XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Recreando el triángulo de Pascal

Luís Eduardo **Guerra** Betancourt
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Lewisedward1984@gmail.com
Yannely Del Valle **Núñez** Ruiz
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Yanunez2@gmail.com

Resumen

Este taller está orientado a la presentación y estudio de ciertos referentes teóricos geométricos (semejanza y simetría) y estrategias didácticas circunscritas al Triángulo de Pascal, permitiendo un aprovechamiento algebraico, desde diversos análisis provenientes de investigaciones recientes como la de Usón y Ramírez (2006) que enriquecen su estudio con relaciones geométricas, entre otras, que surgen a partir de las discusiones generadas en el aula. Además, se observan ilustraciones, propuestas en diversos textos, que muestran dicho triángulo con aplicaciones diversas, en cuadrículas, en fractales, y otras opciones didácticas que de forma amena revelan nuevas relaciones y series numéricas asociadas a las formas geométricas, en lo histórico se revisa la biografía de este matemático, anécdotas y otros personajes vinculados a la época. Las herramientas que serán proporcionadas, facilitarán la visualización de aspectos teóricos de este objeto matemático y la generación de problemas atendiendo la contextualización intra y extra matemática (fractales).

Palabras clave: Triángulo de Pascal, Contextualización, Didáctica, Geometría.

Introducción

El Triángulo de Pascal, constructo matemático vinculante en diversas áreas de esta disciplina, es un elemento fascinante y enriquecedor desde el punto de vista didáctico, donde se puede mostrar en diversas opciones como material de trabajo fundamentado en los conceptos geométricos y algebraicos que contemplan las asignaturas relacionadas con el área. El estudio de este tema permite dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría plana con una perspectiva que haga aflorar la creatividad en los actores involucrados en esta tarea, con la inclusión de los conceptos de la geometría fractal entre otras áreas de las matemáticas.

Con el taller se han planteado una serie de objetivos tales como: dar a conocer ciertos referentes teóricos donde es aplicable el Triángulo de Pascal, hacer un análisis de tópicos geométricos en relación con el Triángulo de Pascal, visualizar la integración de este constructo matemático en relación con otras áreas de las matemáticas, presentar recursos didácticos referentes al Triángulo de Pascal en relación con diversas áreas de las matemáticas, reconstruir ciertos conceptos geométricos a partir del estudio del Triángulo de Pascal.

Para alcanzar los objetivos planteados, se presentarán diversas actividades que permitirán la articulación e integración de diversos referentes teóricos y didácticos de las Matemáticas en relación con el Triángulo de Pascal.

Pretendiendo así, generar un aula taller, en la que se aspira que cada participante construya y descubra sus propios alcances de aprendizajes, dándole espacio al asombro de generar la novedad en lo que se realiza, para ello se propone un plan de acción donde se busca: a) Complementar cada construcción geométrica con los patrones numéricos sugeridos, b) Resaltar las observaciones que emergan de la discusión sobre los triángulos ya elaborados, c) Constrastar las relaciones con lo fractálico y d) Presentar las construcciones realizadas y su aprovechamiento didácticos.

Referentes teóricos

Son diversos los matemáticos a los que se les acuña el descubrimiento del triángulo aritmético, presentado en la época del renacimiento, que, aunque lleva el nombre del genial matemático Pascal, fue usado anteriormente por otros como Tartaglia, Stifel y Stevin (Ruíz, 2009), luego existió la expansión para $(a+b)^n$ con n entero, que es el llamado teorema del binomio, relacionado con el triángulo, el cual también era conocido por los árabes del siglo XIII. Es por esto que en diversas ocasiones a este aporte matemático se le conoce con el nombre de triángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal

El matemático italiano, Nicola Fontana, que nació en el año 1499, conocido como Tartaglia (por su tartamudez) adquirió una reputación de matemático prometedor. A este matemático se le vincula con el estudio de este triángulo aritmético, debido a que según diversos acontecimientos históricos y primeramente en 1535, se dio una competencia entre Tartaglia y Fior, este último un estudiante de Del Ferro que cuando estaba en el lecho de muerte le informó a su pupilo como resolver una ecuación cúbica. Fior confiado por la información que su maestro le había transmitido, sometió a Tartaglia a una serie de preguntas acerca de estas ecuaciones y en menos de dos horas Tartaglia pudo resolverlas. Fior perdió la competencia. Cardano, que presenció la competencia, le solicitó a Tartaglia su solución para incluirla en su libro, a lo que Tartaglia se negó. En 1539, viajó a Milán a visitar a Cardano y en esta ocasión le reveló la solución. Tiempo después, Cardano junto a su asistente Ferrari publicarón las fórmulas y otras derivaciones de éstas y se acreditó a Del Ferro y a Tartaglia el descubrimiento (Ruiz, 2003 y Rey Pastor y Babini,1997).

Pascal es un matemático, cofundador junto a Fermat en el siglo XVII de la teoría matemática de probabilidades, considerada como uno de los cinco progresos progresos principales en el origen de la matemática moderna (Bell, 1949), a parte de dar aportes posteriores junto a Desargues hacia la Geometría Proyectiva Sintética, para su invención, la cual se atenuó hasta principios del siglo XIX, él fue un matemático de grandes alcances, aunque al igual que a Descartes y Leibniz se le recuerde popularmente por otras cosas, pero Pascal fue aún más genuinamente precoz que este último. De muchacho no fue una simple esponja que absorbiera el saber de los demás, sino un matemático creador. A los doce años redescubrió y demostró para sí mismo varios de los teoremas más sencillos de la geometría elemental, por lo cual es de visualizar que su aporte hacia el triángulo aritmetico podría contener enriquecimiento geométrico.

Inmerso dentro de la didáctica, se ha buscado predominar, dentro del ámbito escolar, la contextualización de los contenidos presentes en el triángulo de Pascal, ya sea desde lo intramatemático como lo extramatemático, resaltando comunmente los contenidos algebráicos y aritméticos (Carrrera, 2010), pero desde un enfoque social y natural podria adaptarse al campo geométrico, su desarrollo externalista en proximidad, está dado en el uso de las combinaciones en la vida cotidiana, aunque desde el punto de vista de la naturaleza y el acercamiento de este contenido a lo fractálico, es posible la visualiación del mismo a través de estos ámbitos teóricos.

El triángulo de Pascal es una construcción aritmética partiendo de la suma en donde se consideran los siguientes pasos:

Se inicia colocando el número uno (1) en la fila cero (0)

1 ⟵ fila 0

Luego, debajo, se coloca en la siguiente fila dos uno (1) a los lados del superior

1
1 **1** ⟵ fila 1

En las siguientes filas escribimos un 1 en cada extremo y cada número interior es obtenido sumando los dos que están encima de él

1
1 **1**
1 **2** **1** ⟵ fila 2

Así sucesivamente se va continuando, hasta obtener el famoso triángulo de Pascal o Tartaglia que se aprecia en la figura 1.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 27 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Figura 1. Triángulo de Pascal o Tartaglia

En Iran este triángulo se le conoce como el triángulo de Khayyan (1048-1131), en china se le conoce con el nombre de triángulo de Yang Hui (1238-1298), pero las referencias existentes desde hace 200 años, hacen ubicar al mismo en el renacimiento, otorgándole esta originalidad a Pascal y Tartaglia (Duarte A., Moya A. y otros; 2014b).

Otro concepto vinculante en la presente investigación es lo referente al termino fractal, que fue acuñado por Beniot Mandelbrot, en 1975, para describir formas complejas y este proviene del adjetivo latino fractus que significa “interrumpido”, “irregular” o “fraccionado” y en cierta forma los objetos provenientes de la naturaleza poseen esta característica (Carrera, 2010), en si un fractal es una figura geométrica en la que un patrón se repite pero siempre disminuyendo la escala. Es por esto que los fractales son semejantes entre sí, entre los más conocidos están, el pentágono de Durero, el árbol de Pitágoras, la esponja de Menger, la alfonbra, el triángulo y tetraedro de Sierpinski. (Mandelbrot, 1996 y Martínez, 1994)

