XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

História da Razão Áurea na formação continuada de professores

Arlete de Jesus **Brito**
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho
Brasil
arlete.unesp@gmail.com
Sérgio Candido de **Gouveia** Neto
Universidade Federal de Rondônia
Brasil
sergio.gouveia@unir.br

Resumo

Esse texto abordará alguns resultados de uma pesquisa colaborativa que visa a investigar os potenciais de um estudo sobre a história da matemática e a de seu ensino, na formação continuada de professores de matemática. Para a análise dos dados foi utilizada o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS - Mathematical Knowledge for Teaching). Os resultados apontam que tal pesquisa possibilitou aos professores transitarem por diversos domínios do conhecimento necessários à prática docente.

Palavras-chave: educação, matemática, história, formação de professores, MTKS.

Essa comunicação pretende relatar resultados de uma pesquisa que tinha por questão: quais os potenciais e limites do estudo da história da matemática e a de seu ensino para a formação continuada de professores? Desde o século XIX, textos abordam a importância da História da Matemática e a de seu ensino para a formação de professores. Furinghetti (2013) aponta trabalhos, como por exemplo, de Forian Cajori e de Hieronymus G. Zeuthen que, no final do século XIX, trazem discussões a esse respeito. Felix Klein (1849-1925), em sua obra *Matemática Elementar desde um Ponto de Vista Superior*, cuja primeira edição foi em 1908, expõe aspectos que, para ele, seriam necessários na formação de futuros professores. Este livro, além de conteúdos matemáticos, trata de assuntos tanto da História da Matemática como da História do Ensino de Matemática. Segundo Klein (1927), os aspirantes ao magistério deveriam conhecer os elementos intuitivos da Matemática, as relações entre seus distintos ramos e, sobretudo, o desenvolvimento histórico desse campo do saber.

Brito (2007) atualiza as considerações tecidas por Miguel e Brito (1996) sobre o assunto aqui tratado. Segundo a autora, a História da Matemática e a da Educação Matemática deveriam participar da formação de professores, pois podem colaborar em reflexões sobre: a orientação das escolhas e decisões metodológicas e didáticas, por meio da análise de pressupostos epistemológicos, teleológicos e axiológicos de tais escolhas; o processo histórico de ensino e aprendizagem de matemática na instituição escolar, a partir da análise de diferentes currículos, dos livros textos e materiais didáticos em geral, utilizados em diferentes momentos históricos; os fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos presentes em sua prática docente; a possibilidade de articular seu trabalho em ensino de matemática com as contribuições de outras áreas do conhecimento e com práticas não discursivas; a existência da diversidade cultural no que se refere à produção do conhecimento; as potencialidades e limites da utilização didática de atividades e outros recursos que envolvam a história da matemática. Brito (2007) afirma serem necessárias pesquisas sistemáticas acerca das consequências da introdução da história da educação matemática na formação de professores.

Investigações sobre o tema também têm sido realizadas. Por exemplo, Balestri e Cyrino (2010) entrevistaram oito docentes pesquisadores acerca da participação da história na formação inicial de professores de matemática. Segundo os entrevistados, a história poderia: auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos, contribuir para compreensão da matemática como área de conhecimento, colaborar na percepção de relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, veicular a matemática como uma construção humana, responder alguns "porquês" que surgem ao construir seu conhecimento matemático, abrir espaços para que o professor solicite aos seus alunos o desenvolvimento de atividades que exijam produções escritas, contribuir em discussões acerca das condições necessárias para o desenvolvimento da matemática, provocar reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor. Segundo Balestri e Cyrino (2010), não houve consenso nas respostas dos entrevistados, porém os resultados sugerem que o conhecimento sobre a história da matemática pode colaborar para a qualidade da formação de futuros professores de Matemática.

No encontro History and Pedagogy of Mathematics (HPM), em 2016, Jankvist, Mosvold e Clark (2016) relataram experiência na qual propõem a seus alunos, futuros professores, a seleção de temas sobre História da Matemática ou sobre seu ensino, para elaborarem planos de ensino. Tendo por referencial o Conhecimento Matemático para Formação de Professores - Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MTKS), os autores analisam que tipos de conhecimentos foram desenvolvidos por seus alunos, nesse processo. O trabalho desenvolvido por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), como veremos, está muito próximo do realizado por nós. No entanto, o que diferencia nossa investigação é que ela se desenvolveu em um grupo que, no decorrer das reuniões, se constituiu como colaborativo.

A formação do grupo colaborativo

Em outubro de 2017, nós convidamos para uma reunião, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática e da Pós-Graduação em Matemática, da UNESP Rio Claro, e os convidamos a formar um grupo de estudos sobre um tema de História da Matemática que seria escolhido coletivamente. Nessa reunião foi esclarecido que o trabalho desse grupo seria analisado para verificarmos quais os potenciais e os limites do estudo da História da Matemática na formação de professores e os convidamos a participarem também dessa pesquisa, como investigadores. Todos os alunos aceitaram ambos os convites e, dessa maneira, o grupo se constituiu por sete pessoas, das quais, cinco alunos dos cursos de pós-graduação e os dois pesquisadores, autores desse texto. Constituído o grupo, iniciou-se a escolha do tema. Uma das alunas sugeriu que o tema fosse sobre "matemática dos pitagóricos". Após discussão, esse se tornou o nosso tema de estudos e ele foi dividido, entre nós, nos seguintes subtópicos: Números figurados; Arquitetura e misticismo numérico; Matemática e Música; Números primos, amigos e perfeitos; Razão áurea; Noções de Matemática pitagórica em livros didáticos, e constituição histórica do conceito de "pitagorismo". Criamos um grupo no Google Drive para socializarmos os artigos, livros e vídeos que encontrássemos sobre esses temas. Todos os participantes socializaram material para nossos estudos, entre os meses de outubro e dezembro de 2017. Nesse drive foram colocadas também as fotos realizadas nas reuniões, gravações dos encontros e suas transcrições.

Em cada reunião, um ou dois membros discorriam sobre o que haviam estudado e se iniciava o debate. Nelas também organizávamos, coletivamente, nossos cronogramas de trabalho, planejávamos e elaborávamos uma coletânea, além de escrevermos, coletivamente, um capítulo de um livro que está atualmente no prelo e é uma produção resultante de um a exposição que realizamos em um evento. A proposição e organização das atividades, tanto quanto as decisões foram feitas coletivamente, sem que houvesse a centralização de liderança.

Portanto, podemos considerar que o grupo foi se constituindo como colaborativo. Concordamos com Lopes (2018), quando afirma que:

> As condições de exercício profissional com significativa autonomia são ampliadas quando existe um trabalho colaborativo entre os professores. Esses profissionais têm características individuais, atuam em diferentes contextos educacionais e precisam, portanto, estar em constante processo de debate sobre suas práticas pedagógicas, de modo a preparar-se para atender aos seus alunos, que expressam capacidades cognitivas diversificadas e distintas visões de mundo (Lopes, 2018, p. 74).

Em nosso grupo, as atitudes de respeito mútuo, com o passar das reuniões, fizeram surgir laços afetivos e de confiança que nos levaram tanto a compartilhar conhecimentos, quanto a mostrar nossas dúvidas e ignorância em alguns assuntos. Nesse sentido, esse grupo colaborativo teve características semelhantes às de outros, como, por exemplo, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais (GEPEMAI). Biani e Lorenzato ao relatar as atividades do GEPEMAI, concluem que nos grupos colaborativos:

> Os ganhos também são afetivos, pelas relações que se estabelecem entre seus membros. A colaboratividade exige cumplicidade, cooperação, confiança; implica saber falar e saber ouvir, respeitar o outro; requer dedicação, tempo e tantas outras coisas que estão inscritas na dimensão da afetividade pedagógica. (Biani, Lorenzato, 2018, p. 93).

Como todos os elementos do grupo se constituíram em pesquisadores da investigação, a pesquisa também se tornou colaborativa. Segundo Fiorentini (2004), uma pesquisa colaborativa se caracteriza pelo fato de todos os membros participarem do processo investigativo, incluindo a concepção, o planejamento (escolha da metodologia), a realização da pesquisa (coleta e análise dos dados), incluindo a construção da base teórica, culminando com as escritas do relatório e dos trabalhos para publicações. Contudo, não há unanimidade sobre estes aspectos, sendo que alguns pesquisadores afirmam que a colaboração não requer a participação dos envolvidos em todas as etapas, a não ser que isso seja o motivo que os levaram a participar da pesquisa (Desangné, 1997 apud Teles & Ibiapina, 2009; Zeichner, 1998). Na situação aqui descrita, a concepção inicial do tema a ser investigado – os potenciais de um estudo de História da Matemática e de seu ensino na formação de professores - não foi do grupo todo, porém, no momento em que todos aceitaram ser pesquisadores dessa investigação, ela tomou novos rumos, de modo que todos nós nos tornamos sujeitos e pesquisadores de nossas aprendizagens mediadas pelo estudo de um tema da História da Matemática e de seu ensino, qual seja, "a matemática dos pitagóricos", que foi escolhido pelo grupo.

Os instrumentos de coleta de dados foram as gravações em áudio, com posterior transcrição, os diários individuais e algumas fotos de anotações feitas na lousa, em momentos de discussão. Para análise das discussões, das reflexões individuais e das anotações em lousa, consideramos o referencial sobre Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) (Aguilar et al, 2013) que é um desdobramento das teorias sobre Conhecimento Matemático para Ensino - Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, 2008). Segundo esse referencial, o conhecimento especializado do professor se divide em: 1) Conhecimento do Professor sobre a Matemática que engloba tanto o conhecimento dos temas e suas relações quanto os da prática matemática, como, por exemplo, modos de realizar demonstrações matemática, além de referir-se à estrutura matemática 2) Conhecimento Didático do Conteúdo em que se inserem o conhecimento do ensino de matemática, o sobre aspectos da aprendizagem matemática e o conhecimento dos currículos e propostas para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Todos esses conhecimentos são permeados pelas crenças dos professores acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática. O enfoque do estudo do episódio, exposto aqui, foi sobre a razão áurea. Sua análise nos indicou possibilidades, na formação continuada, acerca do desenvolvimento do Conhecimento do Professor sobre a Matemática, de acordo com o referencial do MTKS.

A seguir, nos embasaremos nos subdomínios do referencial MTSK para realizar a análise de alguns diálogos das reuniões de nosso grupo colaborativo. Nessa análise, os nomes das pessoas envolvidas serão suprimidos[1].

A história e o conhecimento especializado do professor sobre a matemática

A aluna R. havia se proposto a estudar a razão áurea e resolveu, ler *A Divina Proporção* de H. E. Huntley, obra que traz tanto aspectos históricos quanto matemáticos sobre o tema. Segundo Huntley (1985), o problema das relações entre as diagonais do pentágono era familiar aos Pitagóricos. Esse problema está associado à divisão áurea, pois, dado um pentágono, o ponto de interseção P de duas de suas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. O traçado das diagonais gera o pentágono estrelado que, como sabemos, constituía o símbolo especial da escola pitagórica (Boyer, 1996). Ainda de acordo com Huntley, "um outro fato do conhecimento desses antigos geômetras era que a razão do raio do circuncírculo de um decágono regular para um dos lados é a razão áurea" (HUNTLEY, 1985 p. 36) e o problema da determinação da divisão áurea de um segmento está solucionado nos Elementos. Assim, R. buscou no livro *Os Elementos*, de Euclides[2], o que havia sobre o assunto.

Assim, R expõe como o conceito de razão áurea foi mudando ao longo do tempo e, a seguir, lê, para o grupo, o texto atribuído a Euclides. A seguir, faz o seguinte comentário:

> R - Ah eu li, eu consegui achar no Euclides a razão áurea, e eu descobri porque eu não estava achando! Porque ele fala de extrema e média razão, então ele define que uma reta está cortada em extrema e média razão, como o todo esteja para o maior

[1] Os nomes serão representados pelas letras R, S, I, D, A, J, C e S
[2] Foi utilizada a tradução em português realizada por Irineu Bicudo.

> segmento, o maior para o menor. No começo eu tive bastante dificuldade, daí eu fui pesquisar o que ele estava querendo dizer com esses termos.

Nesse trecho, R. expõe sua dificuldade em compreender de que se tratava a definição encontrada no *Os Elementos*, devido ao desconhecimento dos significados dos termos envolvidos ("*como o todo esteja para o maior segmento, o maior para o menor").* Percebemos um problema no que se refere ao Conhecimento do Professor sobre a Matemática, porque, apesar de R. já ter estudado esse conteúdo na licenciatura, não conseguia compreender os termos da definição.

Sua leitura, para o grupo, da proposição[3] de Euclides desencadeou a seguinte discussão sobre representação matemática.

> R – Daí, ele fala assim óh: fique descrito sobre AB o quadrado de BC. O que ele quer dizer com quadrado BC? Ele trata das diagonais sempre, então quando ele fala de quadrado, retângulo, ele vai usar as diagonais do quadrado e do retângulo ou do paralelogramo. Aí, quer ver: fique descrito sobre AB o quadrado BC e aplicado a AC o paralelogramo CD. Quer que eu desenhe?
> A – A gente aqui, sem entender.... Está todo mundo nesse nível.... Precisa desenhar, porque...

Conforme Szabó (1978), a visualização fez parte da tradição da geometria grega, desde seus inícios, pois o verbo "demonstrar" - δεικνυμι – significava "visualizar concretamente". O ensino de geometria tem recorrido a essa tradição, de modo que as figuras assumam uma função heurística, na resolução de problemas geométricos. É essa tradição que R. e A. mobilizam quando explicitam a crença de que o desenho na lousa ajudará a compreensão do enunciado. Porém, Duval (2005) ressalta que o enunciado em língua materna, as figuras e as representações dessas por meio de nominação de pontos dos vértices são tipos de registro semióticos heterogêneos. Além disso, a figura plana visualizada e o registro por meio de pontos referem-se a dimensões diferentes, portanto, a compreensão da passagem de uma forma de registro para outra pode não ocorrer com facilidade. R. vai à lousa e faz a figura, explicando que cada dupla de pontos é usada para designar um quadrilátero. O aluno J. incorpora essa forma de representação e, lendo o texto de Euclides, dá a seguinte explicação sobre a figura desenhada por R:

> J – Porque ele [Euclides] fala assim, mas o BC é um quadrado, portanto, também AD é um quadrado, então se você tem que BC é um quadrado, então AD vai ser um quadrado, por ser figura semelhante mesmo.

A partir do diálogo que ocorre no grupo, a representação dos quadriláteros por meio de dois dos seus vértices é criticada, mas passa a ser compreendida e a discussão se volta à tentativa de entender como o raciocínio apresentado na proposição conduzirá à razão áurea. Desse modo, se estabelece uma discussão no grupo sobre o porquê de as medidas dos segmentos construídos na demonstração serem proporcionais e sobre o modo como a demonstração está construída:

> A – Porque.... Como é que ele faz? Ele não corta [o segmento] em qualquer lugar, como ele faz essa construção?
> R - Ele não faz!

[3] O teorema em questão é a proposição 30, do livro 6.

A - Como não faz?
J - É porque isso fica decorrente do ponto D, pelo que eu li aqui.
R - Ele não faz, ele só fala construir CD tal que seja igual a CB, ele pula esse passo de construção.
A- Não, ele não pode pular isso.

Esse trecho indica um momento de reflexão do grupo sobre o modo como algumas demonstrações são realizadas, sem que se explicitem proposições envolvidas no processo e a partir desse questionamento, as pessoas tentam explicitar quais seriam as proposições e os passos envolvidos naquele raciocínio demonstrativo. Nesse momento, A., S. e J. também já estão diante da lousa. O aluno J. relê o livro e explicita qual o objetivo da construção, qual seja, a determinação de um ponto que divida o segmento $\overline{BD}$ em extrema e média razão.

Durante o diálogo, A. percebe que o teorema de Tales está envolvido na demonstração. As pessoas, na lousa, começam a representar as medidas dos segmentos por meio variáveis.

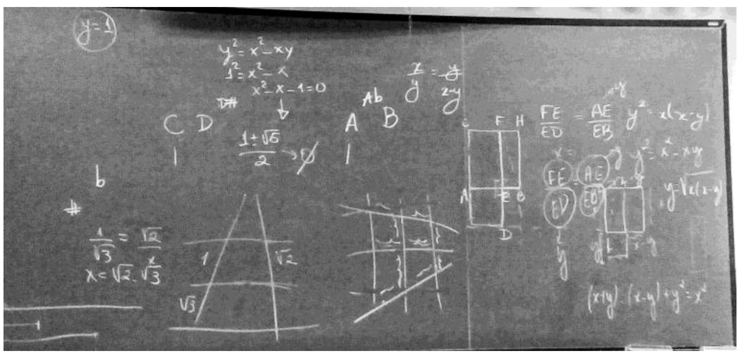

Figura 1. Fotografia da lousa

No entanto, se mantém a comparação entre as duas formas de representação, como se observa pela foto anterior (Figura 1). Instala-se uma argumentação coletiva sobre a demonstração, por meio de conjecturas e refutações a partir da análise voltada às retas paralelas cortadas por transversais, como se observa pelo trecho transcrito abaixo:

A. - Então, se ele é a média geométrica então AE, que é y...
J. - o x é AC, não, AB
A. - o x é AB, AB sobre AE é igual AE sobre EB. Ah, ele [Euclides] errou aqui, aqui era AB.
[risos]
R. – Não! Mas é que, Arlete, FE é igual que x, então você pode usar AB
J. - É a mesma coisa!
A. - Espera aí, FE é igual a quem?
R. - É a mesma coisa que x, então você pode usar ...
J. - E agora o ED, que é a mesma coisa que o y
A. - E agora o ED que é a mesma coisa que o AE.
J. – Isso! Tá certo!

Naquele momento, além de serem tecidas as relações entre diferentes formas de registro, estavam sendo mobilizados, ao mesmo tempo, conhecimentos sobre congruência de ângulos, teorema de Tales, noção de figuras de mesma área, semelhança, proporcionalidade, média geométrica e divisão de um segmento em extrema e média razão. Segundo Aguilar (2013), reflexões sobre diferentes formas de representação e sobre a relação entre diferentes conteúdos são conhecimentos que fazem parte do Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

> S – É, então, y ao quadrado é igual a x ao quadrado, agora então y ao quadrado é igual a x(x-y)
> J – $y^2 = x\ (x-y)$
> S. - Mas é, porque essa área aqui é igual a essa área [mostrando as figuras na lousa], não é?

Quanto o grupo chega à conclusão procurada, a aluna I. questiona sobre como a proporção obtida leva ao número ϕ. R. e A. analisam se a substituição de y ou de x por 1, resultaria no valor de ϕ. A substituição é feita e o número é obtido.

Dos tópicos relevantes que comporiam o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS), abordados por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), esse processo colaborativo de estudo histórico sobre razão áurea nos levou a: relacionar uma representação a outras representações, conectar um tópico de ensino a outros tópicos, modificar questões para torná-las mais simples, escolher definições úteis ao desenvolvimento do processo de demonstração, usar notações e linguagem matemática, formular questões matemáticas produtivas e escolher representações convenientes para a proposta.

Algumas conclusões

Nossas análises apontam para o potencial de um estudo histórico, em grupo colaborativo, para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos necessários à prática docente. Assim, concordamos com Ferreira (2008), quando afirma que o grupo colaborativo pode tornar-se "o contexto no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas" (Ferreira, 2008, p. 152). No entanto, nosso grupo colaborativo possui uma especificidade que deve ser considerada na análise: ele é composto apenas por docentes que já possuem ou estão em processo de obtenção de título de pós-graduado. É necessário comparar esse processo com os desenvolvidos em outros, cujos grupos não possuam essa especificidade.

Ressalta-se que a proposta do estudo sobre parte da história da razão áurea surgiu por meio das discussões do grupo colaborativo e acreditamos que o tema poderia ter sido qualquer outro. Por meio dessas discussões é que foi possível analisar os potenciais do processo colaborativo no estudo de história da matemática, na formação continuada de professores. Porém, alguns questionamentos precisam ser feitos: Os resultados teriam sido diferentes se o tema fosse outro? Quais seriam os potenciais e limites em outro caso?

Por fim, destaca-se que a nossa discussão girou em torno de apenas um aspecto do modelo MTKS, ou seja, o Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

Referências e bibliografia

Aguilar, A. et all. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*. Uruguai, VII, 5063-5069.

Balestri, R. D.; Cyrino, M. C. C. T. (2010). A história da matemática na formação inicial de professores de matemática. Alexandria – *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. . 3 (1). 103-120. Doi:

https://doi.org/10.5007/%25x

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. Doi: https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bicudo, I. (2009). Prefácio e introdução. Euclides. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP.

Brito, A. J. A. (2007). História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática em Revista*. 22 (13), 11-15.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Duval, R (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la Géométrie développement de la visualization: Différenciation des raisonnements et Coordination de leurs fonctionnements. *Annalles de Didactique et Sciences Cognitives*. 10, 5-53.

Ferreira, A. C. (2008). O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In Nacarato, A. M. e Paiva, M. A. V. (Orgs). *A formação do professor que ensina matemática* (pp. 149-166). Belo Horizonte: Autêntica

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Furinghetti, F. (2013). History and epistemology in mathematics education in History of Mathematics, [Eds. UNESCOEOLSS Joint Committee], in *Encyclopedia of Life Support Systems* (EOLSS). Oxford: Eolss Publishers.

Huntley, H. E. (1985). A divina proporção. Brasilia: Editora da UNB.

Jankvist, U. T.; Mosvold, R.; Clark, K. (2016). Mathematical knowledge for teaching teachers: the case of history in mathematics education. *HPM Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting*. Montepellier: IREM. 441-452

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Biblioteca Matemática Rey Pastor.

Lopes, C. (2018). Participação em grupos colaborativos e suas contribuições para Educação Matemática. In Fernandes, F. L. P; Biani, R. P; Longo, C. A. C; Tinti, D. S. (orgs). *Diferentes contextos do trabalho colaborativo na formação de professores que ensinam matemática* (pp. 73-76). Campinas: FE/UNICAMP.

Miguel, A.; Brito, A. J. (1996). A história da matemática na formação do professor de matemática. *Caderno CEDES*. N. 40. Campinas: Papirus. p. 47 a 61.

Szabó, A. (1978). *The beginnings of Greek mathematics.* Boston: D. Reidel Publishing Co.

Teles, F. P.; Ibiapina, I. M. L. M. (2009). A pesquisa colaborativa como proposta inovadora de investigação educacional. *Diversa*. 2 – nº 3, jan-jun

Zeichner, K. M. (1988). Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GeraldiI, C. M.; Fiorentini, D. e Pereira, E. M. (orgs.) *Cartografia do trabalho docente: professor (a)-pesquisador(a)* (pp. 207-236).Campinas: Mercado de Letras/ABL.