



Concepto de determinante: una revisión de los libros de álgebra lineal.

Resumen

El siguiente texto expone la revisión de algunos libros utilizados en los cursos de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander, esta revisión hace parte de una investigación mayor; “Análisis histórico-epistemológico del concepto de determinante”, la cual permitirá comprender el tratamiento que se da al concepto de determinante en los diversos textos. Se busca en ellos información sobre cómo se desarrollan los contenidos de enseñanza, los contenidos científicos, antecedentes y la proyección en el futuro. Se indaga en la importancia que generan los autores, las teorías, y su aplicación en las aulas de clases, así como los aspectos filosóficos y epistemológicos abordados en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Palabras clave: educación, matemática, epistemología, álgebra lineal, determinante.

Introducción

Los cursos de álgebra lineal se encuentran presentes en la mayoría de los programas de Ingenierías, licenciaturas en Matemáticas y Física. Son numerosas las investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que atraviesan los estudiantes para comprender los diferentes conceptos relativos al álgebra lineal, (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000; Dubinsky, 2001; Dorier y Sierpinska, 2001). Los anteriores investigadores coinciden en que las dificultades radican en la construcción de diversos conceptos de álgebra lineal en los estudiantes recién ingresados a la universidad, estos se ven exigidos a construir conceptos con un lenguaje formal y abstracto, cuando su preferencia siempre se limita al trabajo con procedimientos mecánicos, lo que imposibilita la comprensión de los conceptos involucrados (Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis, 1994).

Esta dificultad ha sido una problemática de interés dentro de la Matemática Educativa, ya que no son exclusivas de los individuos que abordan actualmente los conceptos básicos de Álgebra Lineal, sino que hace parte de obstáculos que surgieron en la construcción de los conceptos mismos. El estudio de aspectos históricos y epistemológicos de los objetos matemáticos ampliará la mirada y podrá aportar elementos para repensar aspectos de orden curricular, matemático y/o didáctico (Gómez 2003; Arboleda 2011).

Sí se conoce los aspectos relativos a la construcción histórica-epistemológica de la noción de determinante, se podrá proponer herramientas puntuales para un curso de Álgebra Lineal. Esto es, proponer aspectos curriculares referentes al contenido y aspectos didácticos asociados con el diseño de situaciones que den lugar a ampliar y generar una nueva mirada del concepto de determinante, más allá de la aplicación de un algoritmo.

El análisis y revisión de los libros de texto, está enfocado en tres libros que se usan como guía en los cursos de Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander, se analiza el enfoque y el contenido en cuanto al concepto de determinante.

Marco Teórico

El marco teórico del estudio tiene varias fuentes de las que se expondrá únicamente lo más esencial al desarrollo de la investigación, ofreciendo la perspectiva teórica a la cual va orientada. **La historia de las matemáticas y educación matemática como investigación**

Esta primera sección consiste en establecer un “mapa” en la cual se evidencie cómo se encuentra la investigación de la historia matemática y cómo podemos aprovecharla para la educación matemática además de considerar la pertinencia de un estudio de este tipo.

Anacona (2003) establece varias maneras de abordar el trabajo histórico en torno al conocimiento científico; la autora hace hincapié en dos corrientes: internalista y externalista. La primera hace énfasis en que el objeto de las ciencias es la ciencia misma, esto se puede entender como “hacer historia” de acuerdo con su estructura formal de construcción. Ya en la corriente externalista se tiene en cuenta el ámbito social. La autora enfatiza en el peligro inminente de estar en cualquiera de las dos corrientes, desde la corriente internalista se corre el riesgo de eliminar los componentes que ayudan a la construcción y apropiación del conocimiento el desarrollo científico se independiza totalmente del contexto socio-cultural. La segunda postura crea el riesgo que el estudio se limite dejando de lado el entramado teórico en sí, sería una historia de matemáticas sin matemáticas; sin fundamentos y totalmente vacía.

