



Modelo didáctico para la enseñanza de la demostración de proposiciones matemáticas

Carlos **Díez** Fonnegra

Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia

carlos.diez@konradlorenz.edu.co

Alejandro **Fandiño** Benavides

Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia

alejandro.fandinob@konradlorenz.edu.co

Fabio Alejandro **Jiménez** Chacón

Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia

fabioa.jimenezc@konradlorenz.edu.co

Resumen

Demostrar proposiciones es una de las competencias más importantes en la formación de un matemático, aun así, en muchos casos los profesores no utilizan de manera deliberada modelos didácticos para su enseñanza, aunque usen algunas prácticas pedagógicas aisladas de manera consciente o inconsciente. El presente trabajo propone un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, estructurado a partir de tres tensores curriculares: el nivel de autonomía de los estudiantes, el nivel de desarrollo del pensamiento relacionado con la demostración y las etapas para la demostración matemática. Para la formulación del modelo se llevó a cabo una investigación descriptiva de las prácticas pedagógicas que utilizan algunos profesores para la enseñanza de la demostración, dichas prácticas y otras prácticas propuestas se articularon en un sistema que orienta la enseñanza de esta competencia.

Palabras clave: demostración matemática, didáctica de la demostración, prácticas pedagógicas, tensores curriculares, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

Los procesos de enseñanza-aprendizaje en el Programa de Matemáticas de la Fundación

Universitaria Konrad Lorenz están basados en un modelo didáctico orientado al desarrollo de competencias. En este sentido, este modelo clasifica las competencias en transversales y específicas, así:

Competencias transversales:

- Lectura
- Escritura
- Exposición verbal de ideas
- Trabajo en equipo e interdisciplinar

Competencias específicas:

- Demostración de proposiciones matemáticas
- Modelado matemático
- Simulación matemática
- Programación en lenguajes computacionales

Para el desarrollo de estas competencias, las asignaturas que constituyen el Programa de Matemáticas se han clasificado de la siguiente forma:

- Asignaturas básicas
- Asignaturas profesionales demostrativas
- Asignaturas profesionales aplicativas
- Asignaturas profesionales teóricas

En cada uno de estos tipos de asignaturas se privilegia el desarrollo de ciertas competencias. En particular, en las asignaturas profesionales demostrativas la competencia central es la demostración de proposiciones matemáticas.

La demostración de proposiciones es una competencia esencial en el quehacer del matemático (Grabiner, 2009), inclusive en la formación escolar, como lo propone el documento Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000). Sin embargo, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, como las relatadas en D'Andrea & Vázquez (2014), Fiallo, Camargo & Gutiérrez (2013) y Martínez Recio (1999), entre otros.

Debido a lo anterior, se desarrolló una investigación que tiene por objetivo proponer, implementar y evaluar un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, que sea parte integral del modelo pedagógico del Programa de Matemáticas.

De esta investigación, se han realizado dos fases: una primera fase fue la realización de un estudio exploratorio sobre las prácticas en la enseñanza de la demostración que los profesores del Programa manifiestan consciente o inconscientemente en sus clases. La metodología para este estudio fue la observación de clases de las asignaturas profesionales demostrativas, con el fin de

identificar dichas prácticas de enseñanza y clasificarlas en tres categorías conceptuales relacionadas con la enseñanza de la demostración. Estas categorías se definen a continuación en el marco teórico. Una segunda fase fue la proposición, con base en la teoría, de otro conjunto de prácticas pedagógicas y su articulación de acuerdo con los tres tensores propuestos: nivel de autonomía de los estudiantes en las prácticas pedagógicas, nivel de desarrollo de su pensamiento relacionado con la demostración y las etapas del proceso de demostración. Queda por realizar una implementación piloto de este modelo para hacer su validación y ajuste.

Marco teórico

Las tres categorías en las que se clasificaron las prácticas pedagógicas son:

- Didáctica

Para Bravo y Arrieta (2012), la enseñanza de la demostración matemática se debe realizar por medio de estrategias y herramientas didácticas que permitan obtener un mejor proceso de aprendizaje. Además, según Ortiz y Jiménez (2006), “la demostración como elemento en la didáctica de la matemática está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamientos imprescindibles en la formación integral de los estudiantes”, para esto:

Los docentes deben escoger las demostraciones a realizar en clase de manera que los estudiantes puedan ver sus resultados directos, la importancia en la práctica matemática y de las otras disciplinas, para que, el estudiante esté en un proceso activo de enseñanza en la demostración matemática, por esto, el docente debe aplicar didácticas convenientes basadas en su experiencia e investigaciones existentes sobre el tema (Ortiz & Jiménez, 2006, p.184).

