XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

A resolução de problemas por estimativas

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

O físico italiano Enrico de Fermi[1] se tornou conhecido pela resolução de problemas por estimativas. Estimar significa fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza. O propósito desta pesquisa qualitativa é estudar problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. A fundamentação teórica está ancorada no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa. A utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e torna a aprendizagem mais significativa.

Palavras chave: resolução de problemas, estimativas, problemas de Fermi, interdisciplinaridade, aprendizagem significativa.

Introdução

Em muitas situações do cotidiano, precisa-se saber apenas uma estimativa de certa quantidade, não se faz necessário obter o valor exato. Consideremos uma situação hipotética em que se noticiou a quantidade de vinte mil pessoas presentes em uma manifestação em praça pública. Como é possível avaliar quantas pessoas estão presentes em determinado evento? Em situações como essa, não importa se na manifestação havia 15478 pessoas ou 24567 pessoas, espera-se apenas um valor aproximado.

Como se estima a área desmatada de uma determinada floresta? A quantidade de explosivos necessária para demolir determinado edifício? Ou até mesmo a quantidade de água armazenada em uma represa? Essas e diversas perguntas recebem respostas aproximadas que podem ser obtidas por meio de estimativas. Além desse tipo de estimativa, envolvendo grandezas

[1] Enrico Fermi viveu entre 1901 e 1954. Suas contribuições mais importantes foram no campo da física nuclear e da teoria quântica: recebeu o Prêmio Nobel de Física por sua contribuição ao desenvolvimento da energia nuclear. No entanto, mal recebeu o prêmio, Fermi foi forçado a deixar a Itália e se converteu ativamente como pesquisador na Universidade de Chicago. Atualmente, um dos laboratórios de física mais importantes do mundo leva o nome de Fermi Lab (próximo a Chicago). Fermi foi membro da equipe que ficou conhecida com o nome de Projeto Manhattan, e que desenvolveu a bomba atômica em Los Álamos, Novo México.

que aparecem naturalmente no nosso dia a dia, nas Ciências Exatas, a estimativa proporciona um grande auxílio na resolução de problemas.

Há diversas maneiras de se realizar uma estimativa. Uma maneira de estimar o resultado de um problema com números grandes é pensar em problemas similares, com números pequenos. A multiplicação é bastante utilizada para respostas estimadas, dividindo-se o todo em grupos iguais e multiplicando-se a quantidade de elementos pela quantidade de grupos. A comparação é também muito utilizada na estimativa de alturas, comprimentos, áreas e volumes, ou seja, conhecendo-se a altura, o comprimento, a área ou o volume de um objeto se pode estimar, com certa precisão, o comprimento, a altura, a área ou o volume de outros objetos comparando-os com o conhecido. Conhecendo-se a capacidade total de um recipiente parcialmente cheio, pode-se usar a noção de metade e de um quarto para estimar o quanto sobra.

Batista & Mozolevski (2010, p. 44) consideram que "uma das tarefas do cientista é de aprimorar sua capacidade de fazer estimativas *a priori* da ordem de magnitude de determinada grandeza, antes de fazer um exame detalhado, seja do ponto de vista teórico ou experimental". Afirmam ainda que Enrico Fermi, um físico italiano que viveu entre 1901 e 1954, introduziu uma prática muito comum entre os físicos de hoje que é a "física do verso de um envelope", isto é, antes de resolver um problema que envolva cálculos complicados é necessário obter estimativas cujos cálculos possam ser realizados no verso de um envelope (Batista & Mozolevski, 2010).

As estimativas estão presentes em cálculos de nosso cotidiano em contextos diversos. Em pesquisas diversas, as estimativas são apontadas como importantes em sala de aula para que o estudante possa perceber que a Matemática não é feita somente por resultados "exatos", mas também de elaboração de argumentos, aproximações, raciocínios e justificativas (Fontanive, Klein & Rodrigues, 2012).