Metodología del taller

El desarrollo del taller se hará en dos partes, la primera basada en un recuento histórico de la generación de este famoso triángulo y los personajes a los cuales se refiere, segundo se propondrán una serie de actividades vinculantes a diversas formas de apreciar el triángulo de Pascal dentro de las matemáticas, desde la parte aritmética, pasando por la algebraica hasta llegar a la geométrica, buscando que las personas participantes conozcan y ejecuten diversas propuestas de trabajar este constructo matemático dentro de su abundante enriquecimiento en problemas y curiosidades, propicios para la generación de una didáctica integrativa de lo intramatemático

Actividades sugeridas

Actividad 1. Triángulo y Cuadrados de cifras de uno (1)

En esta actividad se apreciará las curiosidades presentes entre las cantidades resultantes de los cuadrados de cifras de 1, primero observese bien la construcción de los siguientes cuadrados:

Fila	Potencia	Resultado
0	1^2	1
1	11^2	121
2	111^2	12321
3	1111^2	1234321
4	11111^2	123454321
5	111111^2	12345654321
6	111111^2	1234567654321

En el desarrollo de estas potencias se evidencia una distribución, que es una de las curiosidades de los números, simétricos entre sí, denominados palíndromos, los mismos pueden leerse bien de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, esta relación que se presenta también se observa en el triángulo de Pascal pero con cifras desvinculadas (Ver figura 3).

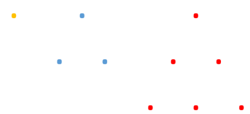
Actividad 2. Triángulo de Pascal, los Números y sus formas

En esta actividad se busca observar las cantidades presentes en cada diagonal con la denominación de los números triangulares y cuadrados, como también otras cantidades que se evidencian en el triángulo.

Los números triangulares o cuadrados, conocidos como guijarros (García, 2006) son aquellos que se les denomina por la forma de agruparse ya sea en forma de triángulos (triangulares) o en forma de cuadrados, los griegos se dieron cuenta que en los primeros se obtenían con sumas de números naturales consecutivos. Los números cuadrados resultan de los cuadrados perfectos pero los griegos se dieron cuenta debido a la forma en que se distribuían las piedras para formar un cuadrado.

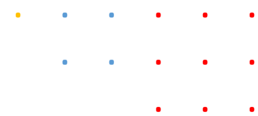
Número Triangulares

1, 3, 6, 10, 15, 21 ....



Números Cuadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36....



Apreciando el triángulo de Pascal, es posible observar la disposición de los números triangulares, en forma diagonal a partir de la segunda fila en dicho triángulo y los cuadrados son los resultantes de sumar dos de estos números triangulares consecutivos, dispuestos en la misma diagonal.

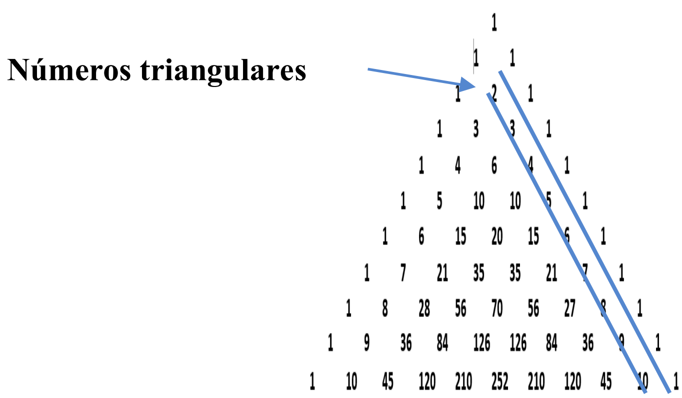


Figura 2. Triángulo de Pascal o Tartaglia y números triangulares

Números Cuadrados

1, 1+3 = 4, 3+ 6 = 9, 6+10 = 16.....

Estas no son las únicas clases de números que podemos encontrar en el análisis interno del Triángulo de Pascal, también podemos encontrar números naturales, tetraédricos, entre otros, formas que dependen de figuras bidimensionales y tridimensionales (Usón y Ramírez, 2006).

Actividad 3. Triángulo de Pascal y el Fractal.