Una tercera forma de abordar el trabajo histórico está en la intersección entre las dos posturas; filosóficas y metodológicas. Al respecto Anacona (2003) menciona:

... es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas, así como políticas educativas, entre otras. (p. 33)

Este pensamiento hace emerger las bases de nuestra investigación, bases fuertes que se originan en:

- Un estudio de la génesis histórica: esto pone en manifiesto los diversos puntos de vista que para un concepto matemático fueron considerados como correctos y posteriormente rechazados o modificados.
- La epistemología: esta ayuda a establecer qué elementos constituyen la significación de un determinado concepto.
- El contexto sociocultural: es allí donde los libros de texto entran en función pedagógica, social y política. En función pedagógica ya que ocupa la transmisión de los saberes básicos, en función social porque contribuye a la inculturación de las jóvenes generaciones y en función política ya que sus contenidos están regulados por poderes públicos.

Dicho contexto socio-cultural es el que enmarca este escrito, debido a que miraremos dentro de ellos, observaremos como están constituidos, en que se diferencian y muchas más características que en la metodología mencionaremos, de por si es importante establecer en cuanto a los libros de texto utilizados en la enseñanza del Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander estos pueden considerarse fuentes primarias como lo afirma (Cardoso,

2000) y documentos de útiles escolares (Berrio, 1976).

Ya adentrándonos a la segunda parte de este artículo, que está enmarcado en lo que Gómez (2003) llama un análisis de los libros de texto que se realizó durante la investigación histórico-epistemológica. Con esto se buscó obtener una imagen de la situación histórica y la actual de la enseñanza del concepto de determinante, basándose en el enfoque que establecen los libros de texto utilizados en la UIS, los cuales fungen como documentos históricos educativos y son reflejo de las prácticas pedagógicas utilizadas actualmente (Berrio, 1976; Gómez, 2003).

Metodología

Los libros fueron dados al autor de este estudio por profesores que ejercen en la mencionada cátedra universitaria, y que a su vez hacen parte del seminario de álgebra lineal de la UIS. Por medio de una solicitud tipo encuesta-informe, en la cual se solicitaba la información del desarrollo del curso de álgebra lineal, en dicho informe se debían tener en cuenta los siguientes ítems:

- Distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación.
- Texto(s) guía(s) y la bibliografía.
- Temas de los parciales, resultados obtenidos en promedio en cada parcial.
- Enfoques predominantes: Algorítmico, argumentativo, geométrico y/o computacional.
- Dificultades y aciertos detectados.

Para esta ponencia se tiene en cuenta el segundo ítem, el cual enuncia los textos guías. Al mirar los diferentes textos guías que utilizan los maestros se vio que en mayor medida utilizan los siguientes libros:

Tabla 1

Fuentes primarias de los libros de álgebra lineal analizados

Autor	Título	Año publicación
Howard Anton	Introducción al Álgebra Lineal, tercera edición	1976
Stanley Grossman	Álgebra Lineal, quinta edición.	1996
David Poole	Álgebra Lineal Una introducción moderna, tercera edición	2011

Siguiendo a Cardoso (2000), ambos análisis se llevaron cabo de manera interpretativa (hermenéutica), es decir, se intentó reconstruir los hechos históricos entendiéndolos tal como los entendieron los actores, pero aprovechando la perspectiva que nos da estar en el presente para generar nuevos conocimientos.

Cuadro Comparativo De Los Libros De Álgebra Lineal Analizados.

Intentaremos mostrar a nivel muy general las diferencias que se encuentran en los libros Analizados, esto con el fin de ver el enfoque que estos tienen acerca del concepto de determinante, también el ojear con un poco más de información el tratamiento que le dan al concepto de determinante, este cuadro tratará de ser lo más completo posible.

Se establecieron para el cuadro comparativo los siguientes criterios, los cuales se mostrarán los resultados analizados de los primeros cuatro.

1. Contenido: como está organizado el contenido

2. Capítulo sobre determinantes: reconocimiento del capítulo de determinantes
3. Estructura del capítulo de determinantes: como aborda el capítulo de determinantes
4. Otras menciones del concepto de determinante: menciones sobre el determinante fuera del capítulo específico.
5. Referencias históricas: menciones históricas o apartes sobre autores matemáticos.
6. Concepto de determinante: cómo define el determinante
7. Importancia de los teoremas: como se da el tratamiento a los teoremas
8. Teoremas mencionados
9. Representación geométrica: representación geométrica con relación al concepto de determinante
10. Demostraciones: el tratamiento de las demostraciones
11. Matemáticos citados: que matemáticos son mencionados.
12. complementos adicionales: ayudas extras que presenta el libro