- Epistemología

Según Fiallo (2013), la epistemología en la enseñanza de la demostración matemática se encarga de descubrir la naturaleza de la demostración y su dificultad relacionada con el conocimiento matemático, de modo que los estudiantes creen conciencia de que la demostración ha sido expuesta desde diferentes puntos de vista por varios matemáticos, de acuerdo a la escuela de pensamiento, las comunidades académicas, las diferentes culturas y épocas históricas, por lo tanto, el punto de vista de la epistemología en demostración matemática busca responder a interrogantes como:

¿Qué es la demostración y cuáles son sus funciones?, ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en las comunidades de matemáticos?, ¿cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas? (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013), entre otras relacionadas.

- Semántica y semiótica

En la formación del matemático esta como competencias principales: la demostración matemática y la resolución de problemas, ya que son inherentes en su preparación, sin embargo, también debe ir ligado en su aprendizaje la escritura, puesto que es necesario para la transmisión de sus ideas, por lo tanto, según Sanabria (s.f) en la actividad matemática:

se distinguen dos componentes principales: la escritura y los procesos para realizarla. El primer componente se debe caracterizar por su rigurosidad y formalidad. El otro componente requiere educar la intuición y el ordenamiento de ideas. Estos dos

componentes son llamados: sintáctico y semántico. (p.40)

Durante la investigación se notó que hay una relación entre las categorías conceptuales, por lo tanto, se propone un diagrama que la describe:

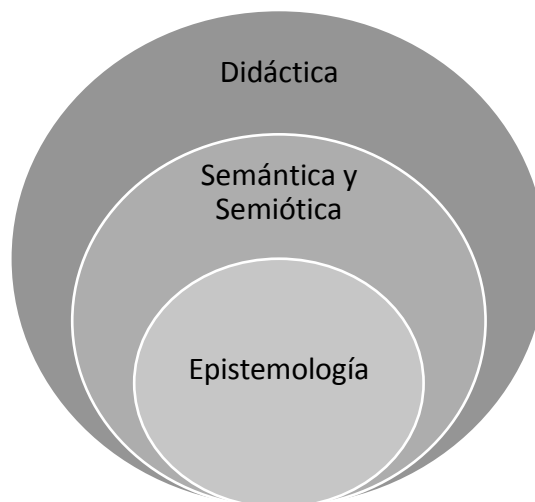


Figura 1. Relación entre las categorías conceptuales marco de las prácticas pedagógicas en demostración.

Este diagrama muestra cómo a través de la historia, el ser humano ha aprendido (separado por las diferentes culturas, lenguas, etc.) a abstraer información del lugar que lo rodea, como abunda Finol (2004): “El ser humano vive en un continuo proceso de conocimiento. Desde todos los ámbitos donde el hombre se encuentra recibe un flujo ininterrumpido de señales, que sobresaturan sus capacidades perceptivas”.

En el texto anterior, se menciona el concepto *señales* como base para los signos semióticos, lo que describe el hecho de que el hombre ha mantenido un registro de sus conocimientos a través de símbolos o palabras, que además son base para la dotación de sentido, es decir, para la semántica de las ideas.

Luego, así como la epistemología es importante, su relación con la semiótica y semántica también toma un papel fundamental para la didáctica, como asegura García (2012): “la didáctica y la semiótica se atenazan cuando se vincula el concepto de didáctica al de educación”.

Aparte de las anteriores categorías conceptuales, se concluyó que las prácticas pedagógicas se pueden clasificar según los niveles de autonomía del estudiante, así:

Nivel de comprensión: momento en que el estudiante está aprendiendo los objetos matemáticos, su significado, procedencia y estructura. En este nivel, el profesor dirige las prácticas que los estudiantes desarrollan.