De acordo com Smoothey (1998, p.7), "uma estimativa é um palpite inteligente. Não é um número qualquer escolhido a esmo, mas um número baseado na observação e no raciocínio". Expressões como "cerca de", "aproximadamente", "mais do que", "quase", entre outras, indicam que se trata de uma estimativa. Estimar significa opinar a respeito de algo de que não se tem certeza, fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza, como por exemplo, estimar a idade do Universo, estimar a quantidade de pessoas em um show, o número de manifestantes em um evento, o número de átomos que compõem um corpo e o número de bactérias em uma determinada amostra.

Os cientistas, às vezes, fazem essas estimativas antes de optar por métodos mais sofisticados para obter respostas específicas. A capacidade para estimar o tamanho ou a probabilidade de diversas quantidades é útil nas ciências, bem como em muitos outros empreendimentos, para fornecer uma verificação aproximada de cálculos mais exatos; fornecer uma verificação dos resultados da investigação; obter estimativas das quantidades quando outros recursos não estão disponíveis; obter estimativas das quantidades que são difíceis de medir com precisão; obter estimativas de quantidades para as quais não exista uma previsão teórica firme.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) brasileiros também destacam a importância das estimativas:

> A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e

> aperfeiçoamento dependem de um trabalho continuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos. Desde as primeiras experiências com quantidades e medidas, as estimativas devem estar presentes em diversas estratégias que levem os alunos a perceber o significado de um valor aproximado, decidir quando e conveniente usá-lo e que aproximação e pertinente a uma determinada situação, como, identificar unidades de medida adequadas às grandezas (Brasil, 1997, p. 77).

No Brasil são poucos trabalhos envolvendo estimativas e/ou problemas de Fermi. Um exemplo é o trabalho de Livi (1990) que em seu artigo trata da representação de pequenos e grandes números como potências de base 10 e defende que professores e estudantes devem ser encorajados a fazer estimativas numéricas de qualquer espécie. Sugere para isso, a resolução de problemas de estimativas e fornece diversos exemplos de problemas que podem ser trabalhados com estudantes, os quais se classificam como problemas de Fermi.

Sriraman & Knott (2009) argumentam que os problemas de Fermi que estão diretamente ligados ao cotidiano são mais significativos e oferecem mais possibilidades pedagógicas que exercícios intelectuais. Defendem o uso dos problemas de Fermi que envolvem estimativas do consumo de água doce, o consumo de combustível, o desperdício de alimentos, a quantidade de lixo produzido, entre outros, que além de desenvolverem o raciocínio, levam a uma consciência crítica sobre o uso consciente dos recursos naturais.

Autores de livros didáticos também propõem problemas de Fermi em suas obras. Torres (2013) em sua obra "Física: ciência e tecnologia", voltada para o Ensino Médio, propõe um tópico intitulado "Ordem de grandeza – estimativa de valores" o qual inicia com três problemas que se classificam como problemas de Fermi: "Você tem ideia de quantas gotas de água são necessárias para encher uma piscina olímpica? Quantos grãos estão contidos em um pacote de 5 kg de arroz? Quantos passos um atleta dará durante uma maratona?" (Torres, 2013, p. 46). Os autores discorrem sobre a importância de resolver problemas desse tipo, porém, não propõe estratégias para resolvê-los e não propõe que os estudantes os resolvam, apenas os utilizam como motivação para tratar de ordem de grandeza.

Diante do exposto, compartilha-se uma investigação inicial sobre problemas que envolvam estimativas ou problemas de Fermi[2], fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa.

Fundamentação teórica

Os sistemas nacionais de avaliação da educação básica brasileira, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), junto com os sistemas de avaliação internacional, como o Programme for International Student Assessment (Pisa), cada vez mais têm exigido dos estudantes a competência para resolução de problemas, e não somente em Matemática.