En esta actividad se busca apreciar la relación de este triángulo con algunos contenidos geométricos, tales como la simetría, geometría fractálica, resaltando ciertas cantidades presentes en el triángulo.

Primeramente podemos apreciar en el triángulo de Pascal la existencia de un eje de simetría vertical (Ver Figura 3), término matemático muy utilizado en la naturaleza y en la geometría (Weyl, 1975).

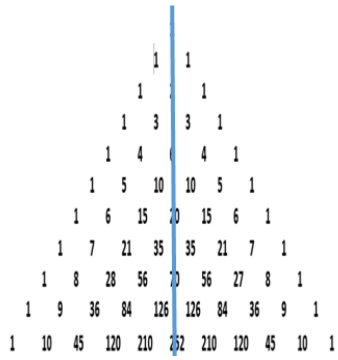


Figura 3. Eje de simetría sobre el Triángulo de Pascal

Para esta actividad, es necesario ubicar los números pares e impares en el triángulo, a los impares le asignaremos el número uno (1) y a los pares el número cero (0), tal como se aprecia en la Figura 4.

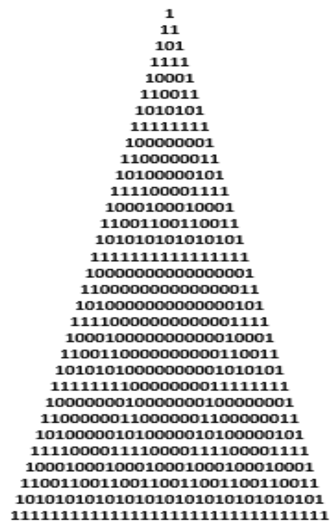


Figura 4. Triángulo en ceros y unos

Se resalta en la distancia ciertos triángulos formados por los ceros (0), de diversos tamaños, pero semejantes entre si.

Figura 5. Triángulo de Pascal en ceros y unos (coloreado)

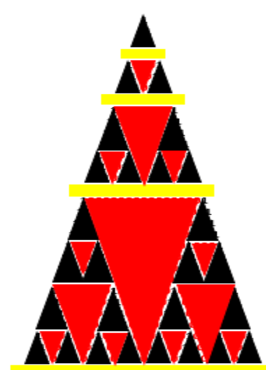


Figura 6. Generación del Triángulo de Sierspinski

Este triángulo que se ha formado (ver figura 6) es semejante al popular Triángulo de Sierspinski, fractal que se puede construir a partir de un triángulo equilátero, generando triángulos interiores cuyos vértices están en el punto medio de los lados. En este momento de aprovechar para el estudio en geometría fractálica de temas como semejanza, proporcionalidad y congruencia.

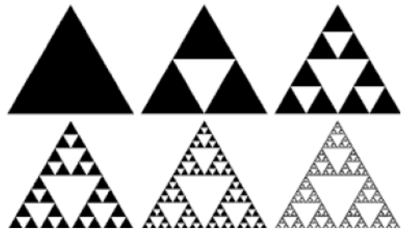


Figura 7. Triángulo de Sierspinski

En la anterior construcción sobre el triángulo de Pascal, se podría decir que la transformación de los impares a uno (1) y los pares a cero (0) es el resultado de dividir cada elemento entre 2 y sustituirlo por el resto de la división. Caso interesante seria seguir haciendo estas divisiones de las cantidades del triángulo de Pascal a ver que sucede, por lo cual se procede a estudiar el caso en que la división sea entre tres (3) y cada valor del triángulo sea sustituido por el resto de la división (ver figura 8). En el mismo se observa la relación de autosemejanza de un fractal (ver figura 9) evidenciada en parte en similitudes existente de acuerdo a las cantidades.