Nivel de conexión: en este el estudiante interactúa con el profesor en las prácticas pedagógicas. En este nivel, los estudiantes son más activos en su aprendizaje, participando en clase de diferentes maneras.

Nivel de aplicación: acá el estudiante es fundamentalmente autónomo en el desarrollo de ejercicios.

Otro tensor fundamental del Modelo Didáctico para la Enseñanza de la Demostración de Proposiciones Matemáticas (MDPED) son los niveles de desarrollo del pensamiento orientado a la demostración. Para definir estas etapas, se tomaron en cuenta las propuestas de Balacheff y Boero.

Balacheff propone estos niveles desde el punto de vista de las prácticas que tienen los estudiantes en matemáticas, apartándose de la perspectiva lógica, debido a que considera que hay demostraciones pragmáticas y conceptuales (Balacheff, 1988, p. 217), y a partir de lo anterior, considera cuatro niveles que son: el empirismo ingenuo, el experimento crucial, el ejemplo genérico y el experimento de pensamiento.

Por otro lado, Boero propone dos actividades en el aprendizaje de la demostración: el desarrollo de conjeturas y las pruebas formales matemáticas, y propone desarrollarlas por medio de seis etapas: producción de una conjetura, formulación de la proposición, exploración del contenido, selección de argumentos teóricos coherentes, organización de los argumentos, acercamiento a una prueba formal

De las propuestas anteriormente mencionadas, se sintetizaron cuatro etapas para realizar una demostración de una proposición matemática:

1. Producción de una conjetura: consiste en afirmar la verdad de un resultado después de verificar varios casos. Este medio de prueba, muy rudimentario, es una de las primeras formas del proceso de generalización (Boero, 1999)
2. Exploración del contenido: implica identificar los argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y establecer posibles vínculos entre ellos (Boero, 1999).
3. Elaboración de argumentos teóricos de la prueba: consiste en explicitar las razones de la verdad de una afirmación mediante operaciones o transformaciones sobre un objeto que no existe por derecho propio, sino como una característica representativa de su clase (Balacheff, 1988)
4. Formalización de la prueba: en esta etapa se organizan los argumentos encadenados en una prueba aceptable según los estándares matemáticos actuales (Boero, 1999).

Una vez definidos los tres tensores: categorías conceptuales (didáctica, semántica y semiótica y epistemología), niveles de autonomía del estudiante (comprensión, conexión y aplicación) y las etapas de demostración (producción de una conjetura, exploración del contenido, argumentos teóricos en la prueba y formalización de la prueba), se ubicaron las prácticas pedagógicas en el marco conformado por estos, de la siguiente manera:

Tabla 1

Sistema de prácticas pedagógicas del modelo

Etapas de	Niveles de autonomía del estudiante
------------------	--

demostración	Comprensión	Conexión	Aplicación
Producción de una conjetura.	SS1, SS2, E1, D1, D2.		
Exploración del contenido.	SS3, SS4, SS5, E2, E3, D3, D4.	SS7, E8, D10.	
Argumentos teóricos en la prueba.	E4, E5, E6, D5, D6, D7.	SS8, SS9, SS10, D11, E9, E10, D12, D13, D14, D15.	D17, D18, D19, D20, D21, D22, D23, D24, D25.
Formalización de la prueba.	SS6, E7, D8, D9.	SS11, SS12, D16.	E11, D26, D27, D28, D29, D30, D31, D32.

Fuente: Elaboración teórica.

Nota: los códigos que figuran en la tabla corresponden a las prácticas pedagógicas recolectadas en la investigación descriptiva, pero por espacio en este documento no se pueden incluir.

Conclusiones

Al registrar cada una de las prácticas pedagógicas observadas en las clases, se notó que una misma práctica podría pertenecer a varias categorías de análisis, lo que demuestra la relación profunda entre dichas categorías.

La categoría ‘epistemología’ concreta la necesidad de basarse en la historia y en responder interrogantes en la forma como se desarrolló el conocimiento matemático desde los diferentes puntos de vista. La categoría ‘semántica y semiótica’ se genera por la necesidad de reconocer las diferentes formas de escribir un objeto matemático y también las diferentes formas de concebirlo, con el fin de desarrollar la capacidad de visualizar y dar sentido a dichos objetos, mejorando la comprensión y escritura de las proposiciones. La última categoría, la ‘didáctica’, atiende las características de los objetos matemáticos y su articulación en las prácticas pedagógicas.