O Enem, por exemplo, traz em sua matriz de referência, no eixo cognitivo, comum a todas as áreas de conhecimento, que o estudante deve enfrentar situações-problema, ou seja,

[2] Trata-se de um recorte do Projeto de Pesquisa "Problemas de Fermi – fazendo estimativas com poucas informações", apoiado pela Pró-reitoria de Pesquisa, Inovação e Pós-graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul, por meio do Edital PROPESP Nº 05/2018, sob registro PE0506180818/059.

selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Conforme Schoenfeld (1985), a resolução de problemas possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão em seu alcance. Assim, os estudantes terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos, bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas como a principal forma de se alcançar os objetivos em sala de aula, entre eles, o de fazer o estudante pensar produtivamente. Acrescenta que, por meio da resolução de problemas, é possível desenvolver, no estudante, a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade, a independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu cotidiano. O autor destaca ainda:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária (Dante, 2000, p. 15).

Dante (2000) também sugere que devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos estudantes diante de um problema novo. Dessa forma, em sala de aula o professor pode trabalhar com as tentativas e os erros dos estudantes, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o raciocínio dos estudantes e preparar as discussões em torno da resolução desses problemas, com o intuito de conceber processos de resolução diferentes dos já aprendidos.

Segundo Polya (1978), o professor que deseja desenvolver nos estudantes o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes oportunidades de imitar e praticar. Para resolver e encaminhar a solução de um problema, segundo Polya (1978), quatro etapas principais podem ser empregadas: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

Quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos estudantes, de modo que estas sejam produtivas, levando os estudantes a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, busca, exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. O professor deve propor situações-problema que possibilitem a produção do conhecimento, onde o estudante deve participar ativamente compartilhando resultados, analisando reflexões e respostas, enfim aprendendo a aprender.

Conforme Moreira (1999) a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) ou Teoria da Assimilação de Ausubel é uma teoria cognitivista e construtivista que propõe explicar o processo de aprendizagem que ocorre na mente humana, através da organização e integração do material de aprendizagem na estrutura cognitiva. A TAS considera necessárias duas condições para que a aprendizagem ocorra de forma significativa: a disposição do estudante para aprender e o material didático desenvolvido deve ser potencialmente significativo para o estudante, além de ser construído a partir dos seus conhecimentos prévios. "Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos" (Moreira, 1999, p. 152).

Para Moreira & Masini (2001), o aprendizado abrange conceitos novos e também modificações na estrutura cognitiva representada pela interação entre conhecimentos assimilados e os conhecimentos pré-existentes dos estudantes. A esse conhecimento prévio, que sofre interação com o novo conhecimento aprendido, Ausubel dá o nome de "subsunçor". A aprendizagem ocorre quando uma nova ideia ou conceito ancora-se em conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ausubel considera o armazenamento de informações na mente humana como sendo hierarquicamente organizado, resultado de experiências sensoriais do indivíduo. Pensando-se em estimativas numéricas, por exemplo, se o estudante sabe qual o consumo mensal de água de sua família, este conceito serviria de subsunçor para fazer uma estimativa numérica de consumo de água de seu município, de seu estado ou país.

O processo de ancoragem é o aspecto fundamental da teoria de Ausubel. De acordo com Moreira & Masini (2001), novas ideias se relacionam com o que o estudante já sabe e com isso surgem novos significados. No entanto, para que isso ocorra, a relação dessas novas ideias com o conhecimento prévio do estudante deve se dar de modo "substantivo" e "não arbitrário", ou seja, um novo conhecimento não será alocado de modo arbitrário na estrutura cognitiva, ele estará interligado com o conhecimento âncora, como se fosse uma continuação e, além disso, que o estudante consiga resolver problemas com pequenas variações comparando-se com aqueles que lhe foi apresentado, ou ainda, o estudante que aprende um conteúdo de modo substantivo, será capaz de compreender casos cujas estruturas sejam diferentes da forma como foi assimilado, sendo capaz de aplicar o conhecimento para outras situações.

