Una problematización del concepto de topología en su dimensión epistemológica

Gabriela **Márquez-García**
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gabriela.marquez@cinvestav.mx
Gisela **Montiel** Espinosa
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Se presenta parte de una problematización del concepto de topología, realizada desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Escolar. Esta investigación se centra en la búsqueda de ideas germinales, usos y significados del concepto de topología relacionada con la noción de *relación de proximidad*, en su dimensión epistemológica; se enfoca en el estudio de la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, puesto que varios historiadores señalan que a partir de los trabajos de éste matemático, se comienza a desarrollar - de alguna manera - la Topología General, particularmente las ideas alrededor del concepto de espacio topológico y con esto el de topología. Se presentan así algunas consideraciones metodológicas y teóricas, así como un ejemplo del análisis de la actividad matemática en la obra seleccionada, algunos resultados y como conclusión una pequeña reflexión alrededor de la idea de relación de proximidad.

Palabras clave: Socioepistemología, Topología, relación de proximidad.

Introducción

En este escrito se presenta el reporte de una investigación que se realizó para obtener el grado de maestría. Esta investigación reporta un estudio epistemológico en la historia del concepto de topología, desde el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Para este estudio se eligió la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet. La idea fue buscar y reconocer ideas germinales (razón de ser) y usos del concepto de topología, además entender el papel de la noción de relación de proximidad en este momento histórico.

Planteamiento del problema

La Topología General es una rama de las matemáticas cualitativas cuyo objeto de estudio es la continuidad (Pérez, 2015) además, ésta como la convergencia son propiedades de naturaleza topológica. A esto le sumamos la idea del estudio de la forma de los espacios. Por su parte, Hinrichsen y Fernández (1977) comentan que los conceptos de convergencia y continuidad son *independientes* de la métrica, lo que propicia su generalización a espacios topológicos.

Se considera la posibilidad de que los conceptos de continuidad y convergencia son *independientes* de la métrica, porque estos conceptos se definen en términos de una noción de *proximidad*, que no necesariamente significa distancia (Pérez, 2015). Es decir, no es necesario tener una métrica para hablar de *proximidad*, entonces, nos cuestionamos: ¿dónde y cómo hablamos de *proximidad* en Matemáticas?

En respuesta a esto, encontramos que, la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos en los que la naturaleza de sus elementos es homogénea, pero cualquiera (Arboleda, 2012), entre los que se establecen ciertas *relaciones de proximidad*. Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos.

De la definición de Topología que presentan (Dugundji, 1966; Kelley, 1955) en sus libros Topology y General Topology, respectivamente, se observa lo siguiente:

- Los autores consideran un conjunto “X cualquiera” haciendo referencia a un conjunto cuyos elementos son de *naturaleza cualquiera* (Arboleda, 2012; Pérez, 2015).
- Introducen un conjunto de conjuntos, al que se le conoce como topología “la familia $\tau \subset 2^{x}$ es topología”, notamos que en las definiciones se reconoce a τ como colección o familia, aclarando que sus elementos son subconjuntos del conjunto X.
- Enuncian las condiciones para que τ sea una topología.
    1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau.$
    2. Si $U, V \in \tau, entonces\ U \cap V \in \tau$
    3. Si $W \subset \tau, entonces \cup W \in \tau$ (Márquez-García, 2018)

De lo anterior, se reconoce que la *relación de proximidad* es una noción de mucha importancia para significar el concepto de topología, sin embargo, no se reconoce una relación explicita entre estos. Con base en esto se plantean las preguntas de investigación.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?
- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Consideraciones teóricas y metodológicas

Dado el planteamiento anterior, se reconoce, de alguna manera, una ausencia de significados del concepto de topología en tanto relación de proximidad. La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa asume que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social, con esto acepta la existencia de prácticas que acompañan la construcción del saber matemático.

En la investigación que se reporta se intenta entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la *relación de proximidad* en la Matemática (en cierto periodo) antes de configurarse como la definición formal de topología.

Para lograrlo, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización[1]) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto. En este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que significa el concepto.

Se realiza un estudio del contexto socio-cultural de la obra a estudiar, basado en la propuesta metodológica de (Espinoza, 2009), que propone estudiar la obra desde tres miradas distintas (una producción con historia, un objeto de difusión, parte de una expresión intelectual más global) con el objetivo de entender cómo el autor entendía su obra, o bien, cómo se entendía esa obra en tanto producción de conocimiento matemático en cierta época. Esto permite hacer un cambio de mirada del conocimiento matemático de la época.

