XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856): un texto con mucho que enseñarnos

Gilberto **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano, 1856, es uno de los primeros libros de matemáticas que se escribió en la naciente república de Colombia. Tenía por objeto la enseñanza de los fundamentos de la aritmética, y se apartó de la tradición euclidiana de presentación de la aritmética, muy común en la época (aunque no del todo). Esta separación se puede identificar en la presentación de los números a partir de las cantidades (magnitudes) y sus medidas, de la distinción entre cantidades continuas y discretas (fundamentadas nociones topológicas de los números), y por la forma en que se realiza un tratamiento del infinito matemático. Sus ideas pueden definirse como novedosas en su momento, y, pueden mostrarnos un camino no explorado en la actualidad para la enseñanza del número a lo largo de la educación básica. Algunas de estas lecciones son exploradas en este artículo.

Palabras clave: historia de las matemáticas en Colombia, historia del número, historia de textos escolares, aritmética elemental, pensamiento numérico.

Introducción

El presente artículo aborda el análisis de un libro de texto publicado en Colombia a mediados del siglo XIX, de gran valor no solo matemático, sino histórico y pedagógico. Se trata del *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856). El valor histórico debe entenderse en el marco de una república naciente (luego de las batallas de liberación contra los españoles, siendo la del puente de Boyacá, en agosto de 1819, una de las más importantes) que buscaba proyectarse en el mundo moderno del desarrollo industrial, pero que tiene que luchar con siglos de atraso producto de la colonización española.

Liévano es parte de una élite de ciudadanos que se forman como ingenieros matemáticos, y qué, por su posición social pueden ocupar altos cargos del estado, desde dónde inciden en el desarrollo social y político del estado naciente. La figura 1 muestra un fragmento tomado de la dedicatoria que el autor hace a su maestro, Lino de Pombo, dónde se dejan ver los intereses políticos de una obra que tiene por objeto brindar una formación matemática a los futuros ciudadanos de la república naciente. En este mismo fragmento (figura 1) se pueden ver las intenciones pedagógicas: *formar en matemáticas, para engrandecer la Patria*. Pero esta intención pedagógica se puede ver con más claridad en el primer párrafo del prólogo (ver figura 2), donde el autor habla de las limitaciones que se tienen en el momento para el aprendizaje de las matemáticas superiores, derivadas de los escasos conocimientos en los fundamentos de la aritmética (aquí se refiere a la escasa formación en aritmética que se daba en los primeros años de escolaridad de los niños y jóvenes, en las escuelas elementales). Adicionalmente, es de llamar la atención como el autor, al final del párrafo, expresa que la forma de presentar estos fundamentos de la aritmética no sigue la manera tradicional de hacerlo en el momento. Por supuesto, Liévano es consciente de las posibles dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, derivadas de su forma de presentación de la aritmética y sus posibilidades de ser enseñada.

Así, en lo que sigue se analizarán algunos apartados del libro de Indalecio Liévano, buscando mostrar las diferencias sustanciales de la forma de presentación de la aritmética de la cual él habla en su prólogo, pero a la vez, analizando cómo este entramado conceptual responde a una intencionalidad pedagógica y no solo matemática.

> ¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."
>
> Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.

Figura 1. Dedicatoria al profesor Lino de Pombo (Liévano, 1856, p. 4)

Sobre el análisis histórico

En el presente trabajo, en la línea de la Historia y la Educación matemática, hemos indagado por las prácticas matemáticas (Obando, 2015) en un momento histórico específico de la historia de la educación matemática en Colombia.

Así, con Obando (2015, citando a Ferreirós (2010) y Kitcher (1984)), se asume que las prácticas matemáticas caracterizan la actividad de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver. Todos estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de los sujetos. Igualmente, con Obando (2015, citando a Jankvist and Kjeldsen (2010), Epple (2004)), se reconoce en esta noción de práctica matemática la idea de configuración epistémica, la cual refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

Desde la anterior noción de práctica matemática, se busca desde la historia de las matemáticas lecciones pedagógicas que permitan: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar y (3) tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. (Obando 2015, citando a Mosvold, Jakobsen, and Jankvist (2014)). De esta forma, se espera, como dice Vasco (1995), identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

Estructura del Texto analizado

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856), se estructura en dos partes, la primera, dedicada a presentar los conceptos fundamentales de los números y sus operaciones básicas, y la segunda, dedicada a la potenciación y radicación, y las razones y proporciones, con algunas aplicaciones comerciales. Cada parte se encuentra organizada en lecciones (7 lecciones en la primera y 4 en la segunda).

A lo largo de toda la obra se percibe un esfuerzo por mostrar las nociones intuitivas desde las que se fundamentan los conceptos de la aritmética, pero a su vez, de realizar una presentación rigurosa basada en axiomas y teoremas, con sus respectivas demostraciones. Es así que la lección primera es dedicada a presentar un conjunto básico de definiciones sobre los números, la notación y las operaciones. Las lecciones segunda y tercera se dedican a presentar las reglas para efectuar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). La cuarta lección se dedica a cuestiones relacionadas con los números y sus propiedades, en lo que en palabras modernas podemos llamar nociones básicas de teoría de números. La lección V, retoma las operaciones de la aritmética, pero ahora extendiendo lo formulado para los números enteros (en lenguaje moderno los números naturales), a los números quebrados y fraccionarios (léase, en palabras modernas, números racionales). La lección VI es dedicada a las aplicaciones de los números quebrados y fraccionarios a diferentes tipos de problemas, sobre todo, problemas comerciales de pesos y medidas. La lección VII es dedicada a la presentación del sistema de numeración decimal y, en palabras del autor, la presentación de un nuevo sistema de pesos y medidas (sistema métrico decimal).

> Cuando hice el estudio de los ramos superiores de las Matemáticas, en el Colejio militar de Bogotá, con los mui distinguidos Profesores Lino de Pombo i Aimé Bergeron, me convencí prácticamente de que los mas grandes i numerosos obstáculos que se presentan para hacer rápidos progresos en dichos estudios, dependen precisamente de escasos conocimientos en Aritmética, o en otros términos, de ignorancia en los principios i propiedades de los números que son del dominio de la Aritmética. Por esta razon tuve inmediatamente la idea de formar un plan de esposicion rigurosa de la naturaleza de las seis operaciones de la Aritmética i de las principales propiedades de los números, i a precio de muchísimos esfuerzos lo encontré; pero enteramente diferente del rumbo ordinario seguido por todos los autores i, tal vez, algo difícil para trasmitirlo a jóvenes no mui dotados por la naturaleza para estos estudios; por lo que no lo he seguido con entusiasmo.

Figura 2. Fragmento del prólogo (Liévano, 1856, p. 5)

Primera lección: el concepto de número

En el numeral 2 lee: "se da el nombre de *cantidad* o *magnitud*, a todo lo que es algo i ilimitado; se denomina *cero* a la carencia absoluta de todo lo que es algo […] Son cantidades las líneas, las superficies, los espacios, el tiempo, la fuerza, el valor […]"[1] (p. 8). Más adelante, en el numeral 5 de la página 9 se lee:

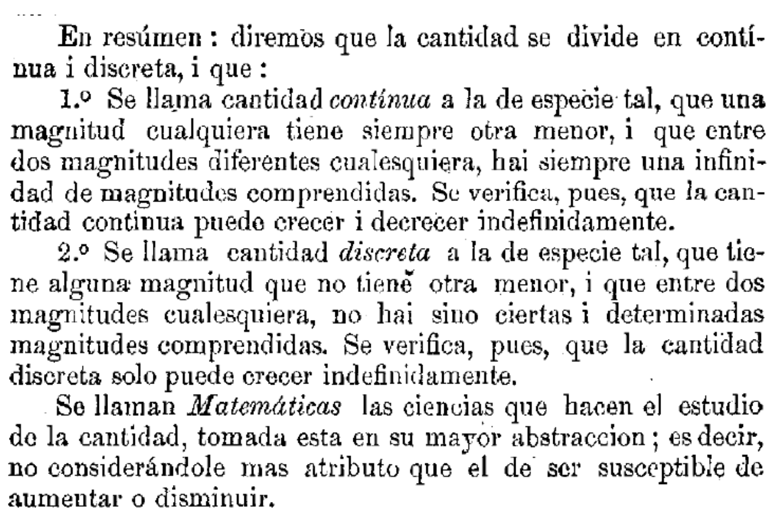
> Se llama *unidad* una cantidad que se toma arbitrariamente, o que se elije para espresar en valores de ella (mediante el número) las diferentes magnitudes de su naturaleza […] Se llama número el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con la unidad. (p. 9)

En estos dos fragmentos se puede comprender por qué el autor declara en el prólogo que su presentación de la aritmética se aparta de la forma usual: los textos de aritmética de finales del siglo XVIII, y comienzos del XIX seguían la tradición euclidiana, reproduciendo muy de cerca la organización del libro VII de los Elementos (Euclid, 1908), en dónde el número es considerado como una colección de unidades, y la unidad, la mónada, no es considerada en esencia, un número. En este sentido, la idea de número sobre la que se encuentra organizado este texto es

[1] En las citas textuales del autor, se ha conservado la grafía original, y, por lo tanto, lo que parecen faltas de redacción u ortografía son las formas adecuadas de escribir en la época.

más cercana a la idea de número en Newton, que a la idea de número en Euclides.[2]

Este énfasis en la noción de magnitud, se puede ver igualmente en la forma como el autor define las magnitudes continuas y las discretas (ver figura 3): Nótese en primer lugar, la idea de cantidad, que está al final del fragmento: aquello que puede ser objeto de aumento o disminución. Esta es una apuesta Aristotélica sobre la noción de cantidad y, en ese sentido, sigue la línea de los autores clásicos del momento, pero, en lo que si toma distancia es en las definiciones de cantidades continuas y discretas. Al plantearse la necesidad de distinguir las cantidades continuas de las discretas se pone en un lugar de vanguardia, pues el problema de la continuidad era precisamente uno de los asuntos centrales de los matemáticos europeos del momento, a raíz de los trabajos de Bolzano sobre lo que hoy conocemos como el *falso teorema de Cauchy*. En la definición de cantidades continuas, se puede ver una noción de lo que modernamente llamamos la *densidad de los elementos de un sistema* (hoy sabemos que no es suficiente con la idea de densidad para definir la continuidad). Por su parte, la definición de cantidades discretas se fundamenta en una de las propiedades de los sistemas discretos, a saber, la existencia de cantidades tales que, entre ellas, o no existe ninguna otra cantidad de la misma naturaleza, o existe un número finito de ellas. En ambos casos, la manera cómo define la naturaleza de lo continuo y lo discreto, se basa en las propiedades topológicas de los sistemas numéricos (por supuesto, es una expresión en términos modernos, no explícita en el lenguaje del autor), lo cual está en la base de las nociones modernas del número real, tal como lo mostraron Cantor (1915) o Dedekind (1927), *solo que Liévano lo hace 30 años antes de los trabajos clásicos de dichos autores*. Estas aproximaciones implican una profunda reflexión sobre la naturaleza del número, y, sobre todo, en lo que se puede enunciar como la naturaleza, la esencia del número, muy en el sentido expresado por Dedekind (1930) en la introducción de su trabajo *Qué son y para qué sirven los números*.


En resúmen: diremos que la cantidad se divide en contínua i discreta, i que:

1.° Se llama cantidad *contínua* a la de especie tal, que una magnitud cualquiera tiene siempre otra menor, i que entre dos magnitudes diferentes cualesquiera, hai siempre una infinidad de magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad continua puede crecer i decrecer indefinidamente.

2.° Se llama cantidad *discreta* a la de especie tal, que tiene alguna magnitud que no tiene otra menor, i que entre dos magnitudes cualesquiera, no hai sino ciertas i determinadas magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad discreta solo puede crecer indefinidamente.

Se llaman *Matemáticas* las ciencias que hacen el estudio de la cantidad, tomada esta en su mayor abstraccion; es decir, no considerándole mas atributo que el de ser susceptible de aumentar o disminuir.

Figura 3. Fragmento en el que se muestran las definiciones de cantidades *continuas* y *discretas*. (Liévano, 1856, p. 8)

Finalmente, resta ver cómo esta idea de cantidad, de magnitud, se usa para mostrar que todo número emerge de la medida de cantidades:

> Es mui fácil hacer ver que no puede haber mas de estas tres especies de números; pues para esto basta el proponerse, de una manera jeneral, la cuestion de medir con la unidad una cantidad que sea conmensurable con ella, i proceder por cada uno de los dos métodos indicados. Así, si procediéramos por el primer método, dividiríamos la cuestión en los tres casos siguientes: 1° Que la unidad sea magnitud alícuota de la cantidad propuesta, i se

[2] Newton, en su libro *Aritmética Univesalis*, define el número como: "por número entenderemos no tanto la Multitud de Unidades, sino la *Razón* de cualquier Cantidad, con respecto a otra Cantidad del mismo Tipo, la cual es tomada como Unidad" (Newton, 1720)

> tendria el número *entero;* 2° Que la cantidad sea menor que la unidad, i se tendría cero unidades i una fraccion, es decir, la *fraccion*; i 3° Que siendo la cantidad mayor que la unidad, no sea esta parte alícuota de aquella, i se tendría el numero *fraccionario.* Ahora, si en cualquiera de los tres casos que acabamos de considerar, i que los comprenden todos, procedemos por el segundo método, es decir, procedemos a espresar la cantidad por un solo conjunto de partes alícuotas iguales de la unidad, tendremos el número que lleva el nombre jeneral de *quebrado,* i que se divide en impropio i propio (Liévano, 1856, p. 10).

En la anterior cita, la noción de parte alícuota se entiende en el sentido euclidiano del término: aquella cantidad que por ser contenida un número exacto de veces en otra cantidad, entonces es la *n-ésima* parte de aquella (lo cual, en lenguaje moderno no es más que la relación de equivalencia: $y = nx$ si y solo si $x = \frac{1}{n}y$). De otro lado, la fracción es entendida por el autor como la repetición de cierto número de partes alícuotas de la unidad, hasta completar la cantidad dada (es decir, en lenguaje moderno, la fracción $\frac{m}{n}$ se interpreta como $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m-veces}$). Por supuesto, estas ideas son mucho más potentes para comprender el número racional, que las actuales aproximaciones en los textos escolares basados en partir, contar y colorear partes de una unidad (ver Obando, 2015, 2003). El potencial radica en que se basan en medir, comparar medidas (establecer razones entre cantidades), y, por ende, todos los números tienen origen en el mismo tipo de actividad. Nótese que la actual aproximación escolar a los números, basada en los conjuntos, hace que lo aprendido sobre los naturales no pueda ser trasladado al aprendizaje de los enteros, o los racionales, y mucho menos, a los reales.

Lección VII: el sistema de numeración decimal

La lección VII inicia con una discusión amplia sobre la forma de extender el sistema de numeración decimal para expresar cantidades que no sean enteras, relacionando las cifras que quedan a la derecha de la coma, con fracciones que tiene por denominador una potencia de 10. Dedica una buena cantidad de páginas a las reglas del sistema de numeración decimal, a la forma de realizar conversión entre la notación fraccionaria y la notación decimal, y las reglas de las operaciones en el sistema de numeración decimal, lo cual se hace enfatizando que son las mismas reglas de las operaciones con números enteros (naturales en lenguaje moderno): "107: S*e deberán seguir exactamente las mimas reglas establecidas para los números enteros*" (Liévano, 1856, p. 83, cursiva en el original).

Es importante notar que este énfasis en el sistema de numeración decimal no es tanto por introducir otra forma de escribir y operar con los números, sino por el interés de presentar los nuevos sistemas de pesos y medidas, a saber, sistemas decimales de medidas para medir la longitud, el área, el volumen, la capacidad, el peso y el valor (el dinero). Para el autor es claro que una de las ventajas de los sistemas decimales para los pesos y medidas es que las reglas de las operaciones se hacen de igual manera como se calcula con los números:

> 120: *Conclusión.* –El cálculo de las medidas i pesas métricas debe hacerse, por los números decimales; porque dichas medidas i pesas siguen la lei decimal. I cuando se hagan aplicaciones debe suspenderse el cálculo en las unidades, que con arreglo a la cuestión, los errores que resulten sean despreciables, teniendo si el cuidado (n° 117) de que el error cometido sea menor que la media unidad decimal […] (Liévano, 1856, p 95, cursiva en el original)

Es importante notar entonces que, para una época en la que los sistemas metrológicos decimales apenas se estaban posicionando en el mundo, este tipo de planteamientos son ampliamente novedosos, sin dejar de lado las consideraciones que, en el país, ya era oficial el uso de tales de sistemas de pesos y medidas, gracias a la influencia política de Lino de Pombo (maestro del Indalecio Liévano).

Para finalizar, es de especial interés la discusión presentada por el autor sobre "los números inconmensurables" (página 90 y siguientes): los números irracionales (números inconmensurables en palabras del autor) se presentan como una construcción sobre la base de sucesiones de números racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor) que tienden al número inconmensurable dado, lo que le permite extender las propiedades ya estudiadas en los racionales, a los reales (números inconmensurables). La idea es simple: se analizan los casos de los decimales infinitos periódicos, mostrando que, si el periodo a partir de una cifra decimal es 9, entonces esa parte del número es igual a una unidad de la fracción decimal a la cifra anterior al inicio del periodo (por ejemplo, en palabras del autor, 7,52999…=7353). Luego afirma que, si el periodo es diferente de 9, esta parte del número no alcanza a completar la unidad anterior al inicio del periodo. Con este principio, demuestra por contradicción que, si el decimal no es periódico, entonces no puede expresarse por un número quebrado. Al final de dicha demostración se lee: "Luego *la cantidad representada por el número decimal ilimitado i no periódico* (puesto que no puede espresarse esactamente por ningún quebrado) *no tendrá parte alícuota común con la unidad i será por tanto no* (n° 3) *conmensurable con ella*" (Liévano, 1856, p. 91, cursiva en el original). Con estas ideas entonces procede a expresar que si bien los números inconmensurables no se pueden expresar con un número decimal, se pueden aproximar tanto como se quiera por números quebrados (en sus palabras "se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada" (p 91)), iterando este proceso tanto como necesitemos (en lenguaje moderno, aproximar un irracional por una sucesión de racionales) se puede obtener una expresión para el número inconmensurable dado.

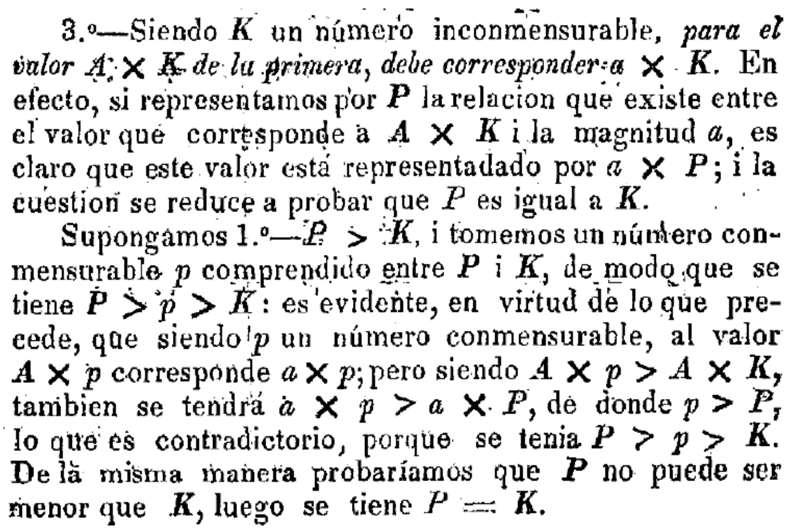
> […] sin embargo, si se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada. Para esto dividiremos la unidad en un número tan grande de partes iguales que cada parte sea menor que la magnitud dada (*); i entonces el quebrado que tiene por numerador el número de veces que esta pequeña parte cabe en la cantidad, i por denominador el número de partes en que se ha dividido la unidad, satisface a la condición requerida. Si ahora queremos aproximarnos más, valuaremos con un cierto error la parte inconmensurable que nos queda, i agregamos este nuevo número al número primitivo; i si esta serie de operaciones se supone prolongada indefinidamente, puede considerarse la cantidad espresada esactamente por la suma de una infinidad de números. Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad (Liévano, 1856, p 91, cursiva en el original).

De la anterior cita, se debe notar, además, la definición de número inconmesurable (número irracional) al final de la misma: es claro que no hay un número racional para expresarlo, pero el procedimiento definido lo objetiva como una cantidad con las mismas propiedades del número racional. Esta idea de que estas cantidades son igualmente números, queda clara en la frase al inicio del numeral 116: "Pasamos ahora a hacer estensivas al número inconmensurable; las propiedades jenerales del número conmensurable." Liévano, 1856, p 91). Así objetiva las nuevas entidades como números. Este procedimiento es novedoso en la época (y anticipado a las soluciones dadas en Europa), y se basa en una idea potente (que se hará visible en los trabajos de Cantor y Dedekind): *construir los reales a partir de los racionales, y extender las propiedades demostradas en dicho sistema, al nuevo sistema, con lo cual adquieren el mismo sentido* *numérico del sistema de origen*.

Esta aproximación a los números reales cierra con el teorema demostrado en la página 132 (en esencia, un parafraseo de la definición 5, del libro V de los elementos de Euclides):

> *150. TEOREMA Siempre que se tengan dos especies de cantidades tales, que para cada valor particular i creciente de la una, corresponda un valor particular i creciente de la otra; i está en la naturaleza de estas variaciones el corresponder para un múltiplo cualquiera de la primera el, mismo múltiplo de la segunda* i estas dos cantidades gozan de la propiedad de que *dos órdenes de magnitud cualesquiera de la primera, guardan la misma relación que los correspondientes ordenes de magnitud de la segunda.* (Liévano, 1856, p 132, cursiva en el original).

La demostración del anterior teorema se basa en que, si las dos magnitudes son conmensurables, la razón entre ellas se puede representar por un número racional, y, por ende, cualquier par de cantidades múltiplos correspondientes de las dos primeras, estarán en la misma razón. En caso de no ser conmensurables, la razón se expresa por un número inconmensurable (número real), y se demuestra por contradicción, que cualquier secuencia de números raciones que acote superior e inferiormente a dicho número inconmensurable, es idéntica a dicho número (ver figura 4). En el fondo, es una demostración de la continuidad de los reales, pues en esencia demuestra que cualquier cantidad, o es un número racional, o es un número irracional, y el autor es consciente de dar solución a un problema no resuelto en Europa, como se puede ver en la extensa nota al pie de la página 133:


3.º—Siendo K un número inconmensurable, *para el valor $A \times K$ de la primera, debe corresponder a $a \times K$.* En efecto, si representamos por P la relacion que existe entre el valor que corresponde a $A \times K$ i la magnitud a, es claro que este valor está representadado por $a \times P$; i la cuestion se reduce a probar que P es igual a K.

Supongamos 1.º—$P > K$, i tomemos un número conmensurable p comprendido entre P i K, de modo que se tiene $P > p > K$: es evidente, en virtud de lo que precede, que siendo p un número conmensurable, al valor $A \times p$ corresponde $a \times p$; pero siendo $A \times p > A \times K$, tambien se tendrá $a \times p > a \times P$, de donde $p > P$, lo que es contradictorio, porque se tenia $P > p > K$. De la misma manera probaríamos que P no puede ser menor que K, luego se tiene $P = K$.

Figura 4. Demostración del tercer caso del teorema 150, cuando las cantidades son inconmensurables (Liévano, 1856, p 132)

> Tengo la satisfacción de presentar al público 1a demostración rigurosa de esta proposición, manifestando que he sido conducido a ella investigando las condiciones necesarias para la proporcionalidad de las cantidades. Hasta ahora los más famosos Matemáticos se han contentado con establecer las propiedades jenerales del número conmensurable i aplicar silenciosamente estas mismas propiedades al número inconmensurable; pero este jénero de deducción está mui lejos de ser riguroso: Yo notando este vacío en la Aritmética me propuse llenarlo, i después de mui detenidas meditaciones he coronado completamente mis esfuerzos, pues he logrado (n° 115) hacer estensivas al número inconmensurable las propiedades jenerales del número conmensurable […]. (Lívano, 1856, p. 133)

Para cerrar este episodio, es importante resaltar que Liévano también muestra cómo este tipo de razonamientos sobre las razones y las proporciones, aplica por igual cuando las cantidades (magnitudes) son de la misma especie (homogéneas), que cuando son de naturaleza diferentes (heterogéneas). Esto muestra una concepción moderna del número, en dónde este emerge de las razones entre cantidades de magnitud (en lenguaje moderno): *todos los números* *tienen el mismo fundamento epistemológico*.

Consideraciones finales

En lo analizado hasta el momento se pueden ver entonces apuestas epistemológicas y ontológicas sobre el concepto de número que se posicionaron como novedosas en la época en la que fueron propuestas. Estas ideas sobre el número se constituyeron como potentes para presentar las ideas fundamentales de la aritmética de una manera sistemática, en la que los diferentes sistemas numéricos tienen su origen en la misma fuente fenomenológica: las magnitudes, sus medidas y las razones entre dichas cantidades. Esta apuesta le permite al autor, no solo presentar los viejos problemas de la aritmética en una nueva forma, sino también abordar problemas no resueltos en su momento: la continuidad de los reales. Por supuesto se podrán encontrar algunos vacíos en su argumentación, pero sin pretender ignorar estas posibles faltas de rigor (visto el rigor en forma anacrónica desde el desarrollo actual de las matemáticas), en el tratamiento que el autor da a la aritmética hay un conjunto de lecciones que pueden ser aplicadas a la enseñanza actual: ¿Qué tal si fundamentamos la enseñanza del número, no desde la teoría de conjuntos, sino desde las magnitudes y sus medidas? ¿Qué tal si centramos los esfuerzos en la comprensión de los elementos esenciales de la naturaleza de tales sistemas numéricos?

No se debe cerrar esta discusión sobre la naturaleza del número, sin mencionar que autores como Davidod (1988) llaman la atención sobre la necesidad de reformular la enseñanza usual de la aritmética escolar, y propone que los fundamentos de la misma no deberían ser los conjuntos, sino las magnitudes y sus medidas, las relaciones y las acciones con las cantidades, y por ende, las relaciones y operaciones con los números.

Referencias y bibliografía

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.

Euclid. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge: Cambridge The University Press.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Investigación psicológica teórica y experimental* (M. Shuare, Trans.). Moscú: Editorial Progreso.

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales. Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Dedekind, R. (1930). ¿Qué son y para qué sirven los números? Traducción de la sexta edición (1930) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Bogotá: Imprenta de Echavarría Hermanos.

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trans.). In *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado desde http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school:*

teaching for understanding with new technologies (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.