Ausubel considera também que, para que a aprendizagem seja significativa, o material a ser aprendido deve ser "potencialmente significativo". Ou seja, tenha significado para o estudante e que o estudante "manifeste disposição favorável" para aprender de maneira significativa. Para que isto ocorra, recomenda o uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente (Moreira & Masini, 2001). Os organizadores prévios são materiais apresentados aos estudantes antes do próprio conteúdo a ser aprendido, como por exemplo, um experimento, uma imagem, um texto introdutório ou questionamentos, buscando instigar o estudante a compreender o conteúdo. É uma estratégia que se pode utilizar para manipular a estrutura cognitiva criando um elo entre o conhecimento prévio e o conteúdo a ser aprendido, ou seja, busca mostrar ao estudante a relação entre o conteúdo e o seu conhecimento prévio. Ausubel recomenda o uso de problemas para se procurar evidências da aprendizagem significativa, porém alerta que resolver problemas envolve habilidades que muitas vezes estão além dos conteúdos trabalhados.

Dessa forma, a aprendizagem significativa se torna importante, pois o conhecimento é retido por mais tempo pelo estudante, a aprendizagem é facilitada e, além disso, o conceito que foi aprendido e esquecido pode ser relembrado com mais facilidade. Nesse contexto, o papel do professor seria identificar o que o estudante já sabe organizar no conteúdo a ser aprendido de modo que trabalhe primeiramente os conceitos mais inclusivos, com maior subsunção com o conhecimento prévio do estudante, e utilizar recursos adequados, como a metodologia de resolução de problemas, para que a aprendizagem seja significativa.

Problemas de Fermi

Em 1945, de acordo com Navarro (2013), Fermi conseguiu estimar de maneira muito precisa, a força da bomba atômica que foi detonada no Teste Trinity. A bomba, desenvolvida por Fermi e outros cientistas do Projeto Manhattan, foi estimada em 10 kt (quiloton), um valor bem próximo do real que hoje se tem conhecimento, que é 20 kt. Para tal estimativa, Fermi rasgou uma folha de papel em pedaços pequenos. Quando sentiu o primeiro tremor da onda de choque se espalhando pelo ar, ele lançou os fragmentos de papel acima de sua cabeça. Esses papeis se agitaram para baixo e para longe da nuvem em forma de cogumelo que estava se formando no horizonte, caindo cerca de dois metros atrás dele. Depois de breve cálculo mental, Fermi concluiu que a energia liberada pela bomba seria o equivalente a um milhão de toneladas de TNT.

Na década de 1950, Fermi estimou a quantidade de afinadores de piano que havia em Chicago (Navarro, 2013). A solução para este problema envolveu a tomada de alguns pressupostos, e a multiplicação dos fatores. Primeiro, considerou-se algumas hipóteses:

a) Existem aproximadamente nove milhões de pessoas morando em Chicago.

b) Existem, em média, duas pessoas morando em cada casa em Chicago.

c) Uma casa em vinte possui um piano que é afinado regularmente.

d) Pianos que são afinados regularmente, em média, são afinados uma vez ao ano.

e) Um afinador de piano leva, em média, duas horas para afinar um piano, contando a viagem.

f) Cada afinador de piano trabalha oito horas por dia, cinco dias na semana e cinquenta semanas ao ano.

Logo, para calcular o número de afinadores, primeiro, descobriu-se quantas afinações de piano são feitas por ano:

$$\frac{9000000 \text{ de pessoas}}{2 \text{ pessoas/casa}} \cdot \frac{1}{20} \text{casas que possuem piano} \cdot 1 \text{ afinação do piano/ano} = 225000 \text{ afinações/ano.}$$

Em seguida, calcularam-se quantas afinações de piano cada afinador de piano faz em um ano:

$$\frac{50 \text{ semanas/ano} \cdot 5 \text{ dias/semana} \cdot 8 \text{ horas/dia}}{2 \text{ horas/afinação}} = 1000 \text{ afinações de piano/afinador de piano.}$$

Dividindo-se, o primeiro resultado pelo segundo, chegou-se ao número de afinadores de piano na cidade de Chicago:

$$\frac{225000 \text{ pianos afinados/ano}}{1000 \text{ afinações de piano/afinador de piano}} = 225 \text{ afinadores de piano em Chicago.}$$

Na época, o número verdadeiro de afinadores de piano era cerca 290 afinadores. Isso mostra que o número estimado era compatível com o real. Portanto, Fermi considerou alguns dados sobre a população de Chicago e estimou a quantidade de afinadores de piano, valendo-se das operações de multiplicação e divisão.

Inspirados nos problemas de Fermi, estudantes da Educação Básica podem ser desafiados com as seguintes perguntas:

- Vocês seriam capazes de dizer com que velocidade cresce nosso fio de cabelo? E nossas unhas? Que estratégias vocês utilizariam para fazer tal constatação?

- Quais as consequências físicas, geográficas e sociais se os anos bissextos nunca existissem?

Nesse sentido, essa investigação segue com a utilização da metodologia de resolução de problemas no estudo, criação e resolução de problemas de Fermi, bem como, no desenvolvimento de uma sequência didática com problemas de estimativas para estudantes do Ensino Médio.

Considerações finais

Esta comunicação se propôs a refletir sobre a resolução de problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. Apresentaram-se dois problemas clássicos de Fermi, um sobre a bomba atômica e o outro relacionado ao número de afinadores de piano em Chicago. Obviamente que ninguém espera que diante de um problema de Fermi o estudante responda com um número exato. Mas também, estimar não é chutar. Tão ou mais importante do que determinar a resposta, é avaliar o processo ou estratégia utilizada de estabelecer uma estimativa para a resposta. Tão melhor será sua estimativa, quanto mais ricas forem suas considerações de variáveis e dados utilizados para o problema em questão.

Fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa, aponta-se que a utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e uma aprendizagem mais significativa.

A resolução de problemas por estimativas possibilita aos estudantes desenvolverem diferentes estratégias para resolver problemas com êxito e que os mesmos reflitam sobre sua resolução, não se preocupando apenas em chegar a uma solução. Outro aspecto positivo da utilização de problemas de Fermi é a possibilidade de uma abordagem experimental para a maioria dos problemas e o envolvimento de conteúdos de diferentes áreas do conhecimento, contribuindo para a superação do paradigma de ensino fragmentado. Além disso, a resolução de problemas por estimativas pode ser feita em grupos de trabalho, pois à medida que tecem hipóteses para resolvê-los, os estudantes interagem para chegar a um consenso de como resolver o problema. Dessa forma, pelo caráter desafiador e interdisciplinar dos problemas de Fermi, desperta-se o interesse dos estudantes para resolução de problemas e se possibilita uma aprendizagem mais significativa.

Referências

Batista, E. & Mozolevski, I. (2010). *Métodos de Física-Matemática.* Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina – Consórcio ReDiSul. Recuperado de: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/Metodos_de_Fisica-Matematica_-_28-jul 2010.pdf>.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Dante, L. R. (2000). *Didática da resolução de problemas de Matemática.* São Paulo: Ática.

Fontanive, N. S.; Klein, R. & Rodrigues, S. S. (2012). Boas práticas docentes no ensino da Matemática. *Estudos & Pesquisas Educacionais,* 3, 195-277.

Livi, R. P. (1990). Como estimar dimensões e grandezas físicas: pequenos e grandes números. *Caderno Catarinense de Ensino de Física.* Recuperado de: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/9798/9034>.

Moreira, M. A. (1999). *Teorias de aprendizagem.* São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. & Masini, E. F. S. (2001). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.* São Paulo: Centauro.

Navarro, J. M. G. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* 30(2), 57-68.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Nova York: Academic Press.

Smoothey, M. (1998). *Atividades e jogos com estimativas.* Tradução: Quadros, S. Revisão técnica: D'Ambrósio, U. São Paulo: Scipione.

Sriraman, B. & Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange: A Quarterly Review of Education,* 40(2), 205-223. Recuperado de: <http://www.math.umt.edu/sriraman/Interchange_Sriraman_2009_2.pdf>.

Torres, C. M. A. (2013). *Física: ciência e tecnologia.* (3era ed.) São Paulo: Moderna.