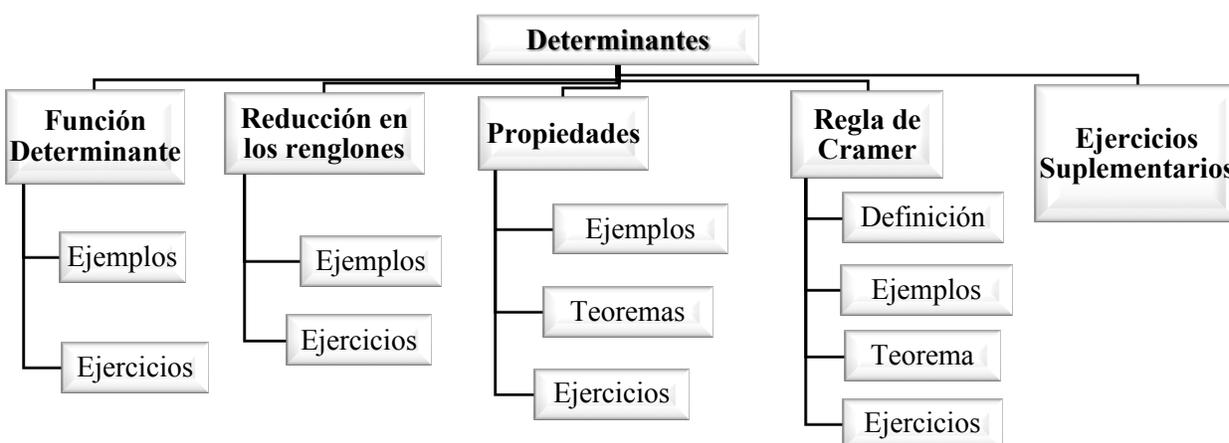
Para la recolección de los datos en los libros mencionados se tenía en cuenta la lista anterior y se iban tomando notas y a partes de lo encontrado en relación a los temas del determinante, todo era organizado en fichas sencillas, las cuales permitían organizar los datos adquiridos para poder formar el cuadro comparativo.

Resultados.

Introducción Al Álgebra Lineal. Howard Anton, Tercera Edición, 1976.

El libro Introducción al Álgebra Lineal de Howard Anton en su tercera edición del año 1976 proporciona un tratamiento elemental de la materia. Dedicar el primer capítulo del libro a los sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, de manera similar a como lo hacen otros libros de texto, dedica un capítulo completo a la presentación del concepto de determinante, sin embargo, existe la particularidad que en el desarrollo del capítulo precedente no se menciona en ningún momento el concepto de determinante.

Cada capítulo tiene una estructura similar a lo que se plantea en la gráfica, sin embargo, cada uno tiene sus particularidades según el tema del que trate. En particular el capítulo dedicado a los determinantes tiene la siguiente estructura:



Esquema 1. Estructura del tema determinantes en el libro.

Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna, David Poole, Tercera Edición, 2011.

El libro cuenta con características particulares que lo han convertido en uno de los textos

de álgebra favoritos de los educadores. Los temas que se tratan en el libro son abordados en un lenguaje simple, fácil de comprender por todos, se dan ejemplos y aplicaciones de los teoremas y de los ejercicios propuestos.

Este libro a diferencia de otros similares no dedica un capítulo específico al concepto de determinante, sin embargo, en el apartado 2 del capítulo 4 hace mención extensa del tema e introduce el concepto de determinante contextualizándolo primero en el origen y uso del término.

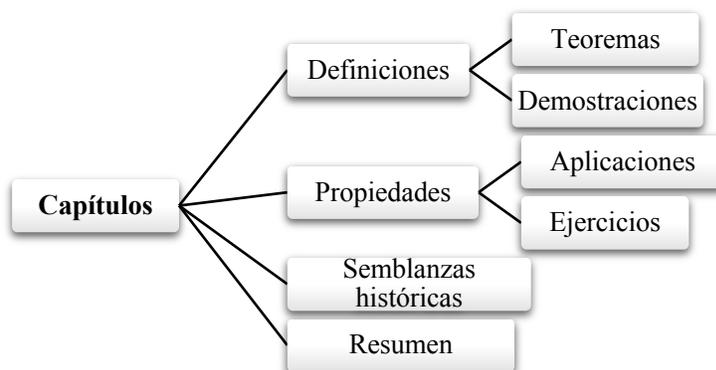
Destaca el hecho de que en el libro comentan que el concepto de determinante se originó dos siglos antes del concepto de matrices a pesar de que actualmente se enseñan de forma inversa.

Álgebra Lineal, Stanley Grossman, Quinta Edición, 1996.

Grossman (1996) quiere hacer accesible el álgebra lineal al mayor número posible de estudiantes en una gran variedad de disciplinas, destacando sus distintas aplicaciones. También quiere reforzar conceptos en aquellos estudiantes que “necesitan solo conocimientos firmes del álgebra correspondiente a la enseñanza media superior” (p. vii).

Al igual que Poole (2011), Grossman considera importante contextualizar algunos conceptos, por eso incluye lo que él llama “semblanzas históricas” dispersas a lo largo del libro.

El libro se encuentra organizado por capítulos y ellos a su vez tienen una estructura en la que presentan el contenido. Tal estructura es similar a la que se muestra a continuación en el esquema 3.



Esquema 3. Estructura de los capítulos

Grossman (1996) dedica un capítulo completo al tema de los determinantes, específicamente el segundo capítulo del libro. Este se presenta tras haber abordado con anterioridad el tema de las ecuaciones lineales y matrices.

Tabla 2

Elementos del cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.

Elementos del Cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.	Álgebra lineal una introducción moderna David Poole, tercera edición 2011.	Introducción al álgebra lineal Howard Anton, tercera edición 1976.	Álgebra lineal de Stanley Grossman, quinta edición 1996

CONTENIDO	Presenta 7 capítulos y 5 apéndices, ninguno de ellos dedicado a determinantes	Consta de 8 capítulos y una sección de respuestas a los ejercicios, de los cuales el 2do capítulo está dedicado a los determinantes	Contiene 6 capítulos y 5 apéndices, adicionalmente consta con un apartado sobre Matlab. El capítulo 2 dedicado a determinantes
CAPÍTULO SOBRE DETERMINANTES	No tiene un capítulo específico dedicado a los determinantes, aborda este concepto en el capítulo de eigenvectores.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.
CONCEPTO DE DETERMINANTE	Propone la definición del determinante como la sumatoria (o resta) del producto de los elementos de una matriz de $n \times n$ en sus diagonales.	Comprende el determinante como una función que asocia un número real a una matriz dada.	Da exactamente la misma definición de Poole, destacando, al igual que él, que no debe confundirse la notación de determinante con la de valor absoluto, por las barras con que se representa.
ESTRUCTURA DEL CAPÍTULO DETERMINANTES	No tiene capítulo de determinantes	Inicia el capítulo hablando sobre la función determinante, sigue con la explicación de la reducción por renglones, luego las propiedades de los determinantes y finaliza con la regla de Cramer a la que siguen algunos ejercicios suplementarios	Grossman comienza con la definición de determinante a la que sigue las propiedades del mismo luego demostraciones de dos teoremas que considera importantes junto con una semblanza histórica sobre los determinantes a la que le sigue la explicación de determinantes e inversas y finaliza con la explicación de la Regla de Cramer a la cual le sigue un resumen del capítulo junto con unos ejercicios de repaso
OTRAS MENCIONES DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE	Solo hace mención al concepto de determinante dentro del capítulo de eigenvectores.	No hace mención en los capítulos precedentes al segundo sobre el concepto de determinante, sin embargo, en el capítulo siguiente dedicado a vectores, en el apartado 3.4 sobre producto vectorial (cruz) usa la notación de determinantes como otra forma de representar la definición.	Es importante mencionar que ya en el capítulo 1 en el apartado de matrices, cuando se está hablando de la inversa de una matriz, se da la primera definición de determinante que presenta el libro, antes del segundo capítulo que es el que dedica específicamente al tema de los determinantes.

<p style="text-align: center;">TEOREMAS MENCIONADOS</p>	<p>Teorema de expansión de Laplace, Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz cuadrada, teorema de una matriz invertible, teorema del determinante de $(kA) = k \cdot \det A$, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, Regla de Cramer</p>	<p>Teorema de reducción por renglones, teorema de una matriz triangular, teorema de operaciones elementales sobre renglones de cualquier matriz, teorema de matrices cuadradas del mismo tamaño, teorema de una matriz cuadrada inversible, teorema de una matriz inversible, regla de Cramer</p>	<p>Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz triangular invertible, teorema del área generada por el determinante de A, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, teorema de la factorización LU de una matriz cuadrada, teorema de una matriz permutación, teorema de la traspuesta de una matriz, teorema básico, teorema de una matriz de $n \times n$ invertible, teorema del $\det A$ diferente de 0, teorema de una matriz de $n \times n$, teorema de una matriz invertible, teorema resumen, regla de Cramer</p>
<p style="text-align: center;">REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA</p>	<p>Este autor habla de vectores antes de profundizar en determinantes, ya que considera que el álgebra lineal se compone esencialmente de vectores y que la comprensión de estos en ciertos escenarios concretos, con la finalidad de obtener la comprensión geométrica necesaria</p>	<p>No hace alusión a la representación geométrica de los determinantes</p>	<p>Incorpora la interpretación geométrica de un determinante de 2×2 por considerar que algunas ideas importantes en el álgebra lineal se observan mejor a través de su interpretación geométrica</p>

Conclusiones y discusiones.

El libro de David Poole tercera edición se enmarca en un énfasis geométrico, el mismo autor detalla que conserva la filosofía del álgebra lineal de vectores subrayando la intuición geométrica. Otra cuestión interesante ya adentrándonos a nuestro tema en particular, los determinantes es que esta versión se introduce el método de condensación de Lewis Carroll.

Otro detalle interesante de mencionar y que ya lo hemos tocado en el cuadro comparativo son los bosquejos biográficos e históricos, el libro de Poole hace varios a partes históricos y biográficos a lo largo de su recorrido, enmarca estos a partes como un “esfuerzo social y cultural, así como científico”. También el libro hace apartes etimológicos, para atender el problema de la terminología.

Lo más interesante de mencionar el libro “Introducción al Álgebra Lineal” de Howard Anton es el tratamiento que da a los determinantes, este enfoque guiado por el enfoque clásico de las permutaciones hace del libro de Howard Anton único en su clase. Al hacer un tratamiento del enfoque de permutaciones el autor deslinda el problema de definir el concepto a través de n formas lineales alternantes esto da al estudiante una mejor comprensión, más intuitiva del tema.

En diferencia a los otros libros de álgebra lineal el libro de Grossman inicia el capítulo definiendo la solución de un determinante de orden 2, establece su notación e invita al lector a no confundir la notación del determinante con el valor absoluto. El libro de Grossman al contrario del libro de álgebra lineal de Howard Anton basa su capítulo de determinantes por el método inductivo. Al definir el determinante de orden 3×3 da pautas de cómo resolverlo de forma sencilla y allí entra la primera dificultad no se puede seguir por el mismo método para el determinante de orden 4. Para seguir se hace necesario introducir las definiciones necesarias para manejar el determinante por cofactores y así poder generalizar al determinante de una matriz de $n \times n$.

El enfoque del libro de álgebra lineal de Grossman se guía más por un enfoque orientado a los sistemas de ecuaciones lineales. A la utilización del determinante como una herramienta y no pasa de allí.

Referencias y bibliografía

- Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Investigación e innovación en educación matemática, 8(1), pp.30-46.
- Anton, H. (1976). *Introducción al Álgebra Lineal (3ra ed.)*, México DF, México: Editorial Limusa.
- Arboleda, L. (2011). *Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente*. XIII Conferência Interamericana de Educación Matemática. Recife: Universidade federal de Pernambuco.
- Berrio, J. (1976). El método histórico de la investigación histórica de la educación. *Revista Española De Pedagogía*, 34(134), pp. 449-475. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/23763481>
- Cardoso, C. (2000). Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia (5ta ed.), Barcelona, España: Editorial Crítica, S.L.
- Dorier, J.L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning at university level - an ICMI study* (pp. 255-273). Dordrecht, Boston, LONDON: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16848>
- Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Algebra in First Year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, (2), pp. 111-137.
- Dubinsky, E. (2000). *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8). American Mathematical Soc.
- Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, 27, pp. 267-305.
- Gómez, B. (2003). *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática*. En Castro, E., Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-86). Granada, España: Universidad de Granada.
- Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal (5ta edición.)*, Mexico DF, Mexico: Editorial Mc Graw Hill.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna*, Mexico DF, Mexico: Editorial International Thompson.