Durante la observación de clases se notó que los profesores son inconscientes de algunas prácticas que emplean. Esto puede ocurrir por diferentes factores, entre ellos que no poseen un manual de prácticas de enseñanza, no se basan en un programa pedagógico de enseñanza de la demostración matemática o que durante su formación como estudiantes mecanizaron prácticas de enseñanza de sus profesores, de manera involuntaria, entre otros.

Después de realizar la ubicación de las prácticas pedagógicas en el modelo didáctico, se puede notar que:

- En el nivel de comprensión, las prácticas más utilizadas son aquellas que pertenecen a las categorías conceptuales de semántica y epistemología, debido a que los estudiantes están empezando a reconocer los objetos matemáticos. Además, se puede observar que este nivel está relacionado con las cuatro etapas de demostración.
- En los niveles de comprensión y conexión se tienen prácticas de todas las categorías conceptuales, aun así, para el nivel de conexión los estudiantes ya superaron la producción de una conjetura y tienen clara la estructura de los objetos matemáticos.

- Para el nivel de aplicación, las prácticas pedagógicas a emplear son únicamente de la categoría conceptual de la didáctica, también se encontró que en este nivel se desarrollan la tercera y cuarta etapas de la demostración.
- Al finalizar la ubicación de las prácticas se evidencia organización diagonal en la tabla, que indica que a medida que el profesor avanza en los niveles de enseñanza, el estudiante adquiere una autonomía en el desarrollo de las prácticas.

Referencias y bibliografía

- Ávila Godoy, J., Parra Bermúdez, F., & Ávila Godoy, R. (2012). Epistemología y didáctica de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 775-783.
- Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En Pimm, D. (ed.), *Mathematics, teachers and children* (Hodder & Stoughton: Londres), p.16-235.
- Blažková, R. (2013). *Didactics of mathematics*. Brno.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. Volume 8.
- Bravo, L., & Arrieta, J. J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: Resultados de su implementación. *Investigación en educación matemática : séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 153-160.
- Calle Palomeque, C. E. (Septiembre de 2013). *Influencia de la Semántica en el Aprendizaje de las Matemáticas en el Segundo Curso de Bachillerato del Colegio Benigno Malo*. Cuenca: Universidad de Cuenca Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.
- Campos, A. (2005). Acerca de la epistemología de la matemática. *XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (págs. 93-95). Bogotá: Carlos Julio.
- D'Andrea, R. E., & Sastre Vázquez, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 471-479.
- Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, 181-205.
- Finol, J. E. (2004). Semiótica y epistemología-diferencia, significación y conocimiento. *Revista venezolana de información, Tecnología y Conocimiento*, 22-32.
- García de Molero, Í. (2012). Semiótica y didáctica. Relaciones pensamiento/semiosis/mundo en la construcción de aprendizajes significativos en el aula Preescolar. *Omnia*, 11-24.
- Garzon Carreño, M. (2015). Desarrollo y comprensión de la semiótica matemática a partir de la semiótica lingüística y el lenguaje común. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.
- Grabiner, J. V. (2009). Why proof? some lessons from the history of mathematics. *Proof and proving in mathematics education* (pág. 302). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Komensky, J. A. (1947). *Didaktika analytická*. Praha.
- Marcano, Noraida, & Reyes, W. (3 de Diciembre de 2007). Categorías epistemológicas para el estudio de los modelos de formación docente. *Multiciencias*, 7(3), 293-307.
- Martínez Recio, Á. (Junio de 1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de
- Comunicación
- XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia, 2019.

la demostración matemática. España: Universidad de Granada.

MEN. (2006). *Estandares Basicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Revolución Educativa Colombia Aprende.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA, EE.UU.

Ortíz, H., & Jimenez, F. (2006). La demostración elemento vivo en la didáctica de la matemática. *Scientia et Technica*, 237-240.

Recio, Á. M. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica . *Quinto Simposio de la sociedad española de investigación en educación en matemática*, (pág. 17). Almería.

Sanabria Brenes, G. (s.f). Resolución de problemas geométricos. 10.

Sastre, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar?