Dominios de la Geometría y del Análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital

[1]Jesús Victoria Flores **Salazar**[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe
Verónica **Neira** Fernández
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
vneira@pucp.pe
Flor Isabel **Carrillo** Lara
f.carrillo@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
Elizabeth **Montoya** Delgadillo[2]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

En la comunicación, se presenta una tarea de modelizaciónsobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación internacional en ejecución,cuya finalidad es promoverla articulación de los dominios de la Geometría y el análisis por medio de la modelización y la tecnología digital.Como referenciales teóricos y metodológicos, setomanaspectos del Espacio de Trabajo Matemático-ETM, ciclo de modelización y de la Ingeniería Didáctica respectivamente; se presenta el análisis apriori de la tareamencionada,puesse está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia; se resalta en el análisis a priori la activación del plano Semiótico-Instrumental[Sem-Ins] y se privilegian los paradigmas Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC), lo que da indicios de la articulación de los dominios de la Geometría y del Análisis.

Palabras clave: modelización, tecnología, función cuadrática, plano [Sem-Ins].

[1] Proyecto de investigación "Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática" (DGI 575/ PUCP).
[2] Fondecyt 1171744 Conicyt-Chile.

Introducción

La comunicaciónpresenta una tarea sobre función cuadrática, que es la adaptación de una tarea de la investigación de Almonacid (2018), y que forma parte de una secuencia didáctica (conjunto de tareas) comopartedel proyecto de investigación "Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática" en el que participan investigadores de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-PUCV y del Laboratorio de Didáctica de la Matemática André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7.

En relación a la noción de la función cuadrática,se debe tomar en cuenta el pensamiento relacional y covariacional (Ozaltun y Bukova, 2017) y, además, la coordinación de las diferentes representaciones de la misma. Por otro lado, en cuanto a la necesidad de incorporar ambientes de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, en la enseñanza de las funciones cuadráticas, las investigaciones de Lima (2016) y también la de Salazar (2015) mencionan que la mediación del GeoGebra facilita, por medio de sus representaciones en las ventanas algebraica y gráfica de manera simultánea, la construcción de la noción de función cuadrática, además de favorecer el análisis y entender la naturaleza variable de la función cuadrática (Ávila,2011). En relación a ello, la investigación de Lagrange y Minh (2016) muestran que los aspectos relacionales, variacional y de coordinación de representaciones mediada por la tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática pueden ser estudiados vinculando dominios de la Matemática, como la Geometría y el Análisis. Por otro lado, Briceño y Buendía (2015) mencionan que la modelización permite vincular conocimientos matemáticos con contextos de la ciencia.

En ese sentido,los recientes trabajos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático-ETM (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016)abren perspectivas nuevas para la investigación y la comprensión y articulación de distintos dominios matemáticos, como se ha evidenciado en los congresos temáticos desarrollados desde el 2009, porque viabiliza el análisis de los diferentes niveles de transposición en la enseñanza de la Matemática gracias a los diferentes tipos de ETM (referencia, idóneo y personal). Tambiénse enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización y seresalta además la necesidad de articular la Geometría con otros dominios matemáticos.

En cuanto al ETM del análisis, este ha sido objeto de muchas investigaciones que incluyen el proyecto ECOS-Sud (2014-2016), desarrollado entre el Laboratorio de Didáctica André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7 y el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad de Valparaíso PUCV de Chile (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). Un fenómeno identificado en ese proyecto de investigación es la perspectiva puntual-global-local del tratamiento que se le da a ciertos objetos matemáticos. Por otro lado, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) muestran que existen estudios en los que se investiga la mediación de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los que se proponen tareas en la que los cambios de dominios matemáticos son fundamentales; sin embargo, no se ha encontrado evidencias sobre investigaciones que articulen estos dos dominios matemáticos mediados por la modelización y la tecnología digital.

Espacio de Trabajo Matemático-ETM,Modelización e Ingeniería Didáctica

En cuanto al marco de los Espacios de Trabajo Matemático (en adelante ETM), permite caracterizar la manera en que las nociones matemáticas adoptan significado en un contexto detrabajo dado. Según Kuzniak y Richard (2014), un ETM es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en el contexto educativo y está basado en la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. El plano epistemológico está compuesto por tres componentes o polos a saber: el representamen, que se constituye de los registros de representación semiótica; los artefactos, que son elementos materiales o simbólicos utilizados y el referencial,que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El plano cognitivo se compone de los procesos de visualización, construcción y prueba.

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante una génesis semiótica, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una génesisinstrumental, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción y una génesis discursiva de la prueba, que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático. Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación dinámica de dos o incluso tres génesis. Por ello, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales, que son el plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].Otro aspecto del ETM que consideramos es la noción de paradigma como "el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico" (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016, p. 7) en un contexto educativo.

En relación al dominio de la Geometría, se introdujeron tres paradigmas: Geometría I (Geometría natural), en el cual hay una relación con el mundo real y la fuente de validación está basada en lo tangible; Geometría II (Geometría natural axiomática), en el cual se pierde la relación a la realidad y se trabaja más bien sobre el modelo geométrico, la fuente de validación están basadas en las reglas axiomáticas y Geometría III (Geometría axiomática formal), donde se genera una separación completa del mundo real y la fuente de validación están basadas en la axiomática elegida. Además, se enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización. En cuanto al dominio del Análisis, específicamente en el paradigma del Análisis Matemático estándar, se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis Calculatorio (AC), en el que las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos y, finalmente, Análisis Real (AR), que es caracterizado por una mirada global a las características de la noción matemática, con reglas que dependen de la topología usada.

Con respecto a la modelización, Blum y Borromeo Ferri (2009) explican que el desarrollo de la habilidad de modelizar moviliza nociones y objetos de los distintos dominios de las Matemáticas. En ese sentido, para la modelización de la tarea sobre función cuadrática,se toma en cuenta el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007). De acuerdo con este ciclo, la situación real debe ser entendida para poder formular el problema (1). Para conseguir un modelo real, es necesario que previamente sea simplificada y estructurada (2). Por medio de supuestos, generalizaciones y formalizaciones, se realiza la matematización (3). Después, se trabaja matemáticamente (4). Posteriormente,la solución matemática debe ser interpretada (5). En la situación inicial, para lograr una solución real, seguidamente, se valida (6) todo el proceso y se muestra que la solución real resuelve el problema y que el modelo es el apropiado o que el modelo debe ser rediseñado en una nueva circulación por el ciclo. Por último, el proceso de solución debe ser divulgado (7).

En relación a los aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID),Artigue (1995)la refiere como "un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Las cuatro fases consideradas en la ID son análisis preliminar (fase 1), concepción y análisis a priori (fase 2),experimentación (fase 3), análisis a posteriori y validación (fase 4), siendo esta interna ya quees la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Los aspectos de la ID que se utilizan en la investigación son coherentes con la construcción, implementación y valoración de las tareas (secuencia didáctica) de la investigación. En ese sentido, en la fase 1 de la ID se realiza la revisión de literatura sobre el objeto de estudio, modelización, tecnología digital y aspectos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático que cimientan la investigación. En la fase 2, se construyen las tareas (secuencia didáctica) que deben ser lo suficientemente abiertas para permitir diferentes interpretaciones y el uso de diferentes ETM y deben poder modelizarse y resolverse con la mediación de tecnología digital, tanto en Geometría como en análisis. Cabe resaltar, que se presenta una tarea de modelización sobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación en ejecución, ya que se está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia. Posteriormente, se debe desarrollar lo que corresponde a las fases 3 y 4 de la ID,que están programadas para abril 2019, tanto en la PUCP/Perú como en la PUCV/Chile. En esta parte es que seaplican las tareas de la secuencia, para identificar si cumple con el propósito para la que fue construida. Es bueno destacar que, para realizar el análisis a posteriori, se debe organizar los datos recolectados. Para ello, se debe codificar la información de modo que se puedan encontrar, por ejemplo, similitudes, diferencias y/o conexiones entre ellos con el fin de poder identificar y analizar la articulación de los conocimientos matemáticos en los dominios de la Geometría y del Análisis.

La tarea de modelización

Se presenta la tarea (ver figura 1) y, en base a esa información, se estructuran tres etapas para el desarrollo de la misma, según el ciclo de modelización.

Los estudiantes de un Centro de Música de una universidad peruana, con motivo de la semana de aniversario institucional están organizando un concierto, de "acceso libre" al público. En él, participarán solistas y grupos de hasta ocho integrantes, entre cantantes y músicos.

Para para la presentación del concierto se cercará un escenario de forma rectangular (ver figura abajo); pero, no será necesario cercar la parte en frente del público. Se sabe que el Centro dispone de tarimas, escaleras y cercas para 24 m de perímetro.

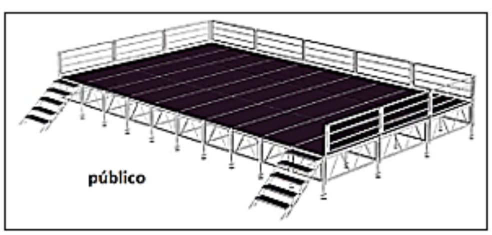

Figura 1. Tarea de modelización (Almonacid, 2018)

Primera etapa: está orientada a identificar los valores que intervienen, la relación entre ellos y la naturaleza del comportamiento del modelo implícito y clasificamos en la etapa 2 del ciclo de modelización. Para ello, se solicita que se abra el archivo GeoGebra *representación_dinámico1.ggb* (ver figura 2) y que se realicen una serie de acciones como arrastrar el deslizador y utilizar la hoja de cálculo para relacionar los valores de los lados, etc.

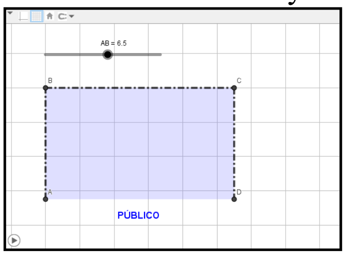

Figura 2. representación_dinámica1 (Almonacid, 2018)

Se espera, a priori, que a partir de la manipulación de los artefactos deslizador y cuadrícula se realicen exploraciones y sea posible conjeturar y validar que el valor que está variando es el área y ésta lo hace en función de la medida de la longitud del segmento AB. Estas acciones, evidenciarían la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que, al utilizar nociones de longitud de segmento y medida de área, se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI);sin embargo, también se realizan tratamientos aritméticos elementales, lo que indica que también el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (AI) está siendo privilegiado.

Segunda etapa: tiene como propósito determinar la expresión matemática que modelice la medida del área del escenario en función de la longitud del segmento AB. Para ello, se debe tener en cuenta sus representaciones en el registro tabular y gráfica. Se clasifica esta etapa en la etapa 3 del ciclo de modelización.A priori, se podrían presentar dos procedimientos diferentes: el primerotoma en cuenta las representaciones figural y tabular y el segundo las representaciones tabular y gráfica (ver figura 3) para hallar el modelo matemático solicitado.

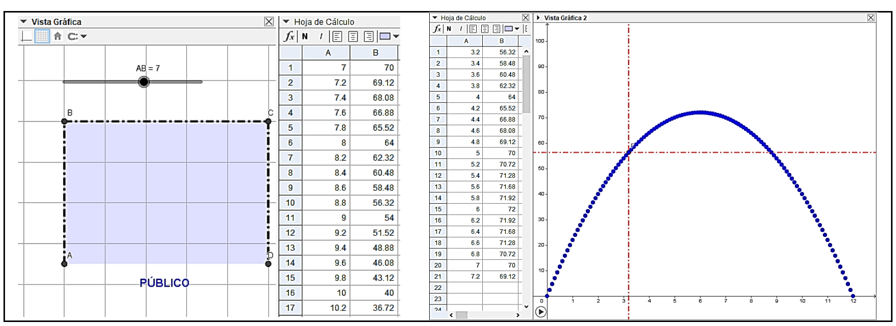

Figura 3. Primer y segundo procedimiento a priori (Almonacid, 2018)

Con el primer procedimiento, se espera que se continúe activando la genesis semiótica en el dominio de la Geometría, ya quepor medio de la fórmula del área de un rectángulo se reemplacen las longitudes de los lados del rectángulo de la siguiente manera:$Área = AB \times BC$

$$\text{Área} = (x)(24 - 2x)$$
$$\text{Área} = 24x - 2x^2$$
$$A(x) = 24x - 2x^2$$

Para finalmente,$A(x) = -2x^2 + 24x$ donde $x \in < 0,12 >$

En base a la percepción de la Vista Gráfica y los valores en la hoja de cálculo, el uso de la fórmula de medida de área de la región rectangular, la noción de función y los tratamientos algebraicos realizados,en el sentido del ETM, es posible afirmar que se activa el plano [Sem-Ins] y que está en proceso el cambio del dominio de la Geometríaal del análisis; sin embargo, a diferencia de la etapa anterior, el paradigma privilegiado es del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).Con el segundo procedimiento, se espera que se consideren algunos datos proporcionados en la hoja de cálculo. Por ejemplo:

$x = 5$, y su correspondiente valor $f(4) = 70$
$x = 6$, y su correspondiente valor $f(4) = 72$

Luego, se evalúen los valores en el modelo cuadrático de la siguiente manera:

$$f(5) = 25a + 5b + c = 70$$
$$f(6) = 36a + 6b + c = 72$$

Mediante tratamientos algebraicos se resuelva el sistema de ecuaciones y se hallen los valores de los parámetros de la función cuadrática ($a = -2,\ \ b = 24$ y $c = 0$).Posteriormente, se exprese el modelo matemático: $f(x) = -2x^2 + 24x$, donde $x \in < 0{,}12 >$.

Otro procedimiento (estrategia) es que el estudiante haga interpretaciones desde la gráfica y reconozca la función cuadrática, con esto hay un cambio al dominio del análisis (o cálculo).En este sentido, se puede dar*estrategia 1:* identificar el vértice de la parábola y, basados en la simetría que le entrega la curva (AG) o bien, determinar su vértice V = (-b/2a, f(-b/2a), lo cual lo clasificamos en el paradigma AC. O la *estrategia 2:* identificar el máximo usando derivadas en la función *f*(x) = $24x - 2x^2$(derivar, igualar a cero, encontrar los puntos críticos y evaluar para determinar el máximo en este caso). Para el presente caso, clasificamos esta posible respuesta en el paradigma AC.Sea con cualquiera de los dos procedimientos, se espera, a priori, que se relacione la medida del segmento BC en función del segmento AB, se consideren las restricciones del segmento AB y que la coordinación de estos registros (figural, tabular y/o gráfico) permita construir el modelo matemático del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Al igual que en el procedimiento anterior, con este procedimiento se evidenciaría también el cambio de dominio de la Geometría al dominio del Análisis. En ese sentido, el paradigma privilegiado, en este, es el del Análisis Calculatorio (AC).

Tercera etapa: se solicita que en la barra de entrada de la vista gráfica del GeoGebra se ingrese la expresión matemática anterior y que se configuren los ejes X e Y, en escala de 1:10, y se pregunta:*Después de hacer un análisis sobre la cantidad máxima de integrantes e instrumentos que se presentarán en el concierto,se ha concluido que el área del escenario debe medir 70 m^2. Este año los encargados de armar el escenario renovarán las cercas de los lados AB y CD y comprarán nuevas cercas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del escenario si se busca ahorrar en los costos del concierto?*

A priori,una de las posibles estrategias que se espera es que se ingrese la recta constante $y = 70$ a la barra de entrada y con la herramienta perpendicular y punto de intersección, se identifiquen los puntos de intersección $A(5; 70)$ y $B(7; 70)$de la representación gráfica de las rectas con la función cuadrática, como muestra la figura 4, lo que permite dar respuesta a la pregunta planteada.

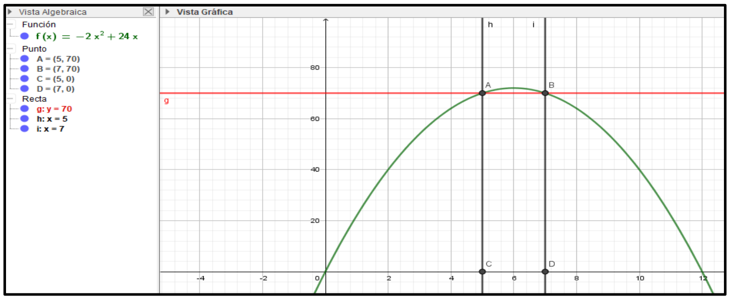

Figura 4. Tercera etapa a priori (Almonacid, 2018)

A partir de la activación de la Vista Gráfica, el uso de herramientas gráficas, como lo son puntos y rectas, se puede afirmar que el paradigma priorizado por los estudiantes, en esta estrategia, es el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Algunas consideraciones

La tarea presentada, en base alos aspectos de la Ingeniería Didáctica y al ciclo de modelización,está organizada en tres etapas. Así, la primera etapade la tarea está relacionada a los procesos de construcción, simplificación/estructuración y matematización dirigida al reconocimiento de variables, relación entre ellas y reconocimiento del comportamiento de la función implícita; la segunda etapa está compuesta del trabajo matemático para hallar el modelo matemático y, finalmente, la tercera fase relacionada a la interpretación y validación del modelo matemático encontrado.

En cuanto al análisis a priori de la tarea, que se realiza con base en el ETM y en el que se evidencian las fases del ciclo de modelización, en la primera etapa se privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) y de la Geometría Axiomática Natural (GII).

En cuanto a la segunda y tercera etapa, se privilegianlos paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

En las tres etapas, se espera activar todo el ETM y sus planos y la articulación de los dominios de la Geometría y del análisis. El problema planteado parte de la etapa 2 del ciclo de modelización, por lo tanto, en la fase de experimentación de la ID, se espera una discusión en cuanto a los materiales y cuestiones de la realidad que pongan de manifiesto un problema real y no sea uno que comienza desde la etapa 2 del ciclo de modelización.

En términos del ETM, estos problemas son llamados tareas emblemáticas que luego, con la modificación a lo real, se pueda enfrentar así a los estudiantes a un problema de modelización con la tecnología digital como mediador en la articulación de dos dominios matemáticos.

Agradecimiento: A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto “Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática”. ID-575/DGI-PUCP.

Referencias y bibliografía

Almonacid, A. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades.* Tesis del grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Artigue, M. (1995).Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, P. E. (2011). *Razonamiento covariacional a través del Software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática* (tesis de maestría). Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/6765/1/43480455.2012.pdf

Blum, W., &Borromeo Ferri, R. (2009).Mathematical Modelling: ¿Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), *45-58.* Obtenido de http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Blum, W. y Leiss, D. (2007).How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? En Haines y otros (eds.) *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics,* 222-231. Chichester: Horwood Publishing.

Briceño, O. A., & Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (45), 65-83. Obtenido de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/viewFile/656/1189

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9 – 24. Obtenido de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 17(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737.

Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), pp. 235-249. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15.pdf

Lagrange, J.-B., & Minh, T. K. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM MathematicsEducation,* 48, 793–807.

Lima, E. (2016). *Sequência didática usando o Geogebra na aprendizagem de função quadrática no ensino fundamental II*,(tesis de maestría). Manaus-Am., Brasil: Universidade Federal do Amazonas. Obtenido de https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5551

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014).Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739–754.

Ozaltun, A., &Bukova, E. (2017).Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1)*, 122-134.*

Salazar, J. V. F. (2015).Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Unión.* (41), 57-67. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf