la teoría de Van Hiele.

Estrategias para el análisis de los datos

Se establecieron categorías de análisis las mismas que emergieron del estudio de la información que se recogió. Durante los procesos de categorización, contrastación y teorización en función a las respuestas frecuentes de los participantes, se planteó el análisis, relación y comparación de las respuestas. Es decir, las categorías de análisis surgieron por las relaciones que se dieron entre las respuestas. En cuanto a la interpretación de los datos obtenidos estos se hicieron a la luz de los elementos de los niveles de razonamiento geométrico: visualización y reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor. Estas herramientas, también, se usaron para el diseño de las preguntas de la prueba diagnóstica.

Análisis y discusión de los resultados

La prueba contenía 14 ítems de tipo textual y gráfico, algunos del nivel de identificación y otras más complejas donde los estudiantes debían analizar y sintetizar los datos. En la prueba se decidió utilizar ítems de respuesta abierta, ya que éstos permiten que los estudiantes expliquen con detalle su forma de trabajo y sus justificaciones a los procedimientos aplicados; además, su aplicación fue simultánea a los dos grupos durante un tiempo de 40 minutos. Un inconveniente derivado de la aplicación de este instrumento es que para los estudiantes fue más difícil expresarse por escrito que verbalmente, por lo que se evidenció la tendencia a dar respuestas cortas. A priori se consideró que la mayoría de ellos estarían en los niveles 1 y 2, por lo que los ítems se orientaron mayoritariamente a evaluar los niveles 1, 2 y 3.

El diseño de la prueba se centró en los siguientes contenidos: nociones básicas de geometría plana y espacial, propiedades vinculadas al cálculo de áreas y perímetros de cuadrados, rectángulos y triángulos. Estos contenidos fueron seleccionados considerando los programas curriculares de los dos años previos y del presente grado escolar. A continuación, se resume las características de los ítems elaborados considerando: número de ítems, contenido geométrico de los mismos y niveles de razonamiento evaluados por cada ítem. Cada nivel es evaluado por varios ítems, además, el mayor número de preguntas corresponden a los niveles 1 y 2.

Tabla 1
Características de la prueba diagnóstica de dificultades geométricas

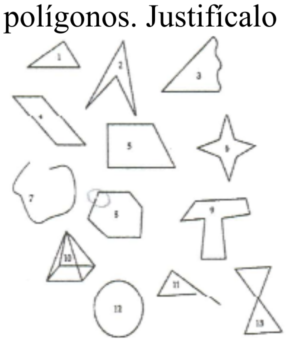
Ítem	*Niveles*			*Contenido geométrico*
	1	2	3	
P- 1	✓	✓		Clasificación de polígonos.
P- 2	✓	✓		Diagonales de un polígono.
P- 3	✓			Ubicación espacio- temporal
P- 4	✓			Polígonos y poliedros.
P- 5		✓	✓	Perímetro y área.
P- 6		✓	✓	Perímetro de un cuadrilátero.
P- 7			✓	Área de un cuadrilátero usando la noción de paralelismo.
P- 8		✓		Distancia entre puntos.
P- 9	✓			Relaciones de perpendicularidad, paralelismo y oblicuas.
P- 10	✓			Ángulos agudo, recto, obtuso y llano.
P- 11		✓	✓	Área y perímetro del triángulo equilátero y cuadrado.
P- 12	✓	✓		Ángulos alrededor de un punto.
P- 13		✓	✓	Relación entre el volumen y áreas.
P- 14		✓	✓	Área de cuadrados y triángulos.
Total	7	9	6	

Fuente: elaboración propia.

Análisis de los resultados teniendo en cuenta las categorías

A continuación, se presenta el análisis cualitativo de algunas de las respuestas:
Problema 1

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellos que no son polígonos. Justifícalo en cada caso.

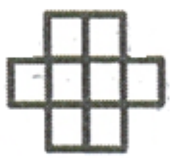


Para los estudiantes los polígonos tienen varios lados que se cierran. En sus argumentos el estudiante 1 escribió: “sólo es un polígono si sus segmentos se cierran” evidenciando con ello un nivel 1 dentro de los niveles de razonamiento geométrico, ya que usa propiedades de las figuras geométricas para describirlas en función al aspecto físico. Este mismo estudiante generó una especie de leyenda O = es un polígono, X = no es un polígono (ver Figura 1). En el caso 12, el estudiante marcó que es un polígono, esto devela que el estudiante no considera que los segmentos tienen que ser rectos. Por otro lado, de la respuesta al caso 13, este estudiante indicó que no veía un polígono porque en un vértice se cruzaban muchos segmentos.

El estudiante 2 confundió términos escribiendo: “polinomio es una figura con varios lados, cerrada y plana”. Esto tal debido a lo reciente del aprendizaje de algunas operaciones con polinomios. Esto devela una confusión semántica; sin embargo, analizando la respuesta del estudiante existe ambigüedad ya que no se especifica el carácter secuencial de los vértices los cuáles se unen con segmentos. La noción aprendida que persiste, pero que debe complementarse con lo anterior es que es una de figura cerrada. Otro estudiante al que llamaremos 3 sólo marcó de manera errónea y no justificó su respuesta. El estudiante 4, sólo escribió: “7 no está cerrado y 11 no está cerrado”. Se podría considerar que la característica cerrada es para él una justificación. Por otro lado, el estudiante 5, escribió: “sólo la 3, 7 y 11 no son polígonos porque sus lados no se cierran”. Todos los estudiantes consideraron de manera errónea a la circunferencia como un polígono, ninguno de ellos preciso la naturaleza recta de los lados como característica de los polígonos.

Problema 5

La siguiente figura formada por cuadrados idénticos tiene perímetro 42 cm. ¿Cuál es el área de la figura?



El problema evaluaba la relación que había entre el área y el perímetro de una figura compuesta de varios cuadrados. En relación a las respuestas de los estudiantes, se detalla lo siguiente: los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente, mostrando los cálculos y relaciones establecidas. Por otro lado, los estudiantes 3, 4 y 5 confundieron la medida de lados con perímetros y no distinguieron la diferencia entre área y perímetro. Esto refleja un análisis inadecuado de las relaciones de estas propiedades.

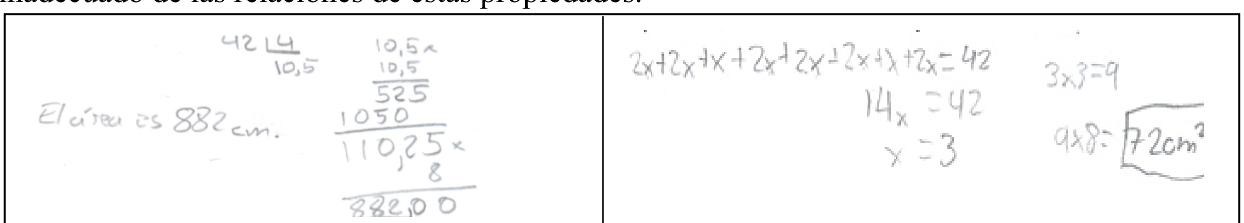
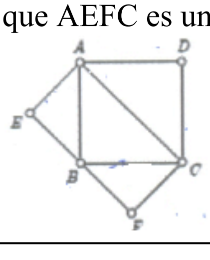


Figura 1. Respuestas de los estudiantes 5 y 1 a la pregunta Nº 5.

Problema 7

La forma de la biblioteca de Alejandría, la más rica de la antigüedad, tenía la forma indicada en la figura: Sabiendo que EF es paralelo a AC, que ABCD es un cuadrado de 40 m de lado y que AEFC es un rectángulo, calcular la medida del área ocupada por la biblioteca.



Este problema demandaba que el estudiante reconozca que algunas propiedades se deducen de otros datos, relacionen y clasifiquen figuras basándose en propiedades. Se comparte algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes: Los estudiantes 1 y 5 colocaron en el dibujo la información del lado. Por otro lado, el estudiante 2 señaló algunas operaciones que conducen a la respuesta correcta del problema. El estudiante 3, indicó en el dibujo datos incorrectos y señaló al margen una operación aritmética. El estudiante 4 completó datos en el dibujo en forma incorrecta, además, mostró una adición que arrojaba un resultado incorrecto.

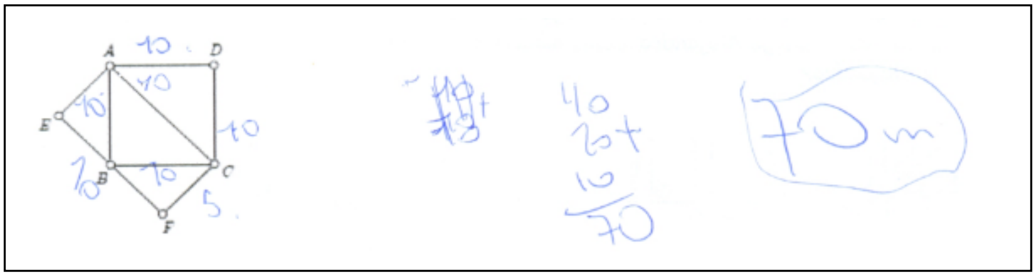
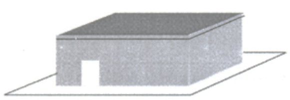


Figura 2. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta Nº 7.

Problema 13

José pinta las paredes de un almacén que tiene 6 metros de largo, 4 de ancho y 3 de alto. ¿Qué área pintara, si solo deja de pintar la puerta cuyas medidas son de 1 metro de ancho por 2 de alto?



Los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente. Además, mostraron las operaciones que los llevaron a esos resultados. Además, indicaron correctamente las unidades m^2 que corresponden a las áreas. En contraparte los estudiantes 3,4 y 5 calcularon el volumen del paralelepípedo presentado y luego le restaron 2. Es decir, restaron magnitudes cuadradas de unas magnitudes cúbicas cayendo en el error de operar con magnitudes de unidades diferentes. Además, que mostraron poca comprensión del enunciado propuesto al confundir áreas con volúmenes.

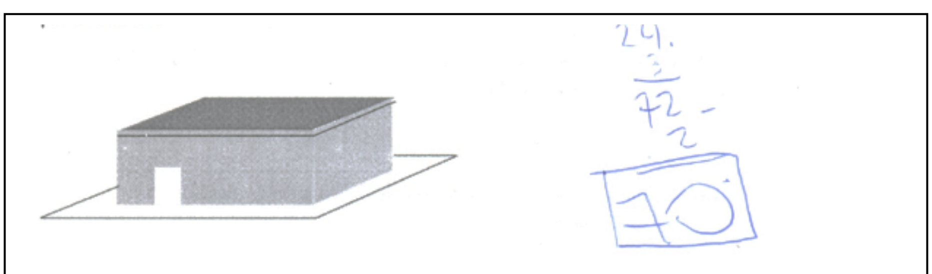


Figura 3. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta Nº 13.

Conclusiones

Los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación.
Además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios asume que debían tener. Por otro lado, los estudiantes comprenden algunas de las interrelaciones existentes entre diversas propiedades de una figura geométrica cuando se hace que centren su atención en éstos, pero si se les presenta dos situaciones aparentemente diferentes por sí mismos no las clasifican como pertenecientes a la misma familia, por lo que les es difícil resolver problemas distintos a los propuestos. Ante esta situación se recomienda atender las restricciones de origen matemático y didáctico, sobre todo porque algunas respuestas de los estudiantes develan un limitado manejo conceptual, es importante también promover la creación de problemas reales que permitan el tránsito de lo concreto a lo abstracto y cuya conceptualización y solución se de en diferentes registros de representación. En este sentido, sería relevante proponer diferentes puntos de acceso al conocimiento, partiendo del entorno y superando la atomización de los contenidos geométricos; también es aconsejable relacionar la geometría plana con la geometría del espacio, especialmente, para ampliar algunas definiciones en un entorno más real para el estudiante.

Bibliografía y referencias

Báez, R., y Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática 12 al 16*, 67-88.

Bartolini, M. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM Mathematics Education 39*, 63-71.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Planeamiento de un proyecto de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, M. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.* Comunicación de los grupos de investigación XI Simposio de la SEIME, Octubre, Tenerife.

Sharygin, I. (2004). On the concept of School Geometry. En J. Wang & B. Xu (Eds.). *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 43-51). Shanghai: East China Normal University Press.

Van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and P.M. Van Hiele* (pp. 242-252). Brooklyn: Brooklyn College.