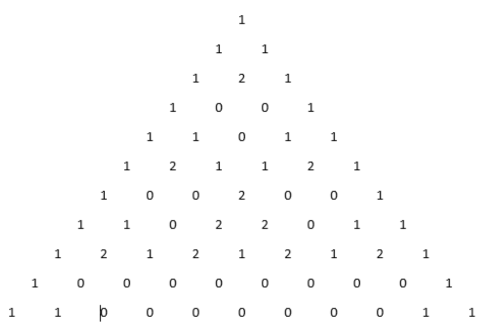


Figura 8. Triángulo de Pascal en cociente

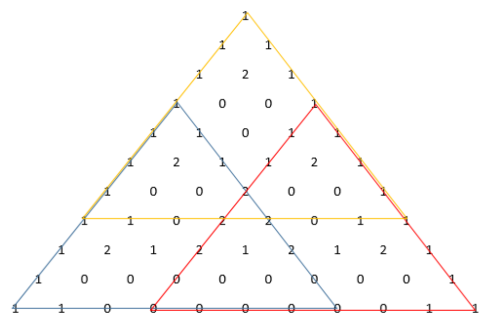


Figura 9. Triángulo de Pascal en cociente 3 autosemejanza

Actividad 4. Triángulo de Pascal y Geometría.

En esta actividad se busca apreciar dentro del triángulo de Pascal las diversas cantidades de rectas y diagonales de polígonos presentes en n puntos.

Observemos primero las rectas que pasan por n puntos no colineales, distribuidos exactamente de manera de obtener un polígono regular y las diagonales presentes.

Número de puntos	**Número de rectas**	**Número de Diagonales en el polígono**
1	infinitas	0
2	1	0
3	3	0
4	6	2
5	10	5
6	15	9

7	21	14

En el triángulo de Pascal, si observamos detenidamente aparece esta relación. Cuando se observa en los elementos seleccionados que el valor de la izquierda corresponde a el número de puntos y el de la derecha (ver figura 10) a las rectas que pasan por él, y si ejecutamos la sustracción entre los mismos nos darán el número de diagonales del polígono determinado por dichos puntos.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Figura 10. Triángulo de Pascal resaltando relación de rectas y puntos

Consideraciones finales

Son diversas las contribuciones de este constructo hacia las áreas de las matemáticas, más que todo en la probabilidad, con aportes a la teoría combinatoria (Brett, 2003), en el álgebra, visto hacía el desarrollo de los productos notables, y en la combinación de ambas, durante el estudio del binomio de Newton y los Multinomios (Rodríguez, 1995). Dentro del área de la geometría su desarrollo ha sido a través de los aportes con los números y sus formas, las líneas en los polígonos y los fractales, que están presentes en situaciones cotidianas generalmente a través del arte y la naturaleza. Son muchos los aportes que hacia la construcción de nuevas actividades en torno a este constructo se pueden hacer, pero para el tiempo requerido es necesario la adecuación acertada de ciertas actividades concretas.

Referencias y bibliografía

Bell E. (1985). *Historia de las matemáticas*. Traducido de Ortiz R. 2da ed. México: FCE.

Brett,E. (2003). *Actividades de Matemática II* Cs. C.D. JOHNEVE; Caracas.

Brook, F. (1995). El triángulo de Pascal una fuente de inspiración (I). *Revista Números* 26; 27-36.

Carrera I. (2010). Matemática Maravillosa. Caracas: Fundación Polar.

Duarte A., Moya A. y otros (2014a). Naturaleza Matemática 4to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

Duarte A., Moya A. y otros (2014b). La Matemática y el vivir bien 5to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

García L. (2006). *La sonrisa de Pitágoras*. Barcelona: Debolsillo.

Mandelbrot, B. (1996). *Los Objetos Fractales*. Matatemas 13. Libros para Pensar La Ciencia. 4ta. Edición. Barcelona - España.

Martínez, J. (1994). Los Conjuntos de Mandelbrot, de Julia y la Familia de Transformaciones No Lineales. *II^{as} Jornadas Andaluzas de Didáctica de las Matemáticas*. Epsilon Nº 2. 81-88.

Rey Pastor y Babini (1997). *Historia de la Matemática* Vol. II.. España: Editorial Gedisa.

Rodríguez J. (1995). *El arte de contar*. Mérida: Kariña Editores.

Ruiz A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa rica. EUNED.

Usón, C. y Ramírez A. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI). *Revista Suma*. 53; 53-60

Weyl, H. (1975). *La Simetría*. Barcelona. España: Promoción Cultural, S.A.