



Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en operaciones cognitivas

Jorge Enrique Galeano Cano
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colombia
jorge.enrique.galeano@correounivalle.edu.co

Resumen

Se presenta una síntesis del trabajo de grado en la Maestría en Educación: *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento* (Galeano, 2015). Este propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva (Duval, 2005), un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de una propuesta para la enseñanza de la geometría y contribuir así al desarrollo del pensamiento espacial. Toma como metodología los Experimentos de Enseñanza (Cobb, 2000); se caracterizan dos grupos de situaciones, las actividades diseñadas muestran cómo pueden usarse para desarrollar procesos de construcción que permiten un acceso significativo a dichas figuras, y procesos de visualización que explotan su productividad heurística. El análisis de la implementación muestra que los estudiantes desarrollan posibilidades de tratamiento sobre las figuras y se acercan a la comprensión de las propiedades características de una figura geométrica. *Palabras clave:* Visualización, construcción, razonamiento, geometría, figuras geométricas, aprendizaje, diseño, experimento de clase.

Formulación de la propuesta de trabajo en clase

El trabajo realizado se constituye a partir de la formulación de un problema en Educación Matemática, los elementos teóricos y metodológicos que lo sustentan, lo que finalmente se concreta en el diseño, implementación y análisis de una serie de actividades en un grado sexto de Educación Básica Secundaria para el trabajo con figuras geométricas. En la realización del Experimento de Enseñanza¹ se identifican dos niveles: un micronivel y un macronivel (Cobb, 2000). En el micronivel se encuentra el experimento de enseñanza en el momento en que fue pensado y se hicieron ciertas anticipaciones, junto con los elementos previstos para desarrollar la enseñanza, los cuales contemplan las actividades de clase planeadas y aplicadas; se cierra este

¹Es una metodología de investigación que provee maneras de explorar las posibilidades de investigar lo que a partir de la propuesta de enseñanza del profesor ocurre con el aprendizaje de los estudiantes y con los cambios que se dan al nivel del salón de clase (Cobb, 2000); está incluida dentro de las metodologías de Investigación Basada en Diseño IBD.

primer nivel con el análisis de la implementación de dichas actividades, estos es, un *análisis local* que permite identificar lo que ocurrió en clase y a partir de ahí desarrollar los ajustes para las actividades siguientes e identificar los primeros resultados del trabajo.

La planeación de las actividades inició con la determinación de los contenidos que serían cubiertos con el desarrollo de la intervención en clase así como una descripción de las maneras en que se espera discurra el aprendizaje (la *conjetura*); en esta parte fue importante tener en cuenta lo que el profesor, y el colegio, tenían planeado para trabajar con los estudiantes.

La conjetura es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes (Confrey y Lachance. 2000). Cobb (2000) afirma, al estilo del ya conocido símil de la moneda, que una conjetura tiene dos partes diferentes pero estrechamente ligadas y que se conjugan al momento de formularla. Se tienen entonces la dimensión del contenido y la dimensión pedagógica de la conjetura; la primera asociada a qué se debe enseñar y la segunda a cómo se debe hacerlo. Todo lo anterior se concreta en la formulación de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*².

En el macronivel, se estudia toda la secuencia completa de enseñanza, todos los elementos que constituyeron la planeación del experimento y sus diversas actividades de clase así como los detalles de su implementación; se trata de crear conexiones, relaciones y explicaciones entre la teoría local que guió el diseño y la implementación de las actividades, para tratar de explicar la forma en que las trayectorias de aprendizaje y las conjeturas respondieron a lo esperado en el experimento de enseñanza; esto se realiza mediante un *análisis retrospectivo*.

Fundamentos de la propuesta

La propuesta de actividades -trayectorias- se organiza siguiendo lo señalado por las dos dimensiones de la conjetura: en el qué enseñar se incluyen reflexiones de orden matemático (sistemas geométricos) y curricular (pensamiento espacial); en el cómo enseñar se introducen consideraciones de orden cognitivo y semiótico. Se presentan a continuación algunos detalles de lo anterior.

La geometría euclidiana es parte importante en el trabajo que sobre el pensamiento espacial se hace en la escuela. Así, la formación de los estudiantes se organiza –según lo señalado por los Estándares- en relación con los sistemas geométricos “Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos.” (MEN. 2006, p. 62). Es decir, estos sistemas están constituidos a partir de tres componentes: los objetos geométricos, las operaciones entre ellos y las transformaciones de las que son susceptibles dichos sistemas.

Para alcanzar lo propuesto por el MEN las escuelas definen acciones que se estructuran fundamentalmente desde una mirada conceptual, es decir, se organiza la propuesta de enseñanza

²Siendo un concepto nuevo, como ocurre con tantos otros en educación matemática, no se encuentra aún un consenso entre los miembros de la comunidad en relación con su definición y alcance. En este trabajo se parte de la acepción de dada por Confrey & Maloney (2009) “... a researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e., activities, tasks, tools, forms of interaction and methods of evaluation)...” p. 347

alrededor de las exigencias que la estructura formal del concepto presenta. Esta decisión, que está ampliamente sustentada, ha logrado darle sentido a las prácticas escolares en los últimos años; sin embargo, parece posible ampliar la mirada e incluir en estas exigencias aquellas que la actividad geométrica le impone a los estudiantes, en particular se considera que desde un punto de vista cognitivo (Duval, 2001) es necesario incluir aspectos relacionados con los procesos de construcción, visualización y razonamiento.

Se puede iniciar haciendo entonces una reflexión en relación con los procesos de visualización involucrados en la actividad matemática. El trabajo que se propone en geometría ha de estar asociado necesariamente con el desarrollo de las capacidades de visualización que debe construir un estudiante. Una primera caracterización de este proceso señala dos tipos de visualización: la icónica y la no icónica (Duval 2010).

La visualización icónica supone un acceso a las figuras geométricas del mismo modo en que sucede en otras representaciones gráficas por fuera de las matemáticas. En geometría el reconocimiento icónico de las figuras requiere de “una figura particular que sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo” (Duval, 2004, p. 168). Sin embargo, el asunto fundamental en la entrada icónica a la visualización de una figura, en geometría en particular, tiene que ver con el hecho de que en esta las formas reconocidas aparecen estables, es decir, aparecen como si no fueran susceptibles de ser transformadas; al ser representaciones y sabiendo que la potencia de toda representación no está solo en el hecho de poder dar acceso a cierta información, sino que su potencia como signo radica en el hecho de poder transformarse y expresarse de modos distintos, esta estabilidad que la visualización icónica da a las figuras se convierte en algo que ha de ser superado para realizar un aprendizaje significativo de la geometría.

Es claro pues que uno de los primeros retos que ha de enfrentar una propuesta de trabajo en clase de geometría es la de apoyar el desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante alejarse de una visualización icónica de las figuras. Un primer paso en este sentido es entonces comprender la naturaleza de la visualización no icónica, Duval (2004) afirma:

La visualización no icónica... permite reconocer las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que hayan sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas que declaran lo que representa una figura. (p. 168)

Desarrollar en los estudiantes esta forma de ver que activa, por decirlo de alguna manera, la realización de tratamientos sobre las figuras, que pueden conducir a la solución de un problema, o que por lo menos dan lugar a procedimientos de búsqueda de dicha solución, se constituye en el objetivo que se quiere alcanzar en el proceso de aprendizaje de la visualización en geometría. Esta forma de ver una figura se asocia con distintas transformaciones sobre las figuras; unas tienen que ver con descomponer una figura en otras figuras (subfiguras), otras tienen que ver con la posibilidad de descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior. Las primeras se conocen como modificaciones mereológicas y las segundas como un proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

En la construcción de una figura la producción de un trazo está asociada a dos elementos: una instrucción que recoge un pedido en relación con aquello que se quiere construir y la movilización de una propiedad geométrica en relación con el o los instrumentos que se van a

emplear. Estos elementos dan lugar a lo que Duval (2005) ha llamado *trazos auxiliares* y *trazos reorganizadores*. Se tiene aquí un punto de encuentro entre la construcción y la visualización: las posibilidades que un estudiante tiene de ver los trazos reorganizadores necesarios para resolver un problema dependen de las capacidades de visualización que haya construido; se puede decir inicialmente que una mirada icónica sobre las figuras claramente no apoya la construcción de ningún trazo reorganizador.

La práctica tradicional de enseñanza de la geometría, en la cual las figuras se consideran evidentes y acabadas, ha dejado por fuera la enseñanza de algunos tratamientos básicos en el registro de las figuras; poder hacer un trazo que la figura no tenía, tan simple como suena, no es una práctica común en las clases de geometría.

Estructura de la propuesta

Se presentan entonces algunas consideraciones generales en relación con las trayectorias de aprendizaje: las situaciones, las actividades y sus conjeturas. Las tres primera situaciones configuran la trayectoria 1, que fue implementada y analizada, y a partir de los resultados de lo anterior se formula la segunda trayectoria, la cual queda como una propuesta para desarrollar futuros trabajos.

En todas las situaciones, las figuras aparecen como representantes de propiedades geométricas y las modificaciones a realizar son de carácter gráfico solamente; además, se propone como objeto de enseñanza la génesis de formas de actuación que lleven a desarrollar los procesos necesarios para entender las figuras en este sentido. Con tareas de construcción se apoya el primer rol asociado a las figuras y de ahí se pasa a los procesos de visualización no icónica para apoyar el desarrollo de las modificaciones mereológicas y de deconstrucción dimensional.

En la primera trayectoria, compuesta por tres situaciones, todas las actividades son de reproducción de una figura, para lo cual se usan instrumentos de construcción no estándar (ilustración 1) (Duval, 2010) o convencionales; son tareas que exigen la producción de una representación gráfica que debe conservar las mismas propiedades que la figura dada.

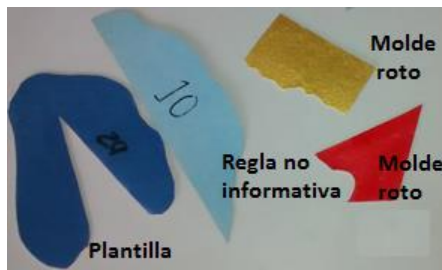


Ilustración 1. Instrumentos de construcción no estándar

Cada situación involucra el desarrollo de *objetos* del sistema geométrico que aparecen directamente asociados a figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rombos, etc.), y se formularon en relación con los estándares para el pensamiento espacial, del grado sexto a noveno (MEN, 2006); es decir, cada situación se asocia con el desarrollo de alguno de los estándares de este ciclo; aunque es claro que una sola situación no agota el desarrollo de dicho estándar. Además, en cada situación se privilegia el desarrollo de alguna operación cognitiva. La situación 1 surge como una adecuación de la propuesta de Duval (2010). Está constituida por cinco actividades en las que se emplean instrumentos de construcción no convencionales en tareas de

reproducción de figuras. La situación 2 consta de cinco actividades. Todas ellas tienen que ver con la reproducción de cuadriláteros empleando instrumentos convencionales (las escuadras) y no convencionales (moldes y plantillas). La situación 3 consta de tres grupos de actividades; en cada una de estas situaciones se daba una figura y la consigna era formular en lengua natural una serie de pasos que le permitan a quien lee o escucha dicho mensaje hacer la reproducción de la figura, conservando forma y tamaño.

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 1

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

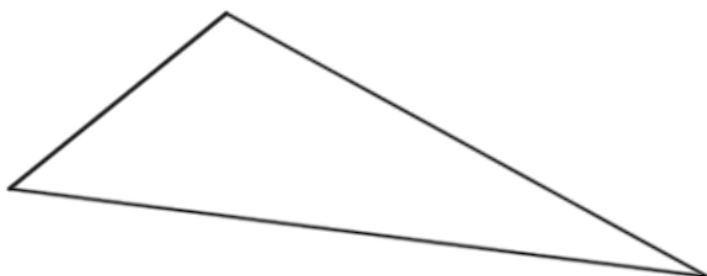


Ilustración 2. Ejemplo de actividad. Es la primera de 3 actividades que conforman la situación 2. En ella se usan una escuadra y la regla no informativa.

Las condiciones sobre lo curricular (Estándares del pensamiento espacial), lo matemático (sistemas geométricos) y los procesos cognitivos introducidas en el diseño se mantienen para todas las situaciones y se resume en la tabla siguiente.

Tabla 1

Condiciones para el diseño de las situaciones

Sistema geométrico	Procesos cognitivos			Estándares pensamiento espacial 6°-9°
	Construcción	Visualización	Razonamiento	
Objetos	S2a1 S2a2 S2a3 S2a4 S2a5	S1a1 S1a4 S1a5 S1a2 S1a3	S3a1 S3a2 S3a3	C ³
Relaciones	S4a1 S4a2 S4a3	S5a1 S5a2 S5a3	S6a1 S6a2 S6a3	J E H I
Transformaciones				

Nota. Cada celda hace referencia a una situación y las actividades que la componen, determina las relaciones de dicha situación con el sistema geométrico (primera columna a la izquierda), con lo

³Se usó una letra para designar cada uno de los Estándares (MEN, 2006) de 6° a 9°: C. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. E. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte, por ejemplo.

curricular (última columna a la derecha) y lo cognitivo (arriba, columnas del centro). La última fila corresponde a elementos de los sistemas geométricos y a estándares que no se trabajaron en esta experiencia, queda como un asunto pendiente para futuros estudios. La antepenúltima fila corresponde a la primera trayectoria, y la penúltima fila corresponde a la trayectoria 2.

En cada trayectoria, y en el marco del experimento de enseñanza, se determinó una conjetura y sus dos dimensiones, en ellas quedan plasmados los elementos y consideraciones que se han señalado para el diseño; por ejemplo, para la situación 1 se tienen las siguientes:

Conjetura: El uso de instrumentos de construcción no convencionales permite que los estudiantes reconozcan las características y propiedades de una figura geométrica. Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras constituyen un escenario ideal para que los estudiantes exploren las diferentes características de una figura geométrica.* Dimensión del contenido: *Los triángulos tienen la característica de ser la figura más simple que contiene ángulos, los cuales son uno de los elementos claves para la determinación de las propiedades de una figura.*

En la segunda trayectoria, se formula en la parte final del trabajo tomando como base los resultados obtenidos en la implementación de la primera (ver abajo, Resultados: micronivel); se presentan algunas generalidades de su diseño.

La trayectoria 2 se compone de tres situaciones, cada una de las cuales responde a una de las categorías que se desprendieron de los análisis locales, se mantiene la relación con algún estándar del pensamiento espacial, y en esta se atiende a las *relaciones* del sistema geométrico (ver penúltima fila, tabla 1). La situación 4 recoge la realización de trazos reorganizadores sobre las figuras como apoyo al surgimiento de nuevas formas de ver; con dichos trazos se puede ver en una figura algo que antes no se veía. La situación 5 pretende apoyar el desarrollo de modificaciones mereológicas sobre las figuras, es decir, avanzar en la comprensión de la aprehensión operatoria. La situación 6 busca el desarrollo de los procesos discursivos de designar, describir y explicar, como formas fundamentales de apoyar el avance hacia la deconstrucción dimensional de figuras.

Resultados

Micronivel

Las situaciones se implementaron en el grado sexto, en el marco de dos trabajos de pregrado de la licenciatura en matemáticas (Bahamón & Bonelo, 2015; Hoyos, 2015) vinculados con el presente trabajo, el autor. Se presenta una síntesis de los resultados de los análisis locales, sobre todo aquellos que encuentran relación con los propósitos del trabajo, se han organizado en dos grandes grupos: los que tienen relación con la actividad de construcción y los que tienen que ver con las actividades de razonamiento y visualización.

Una mirada sobre los datos se hizo atendiendo a los usos dados a los instrumentos, las propiedades de las figuras que se pueden identificar gracias a dicho uso, la relación de estas propiedades y los tipos de instrumentos empleados, el uso de trazos reorganizadores y las posibilidades de avanzar de una visualización icónica a una no icónica, el papel de estos trazos en el desarrollo de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas, y algunas consideraciones sobre las restricciones y cuidados en el uso de dichos instrumentos.

Otra mirada, que no se desarrolla en este texto, tiene que ver con los ajustes al diseño que apuntan al refinamiento del mismo, además de los resultados de los estudiantes.

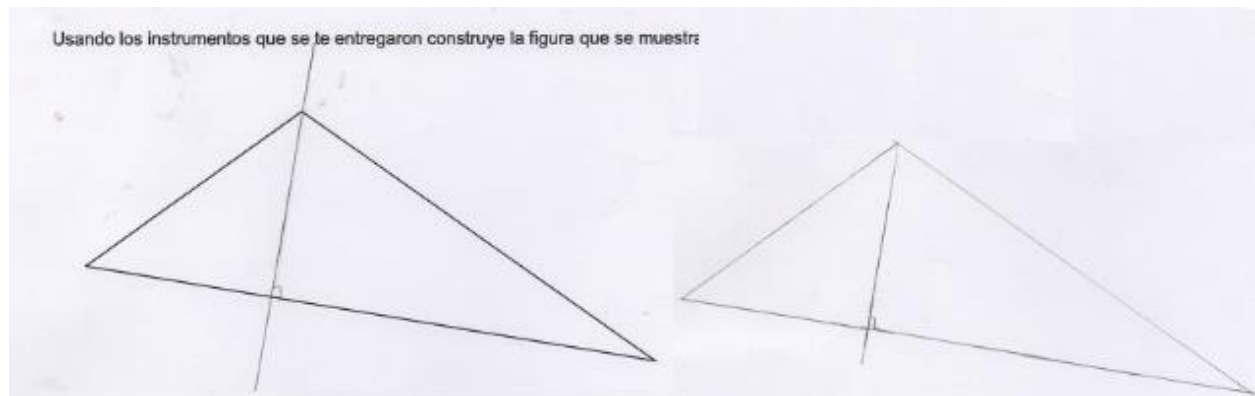


Ilustración 3. Ejemplo de la producción de un estudiante. En la figura dada, el estudiante hizo el trazo de la altura del triángulo; luego, en la derecha, hace el trazo de la base y de la altura, para luego completar las demás partes del triángulo.

Macronivel

Finalizadas las sucesivas intervenciones en clase y sus análisis locales, se inició el análisis retrospectivo que se contempla en la metodología; esto es, se hace una revisión global de los diseños, la implementación y las discusiones y resultados de los análisis locales, con miras a identificar variables que permitan hacer un análisis de las condiciones que produjeron efectos significativos en el diseño y en la implementación. Este análisis además sentó las bases para el diseño de la segunda trayectoria, junto con las actividades de clase respectivas.

Esta revisión permitió identificar las siguientes categorías sobre las cuales se ubicaron la mayoría de las producciones de los estudiantes y que al mismo tiempo daban elementos para atender la pregunta del proyecto y los objetivos del mismo. Así, el análisis permitió que:

1. Se caracterizaran los diferentes usos que los estudiantes dieron a los instrumentos de construcción empleados en las actividades; estos usos se ponen en relación con las características que teóricamente se asignaron a dichos instrumentos.
2. Se determinaran las formas de visualización presentes en el trabajo de los estudiantes, sobre todo el proceso de evolución de lo icónico a lo no icónico.
3. Se identificaran algunos desarrollos en relación con la deconstrucción dimensional de figuras.

Conclusiones

Los resultados obtenidos evidencian las potencialidades de una propuesta de trabajo en clase de geometría basada en el desarrollo de los procesos cognitivos, pues abren una amplia gama de opciones de trabajo con las figuras en geometría; además dejan ver que es posible hacer avanzar a los estudiantes en formas de trabajo que dan cuenta de desarrollos en su conocimiento geométrico al mismo tiempo que construyen formas de actuación y reflexión potentes para la solución de problemas.

El asunto central en los desempeños de los estudiantes es que logran dar el salto dimensional; pasan de ver las figuras de dos dimensiones como unidades figurales, a ver las unidades de una dimensión que las conforman; es decir, ya es claro para la mayoría de ellos que son los trazos de una dimensión los que permiten la construcción de figuras de dimensión superior.

La visualización no icónica se manifiesta sobre todo en el reconocimiento de las subfiguras que surgen al hacer trazos reorganizadores, aunque se debe entender que este reconocimiento no es suficiente para realizar modificaciones mereológicas. Es decir, se logró que los estudiantes hagan los tratamientos que les permiten identificar subfiguras, pero no se establece completamente la aprehensión operatoria.

Los trazos que predominaron en las actividades fueron el trazo de alturas, las cuales siempre llevaban a dividir el primer contorno en otro que contenía triángulos rectángulos. Aparecen diversas formas de lograr dichos trazos. En todos estos casos los trazos nuevos entran a jugar un papel central en el avance desde la visualización icónica a la no icónica.

La visualización no icónica, la que apoya la deconstrucción dimensional, se presentó claramente en las acciones de los estudiantes; aunque restringida a ciertas líneas y no a todo el espectro posible de rectas asociables a una figura. Esto debido a que las tareas que se debían resolver solo requerían de algunas de estas rectas.

Se abre la necesidad de seguir pensando en la relación entre los procesos de visualización y razonamiento, y entre la construcción y razonamiento, pues se ve que los estudiantes presentan serias dificultades para usar un discurso potente en geometría.

Referencias y bibliografía

- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 12 (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.
- Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. A. Kel & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 10 (pp. 231 – 265)
- Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática*, número 2. Cali. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. *M. d. ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales De Didactique Et Sciences Cognitives*. Volume 10 (pp. 5 – 53)
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada sobre las figuras. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis*. N° 27 (pp. 108 – 129).
- Galeano, J. E. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento*. Trabajo de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá, Colombia.