El análisis de la actividad matemática en tanto los usos del conocimiento consiste en 2 fases, en la fase 1 se describe el teorema que se va a analizar, se presenta la demostración propuesta por Fréchet y en la fase 2 se hace el análisis de los usos, para lo que se responden los cuestionamientos analíticos: *¿qué hace?, ¿cómo hace?, ¿para qué hace?, y ¿por qué hace?*, que permiten ver y reconocer los usos y significados del concepto de topología.

Descripción general de la obra

La obra elegida es la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel* (Fréchet, 1906).

Fréchet organiza su tesis en dos partes, en la primera parte desarrolla la parte teórica enfocada en la introducción de la noción de límite en conjunto abstractos, y en la segunda parte trabaja sobre aplicaciones de la teoría que construye en la primera parte. En la primera parte de la obra, observamos que, en el capítulo 1 se ocupa de estudiar la noción de límite en un conjunto de elementos dónde define la convergencia de los elementos al que llama clase (L); en el capítulo 2 se ocupa de estudiar la convergencia en un conjunto de elementos por medio de una vecindad, al que llama clase (V).

El uso de las clases (L) y (V) y su definición son de fundamental importancia para esta investigación. Dado que nuestro interés está en estudiar los usos del concepto de topología en tanto relación de proximidad, en este caso la estructura de las clases mencionadas, nos interesa estudiar la actividad matemática de Fréchet que muestra en la primera parte.

Contexto sociocultural de la obra: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel*

A continuación, se presenta, a modo de ejemplo, parte del contexto sociocultural de la obra analizada.

Una producción con historia. Maurice Fréchet (1878-1973) matemático francés, nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Fue el cuarto de seis hijos, sus padres

[1] *Historizar y dialectizar* son mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático.

Jacques y Zoé Fréchet fueron protestantes. (Taylor, 1982)

Fréchet es conocido principalmente por sus contribuciones a los fundamentos conceptuales de la Topología de Conjuntos, la Teoría de los Espacios Abstractos y el Análisis funcional (Arboleda, 2002). Además, Taylor (1982) considera la obra matemática de Fréchet como pionera en el desarrollo de una rama de la Matemática llamada Análisis Funcional que, luego se extendió al Análisis General; desde la consideración de Taylor es la rama de las Matemáticas que estudia las funciones que mapean un conjunto abstracto en otro conjunto abstracto, ambos conjuntos dotados de una *estructura topológica* (p. 233).

Parte de una expresión intelectual más global. En esta parte se hace una descripción detallada de la obra. Que consiste en un estudio de la producción matemática de Fréchet y su vinculación con trabajos previos, así como el origen de algunos términos que usa Fréchet, entre otras cosas. De acuerdo con (Taylor, 1982) el objeto de estudio de la tesis de Fréchet, se fue configurando en 5 artículos publicados entre los años 1904 y 1905, estos son:, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles, Sur les fonctions d'une infinité de variables, La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel y Les ensembles de courbes continues. En tales artículos se puede observar la evolución de las ideas alrededor de la búsqueda de la generalización en la que estaba interesado Fréchet.

Con esto, se reconoce el contexto de significación (Espinoza, 2009) de esta obra de Fréchet como el contexto en el que nace una parte de la Topología que se caracteriza por la búsqueda de respuestas a cuestionamientos puramente matemáticos, relacionados específicamente con la generalización de propiedades al espacio de operaciones funcionales; lo que implica un estudio de propiedades *topológicas* de ciertos conjuntos y no solo de los elementos de los conjuntos. Además, por la naturaleza misma de la obra (tesis doctoral de matemáticas) asume el estudio al rededor objetos matemáticos institucionalizados. Respondernos *qué hace, cómo hace, para qué hace y por qué hace*, sobre estos objetos, le da el carácter social a nuestro enfoque y no el de las aplicaciones. (Márquez-García, 2018)

Con la mirada que proporciona este estudio del contexto sociocultural de la obra, se analiza la actividad matemática, con el objetivo de entender el papel de la relación de proximidad en el proceso de generalización; puesto que éste se reconoce como una característica fundamental de la obra y que se asume, comienza a caracterizar la naturaleza social del concepto de topología. (Márquez-García, 2018)

En la búsqueda de ideas germinales

En esta sección se presenta un ejemplo del análisis de la actividad matemática de Fréchet, en relación a los usos del modo de composición que él define, pero que en la investigación que se reporta se le ha llamado "*métrica*" considerando que lo que resulta de la producción de Fréchet, en relación con el modo de composición es la primera definición axiomática de la métrica (Freixenet, 1994), sin embargo, en el análisis que se presenta se buscan los usos e ideas que le dan sentido a este modo de composición y que están relacionadas con alguna idea de proximidad.

El siguiente ejemplo es tomado de (Márquez-García, 2018, p. 117-122)

Teorema 20[2]

Unidad de análisis

Teorema. - Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E.

Demostración.

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podriamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B y, de acuerdo con la hipótesis, $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el primer teorema que enuncia en la parte de la continuidad definida por medio de la vecindad, considera que es una segunda definición de operación continua. En palabras de Fréchet, esta definición es menos general que la primera definición (Def. 12) ver Apéndice A, porque solo tiene sentido cuando se puede definir la vecindad.

Descripción del enunciado

Condición necesaria y suficiente para que una operación sea continua.

2. Observaciones y complementos

[2] Esta enumeración corresponde al listado de teoremas y proposiciones del primer capítulo de la tesis de Fréchet en la tesis de maestría: Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. Apéndice A de este documento.

Comunicación

Demostración con complementos

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12)[3], si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; supone que no existe el número η_A, si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podríamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, puesto que la vecindad (A, B) tiende a cero con $\frac{1}{n}$ y $(A, B_n) < \frac{1}{n}$, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B (en lugar de B es A) y, de acuerdo con la hipótesis se supone que la operación es continua y por la (Def. 12), $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) se tiene que (A, B_n) tiende a cero, es decir, la sucesión B_n tiende a A, luego por hipótesis la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Observaciones

En esta demostración podemos observar que la expresión *tiende a* le da el mismo significado que a la expresión $V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n)$, Como lo observamos en esta parte de la demostración donde hace referencia a la definición de operación continua: *"En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12), si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$."*

3. Definiciones y conceptos que utiliza

Definiciones

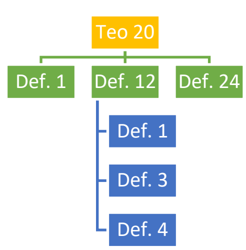

Fig. 1 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

[3] En la demostración que se presenta en español, el texto en azul es parte de la actividad matemática de la autora para entender la actividad matemática de Fréchet. Se marca en otro color para diferenciarla de la actividad matemática de Fréchet.

Fase 2: Analítica[4]

1. Usos de la métrica. Los usos de la métrica que se reconocen son[5]:

- "Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$ esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$." Usa la vecindad y demanda de la métrica para decir que un número tiende a otro.

2. Practicas. Preguntas de análisis:

Tabla 1

Respuesta a los cuestionamientos analíticos en tanto usos de la "métrica"

¿Qué hace?	**¿Cómo hace?**	**¿Por qué hace?**	**¿Para qué hace?**
	Demostración		
Garantiza la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)	Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$	Porque demuestra que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ tiende a A, y por la (Obs. 17)	Para demostrar que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$ y así demostrar que cumple la propiedad supuesta.

Discusión y resultados

Del análisis realizado se reconoce como acción: *garantizar la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)*; de tal manera que representa los términos de una sucesión mientras que el otro representa el elemento límite, entendemos que dicha relación refiere a la idea *algo tiende a algo*.

Entonces, cuando se da la vecindad de dos elementos, se determina una relación de cercanía entre los elementos de la sucesión, es así como se entiende la vecindad, es decir, como una relación de proximidad entre elementos de un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. En la primera parte de la tesis de Fréchet, esta relación de proximidad siempre es numérica.

Se reconoce como una actividad: *tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$*; puesto que esta tiene una intencionalidad previa, proporcionada por la definición de una clase (V) que se nutre de las respuestas a los cuestionamientos por qué hace y para qué hace.

Las preguntas de investigación se responden brevemente desde el análisis realizado a la primera parte de la tesis doctoral de Maurice Fréchet y en ningún momento se propone una generalización de estos resultados, ya que para hacerlo es necesario robustecer esta problematización desde todas las dimensiones del saber.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?

Desde esta investigación se puede entender que una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto es una propiedad de referencia (estructura/modo de composición) entre los

[4] Se presenta un extracto de esta fase ya que es extensa para el espacio permitido. Se puede encontrar completa en (Márquez-García, 2018, p. 120-122)

[5] Por cuestión de espacio solo se muestra uno de los usos que se reconocieron

elementos del conjunto que permite saber cuándo algo se acerca a algo o bien, cuándo algo se aproxima a algo. (Márquez-García, 2018)

- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Desde esta investigación se considera por naturaleza topológica aquella característica de los conceptos basados en conjuntos que, mediante el establecimiento de una estructura que define una relación de proximidad, demanda del “abandono” de la naturaleza de los elementos considerados. Esto implica la consideración de conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, en los que se pueda determinar una estructura que permita dar sentido a la frase algo tiende a algo. (Márquez-García, 2018)

Conclusión

Desde esta problematización, se asocia al concepto de topología el establecimiento de una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto de naturaleza cualquiera, que permite garantizar cuándo algo tiende a algo.

Esta investigación muestra un ejemplo de que la construcción del conocimiento matemático, aun aquel que nace en un contexto puramente matemático como lo es el de topología, también está acompañado de prácticas que se reconocen mediante el estudio del uso del conocimiento.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de La Ciencia*, *3*(7), 59–84.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas : La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Dugundji, J. (1966). *Topology* (Allyn and). United States of America.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

Fréchet, M. (1906). *Sur Quelques points du calcul fonctionnel*. https://doi.org/10.1007/BF03017884

Freixenet, J. T. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. In *Historia de la Matemática en el siglo XIX (2da. Parte)* (pp. 191–211). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Retrieved from http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_09.pdf

Kelley, J. L. (1955). *General Topology* (Springer). Retrieved from http://www.archivos.ujat.mx/2012/dacb/Programas_Materias/Matematicas/Sustantiva Profesional/F1143.pdf

Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*.

Pérez, J. A. (2015). *Topología de conjuntos. Un primer curso*. (P. Electrónicas, Ed.). Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. Retrieved from http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE19_1.pdf

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860

Apendice A

Definiciones y teorema de Sur Quelques points du calcul fonctionnel

Las definiciones y teoremas de la primera parte de la tesis de Maurice Fréchet. Muestran en español – traducción hecha por la autora del idioma original, francés– la traducción se realizó respetando en la medida de lo posible los términos y estructura original.

Definiciones

Def. 1 - Considere un conjunto E de elementos cualquiera (números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.) pero tal que se sabe distinguir los elementos distintos. A cualquier elemento A de este conjunto hacemos corresponder un número especifico $U(A)$; definimos lo que llamamos una operación *funcional* uniforme en E. (p. 4)

*[6]Def. 2 - …los conjuntos abstractos, es decir, que no se especifica la naturaleza de los elementos. (p. 4)

Def. 3 - De ahora en adelante, nos limitaremos al estudio de conjuntos extraído de una clase (L) de elementos de naturaleza cualquiera pero que satisfacen las condiciones siguientes: Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no. Además, hemos podido dar una definición de límite de una sucesión de elementos de la clase (L). Por lo tanto, suponemos que eligiéndose una sucesión infinita de elementos aleatorios (distintos o no) de la clase (L), podemos decir de alguna manera si esta sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiene o no un límite A (por cierto, único). El proceso que permitirá dar la respuesta (es decir, la definición de límite) es por cierto absolutamente cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones I y II que hablamos y que son las siguientes:

Si cada elemento de la sucesión infinita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ es idéntico al mismo elemento A, el resultado ciertamente tiene un límite que es A.

Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiene un límite A, toda sucesión de elementos de la primera sucesión de elementos tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$. (los números enteros, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ por lo tanto seguirá aumentando) tiene un límite que también es A. (p.5 y 6)

Def. 4 - Decimos que un elemento A de la clase (L) es un *elemento límite* de E cuando existe una sucesión infinita de elementos de E: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ que son distintos y tienden a A. (p. 6)

Def. 5 - Llamaremos *conjunto derivado* de un conjunto E y lo denotaremos por E' al conjunto de elementos límites de E. (p. 6)

Def. 6 - Decimos que un *conjunto es cerrado* cuando contiene a su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 7 - Es *perfecto* cuando coincide con su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 8 - Considerando un conjunto dado H como conjunto fundamental, decimos que un elemento A de un conjunto cualquiera E, formado de elementos de H, es *interior* de E, *en sentido*

[6] Las definiciones y teoremas que están marcados con el símbolo *, son los que se consideraron como tal para esta investigación, pero que Fréchet no los declara como tal.

estricto cuando A es un elemento de E que no es límite de ninguna sucesión de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que pertenece a H pero no a E. (p. 6)

Def. 9 - Llamaremos *elemento de condensación* de un conjunto E, a un elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad *numerable* (II, página 2) de elementos. (p. 6)

Def. 10 - Decimos que un conjunto es *compacto* cuando tiene solamente un número finito de elementos o cuando toda la infinidad de sus elementos da lugar al menos a un elemento límite. (p. 6)

Def. 11 - Cuando un conjunto es compacto y cerrado le llamaremos conjunto *extrémal.* (p. 6 y 7)

Def. 12 - Diremos que una operación funcional V uniforme en un conjunto E de elementos de una clase (L) es continua en E, si cualquier elemento A de E límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, tenemos: (p. 7)

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

Def. 13 - Llamamos el límite superior de un conjunto de números, una cantidad μ tal que cualquier número en el conjunto es como máximo igual a μ y que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, hay al menos un número del conjunto, superior a $\mu - \varepsilon$. Cuando dicho número μ no existe, decimos que el límite superior es infinito. (p. 8)

Def. 14 - Diremos que una operación U uniforme en un conjunto E es semi-continua superiormente en E si, cualquier elemento A de E que es límite de una sucesión de elementos distintos de E: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots, U(A)$ es al menos igual al límite más grande *) de la sucesión $U(A_1), U(A_2), U(A_3), \dots, U(A_n), \dots$ (p. 8 y 9)

Def. 15 - Llamo conjunto continuo, un conjunto tal que dado cualesquiera dos de sus elementos A, B, se puede extraer de E un conjunto F en el que cada uno de sus elementos corresponde a un punto del intervalo (0,1) sobre un eje ot e inversamente. La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2. (p. 9)

Def. 16 - Diremos que una sucesión de operación uniformes en E *converge uniformemente* sobre E a una operación U si, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un entero p tal que $n > p$ implica que $|U_n(A) - U(A)| < \varepsilon$ para todo elemento A de E. (p. 9)

Def. 17 - Diremos que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$, uniforme en un conjunto E *converge casi-uniformemente* a una operación U, cuando, dado $\varepsilon > 0$ y un entero cualquiera N, podemos determinar, de una vez por todas, un entero $N' > N$ tal que, a todo elemento A de E, le corresponda un entero n_A tal que: (p. 10)

$$N \leq n_A \leq N' \qquad \left|U(A) - U_{n_A}(A)\right| < \varepsilon.$$

Def. 18 - Consideremos una familia Ñ de operaciones continuas en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L). (p. 11)

Def. 19 - Si la familia Ñ es tal que de cualquier infinidad de operaciones de Ñ distintas, se pueda sacar una sucesión $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ que converge uniformemente a un limite U necesariamente continuo en E. Diremos que la familia Ñ es *compacta.* (p. 11)

Comunicación

Def. 20 - Diremos que las operaciones uniformes en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L), constituyen una familia Ñ de operaciones igualmente continuas en A en E, si dado un número $\mathcal{E} > 0$ y una sucesión cualquiera de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, cuyo limite un elemento A de E, se puede encontrar un entero p tal que la desigualdad $n > p$ implica

$|U(A) - U(A_n)| < \varepsilon$

Cualquiera que sea la operación U de la familia Ñ. (p. 11)

Def. 21 - Considere una familia Ñ de operaciones uniformes en un conjunto E. En cada elemento A de E, podemos definir un numero $L(A)$ que sea el límite superior de valores en A de operaciones de Ñ. (p. 14)

Def. 22 - Si las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de E, determinamos así una operación uniforme en E, que llamaremos límite superior de Ñ. (p. 14)

Def. 23 - Considere la clase (C) de funciones de una variable x definidos en un intervalo fijo J : $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$ y convenimos decir que una sucesión de tales funciones: $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}), \dots$ tiende a una función f(x) si, para cada valor x del intervalo J, $\mathrm{f_n}(\mathrm{x})$ tiene un limite finito f(x). Esta definición satisface las condiciones I y II del Nº 7. Así que esta clase (C) es una clase (L). (p. 15)

Def. 24 - Consideremos una clase (V) de elementos de naturaleza cualquiera, pero que sepamos distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos, además, que a cualquiera dos de sus elementos A, B los podamos hacer coincidir con un número $(A, B) = (B, A) \geq 0$ que goza de las dos propiedades siguientes: 1° La condición necesaria y suficiente para (A, B) sea cero es que A y B sean idénticos. 2° Existe una función positiva bien definida $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε, tal que las desigualdades $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ provocan que $(A, C) \leq f(\varepsilon)$ para cualesquiera elementos $A, B\ y\ C$. En otras palabras, es suficiente que (A, B) y (B, C) sean pequeñas para que sea la misma de (A, C). Llamamos vecindad de A y B el número (A, B). (p. 18)

* Def. 25 - Veremos más adelante (no. 43) un caso muy general dónde un conjunto cualquiera es siempre condensado, es decir, una infinidad no numerable cualquiera de sus elementos siempre da lugar a al menos un elemento de condensación. (p. 19)

Def. 26 - Si A es un elemento de D, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E'. (p. 20)

Def. 27 - Llamamos esferoide del centro A y radio ρ al conjunto de todos los elementos B tales que tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) < \rho$. Decimos que un elemento C es interior a este esferoide, si tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{C}) < \rho$. (p. 21)

Def. 28 - Llamaremos *conjunto límite* un conjunto tomado de una clase (V) tal que la vecindad de dos elementos cualquiera de este conjunto sigue siendo inferior a un número fijo. (p. 22)

Def. 29 - Decimos que una sucesión de elementos $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots$ de una clase (V) satisface las condiciones de CAUCHY cuando se puede hacer que cualquier número $\varepsilon > 0$ corresponda a un entero n tal que la desigualdad $(\mathrm{A_n}, \mathrm{A_{n+p}}) < \varepsilon$ se satisface para cualquier p. (p. 23)

Def. 30 - Diremos que una clase (V) admite una generalización del teorema de CAUCHY si cualquier sucesión de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de CAUCHY, tiene un elemento limite (necesariamente único). (p. 23)

Def. 31 - Llamaremos *clase separable* a una clase que puede considerar, al menos en una forma, como el conjunto derivado de un conjunto numerable de sus propios elementos. (p. 23)

Def. 32 - Finalmente, nos interesa considerar como ya hemos hecho (N ° 33) entre las clases (V) aquellas que son tales que, cerca de un elemento dado, hay elementos cuya vecindad con este es también pequeña como uno quiera sin ser nulo. En otras palabras, cualquier elemento de la clase será un elemento limite. Como por otra parte, el reciproco es verdadero por definición de la clase, diremos que tales clases son perfectas *) (p. 23 y 24)

Def. 33 - Las clases NORMALES, es decir, perfectas, separables y admitiendo una generalización del teorema de CAUCHY. (p. 24)

Def. 34 - Diremos que una operación U es *uniformemente contina* en un conjunto E formado por elementos de una clase (V) si, dado un número positivo ε, podemos elegir un número positivo η tal que, para dos elementos *cualesquiera* de número positivo E: A, B, la desigualdad:

$(A, B) < \eta$, implica que $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$. (p. 28)

Def. 35 - Sea J una familia de operaciones continuas en un conjunto cualquiera E formado por elementos de una clase (V). Si esa familia es tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos poner en correspondencia con un numero $\eta > 0$ de modo que tenemos.

$|U(A) - U(B)| < \varepsilon$

Para toda operación U de J y para todo par de elementos A, B de E verifícan $(A, B) < \eta$, las operaciones de J son igualmente continuas en E. Esto resulta inmediato de la definición de n° 15…

(p. 29)

Def. 36 - La distancia entre dos elementos y que cumple con las propiedades siguientes: a) La distancia (A, B) es cero, si A y B son iguales. B) Si A, B y C son tres elementos cualesquiera, se tiene $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. (p. 30)

Def. 37 - Cuando podemos definir la distancia de dos elementos cualesquiera de cierta clase, diremos que es una clase (E). (p. 30)

Teoremas

Teo 1. Dada una operación U uniforme en un conjunto extrémal E, existe al menos un elemento A de E tal que el límite superior *) μ (finito o no) de U en E es igual al límite superior de U en cualquier conjunto K de elementos de E que A es interior en sentido estricto [considerando E como el conjunto fundamental (n°8)]. (p. 8)

Teo. 2. Si U es una operación continua en un conjunto continuo E, U tomará en al menos un elemento de E cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U. (p. 9)

* Teo. 3. Cuando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continuas en cualquier conjunto formado de elementos de una clase (L) converge casi-uniformemente en E a una operación de U, esta es continua en E. (p. 10)

Comunicación

*Teo. 4. Para que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n$, ... continuas en un mismo conjunto E formados de elementos de una clase (L) converge a una operación continua en E, es necesario y suficiente que la sucesión sea convergente casi-uniformemente en todos los conjuntos extremal formados por elementos de E. (p. 10)

Teo. 5. Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extremal E formado de elementos de una clase (L), que pertenecen a un mismo conjunto numerable D o de su derivado D', formen una familia compacta Ñ, es necesario y suficiente que las operaciones de Ñ sean igualmente/también continuas y limitadas en su conjunto en cualquier elemento de E. (p. 13 y 14)

Teo. 6. Dada una familia Ñ de operaciones limitadas en su conjunto e igualmente continuas en un conjunto cualquiera E, el límite superior de Ñ es una operación continua en E. (p. 14)

Teo. 7. Considere las funciones $f_n^{(p)}(x), f_n(x), f(x)$ definidas en un mismo intervalo J, n y p enteros cualesquiera y tales que:

(I) $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, $f_n(x) = \lim_{p=\infty} f_n^{(p)}(x)$.Si en general es imposible elegir los enteros n_r, p_r tales que la igualdad

$$f(x) = \lim_{r=\infty} f_{n_r}^{(p_r)}(x)$$

Se verifica en todo punto de J. Al menos siempre es posible determinar de tal manera que esta igualdad se verifique en cualquier punto de J excepto un conjunto de puntos de medida cero. (p. 15)

Teo. 8 cualquier función $f(x)$ dentro de la clasificación de SR. BAIRE (III, page 126) se puede considerar como el límite de una sucesión de polinomios excepto un conjunto de medida cero *). (p. 17)

Teo. 9. El conjunto derivado de un conjunto de elementos de clase (V) es un conjunto cerrado. (p. 18)

Teo.10. El conjunto P de elementos de condensación *) de un conjunto condensado E formado de elementos de una clase (V) es un conjunto perfecto o nulo **) (p. 19)

Teo. 11. Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable ***) (p. 19)

Teo. 12. El conjunto D de los elementos de un conjunto compacto E de elementos de una clase (V) que no pertenece al conjunto E' derivado de E es numerable *) (p. 19 y 20)

Teo. 13. Si un conjunto cerrado F pertenece a un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V), obtendremos Feliminando de E los elementos INTERIORES a cada esferoide de un cierto conjunto contable de esferoides. *) (p. 21)

Teo. 14. Todo conjunto compacto formado de elementos de una clase (V) es limite. (p. 22)

Teo. 15. Sea E un conjunto extremal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos I_1, I_2, ... tal que todo elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un numero finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G *) (p. 22)

Teo. 16. Para que el conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ [correspondiente a un conjunto E de una clase (V) NORMAL] pueda ser elegido, cualquiera que sea ε, de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y suficiente que E sea compacto. (p. 25)

Teo. 17. Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) normal. Para que de cada familia H, NUMERABLE O NO *) de conjuntos I tal que cada elemento de E sea interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, podamos extraer un número finito de conjuntos I formando una familia G con la misma propiedad que H, es necesario y suficiente que E sea extremal. (p. 26)

Teo. 18. Todo conjunto no numerable E formado de elementos de una clase (V) normal es condensado. (p. 27)

Teo. 19. Sea E cualquier conjunto formado de elementos de una clase separable (V); existe un conjunto numerable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece, al conjunto D o a su derivado D'. Cuando E es cerrado, tenemos: $E \equiv D + D'$. Cuando E es perfecto, $E \equiv D'$. (p. 27)

Teo. 20. Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E. (p. 28)

Teo. 21. Toda operación continua en un conjunto EXTREMAL E formado de elementos de una clase (V), es uniformente continua en E.(p. 29)

Teo. 22. Para que las operaciones continuas en un mismo conjunto extremal E, formado por elementos de una clase (V) separable, forman una familia compacta $\boldsymbol{J}$, es necesario y suficiente que las operaciones de $\boldsymbol{J}$ sean, en todos los elementos de E, igualmente continuas y limitadas. (p. 30)

Teo. 23. La condición necesaria y suficiente para que toda operación continua en un conjunto E de elementos de una clase (E), 1ª sea acotada en ese conjunto, 2ª alcance su límite superior, es que el conjunto E sea extremal. (p. 31)