XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Descriptores preliminares para la comprensión del concepto de Infinito y su relación con las funciones de variable real, en el contexto del Modelo de van Hiele

Alba Soraida **Gutiérrez** Sierra
Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología
Panamá
albasoraidagutierrez@gmail.com
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

Esta comunicación pretende mostrar resultados parciales de la investigación en curso, "Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele". La investigación está basada en un enfoque cualitativo y usa el método estudio de casos, lo cual admite la transformación de la realidad en un contexto educativo particular con miras a producir conocimiento práctico que pueda ser generalizado. El instrumento de indagación es la entrevista semiestructurada de carácter socrático, lo que hace posible confirmar descriptores hipotéticos que se resignifican a través de la implementación, modificación y refinamiento de la misma, posibilitando reconocer el nivel de compresión del concepto en cuestión.

Palabras clave: infinito, matemática, comprensión, razonamiento, van Hiele.

Introducción

Una de las tareas en educación es resignificar la cultura matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en solución de problemas de la vida real. El pensamiento matemático "se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas" (Cantoral y otros, 2005, p.19). La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros conceptos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función; una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.). La presente comunicación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad. Para abordar esta problemática se utiliza modelo de van Hiele, el cual permite describir y explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

Por su parte, Cantor (1932) señala que "existía una correspondencia biunívoca entre un conjunto y un subconjunto de sí mismo, lo que significó el establecimiento de una relación de orden para definir el infinito" (p.34). El avance del concepto de infinito, ha sido habitualmente una polémica, lo que ha provocado una permanente confusión en los estudiantes sobre los conceptos relacionados con él, dificultando la comprensión del concepto mismo asociado a las funciones de variable real. "Al no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, surgen consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones" (Dolores, 2004, p.17). Por otro lado, en lo que respecta al concepto de función, algunos autores han demostrado la evolución de este y sus implicaciones, "manifestando que está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto, y a su vez, induce al desarrollo de cantidad y de número evidenciando la relación con el infinito" (Gutiérrez y Jaime, 1989)

Soportes teóricos

El modelo de van Hiele es el soporte teórico que fundamenta la presente investigación, dado que permite describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito y su relación con el concepto de función, posibilitando diseñar descriptores hipotéticos para cada uno de los niveles de razonamiento correspondientes. Como herramienta importante para detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes, se utiliza la entrevista socrática, la cual permite a través de preguntas intencionadas que no sugieren de manera directa una enseñanza, que el estudiante reflexione y comprenda el concepto en cuestión.

En cuanto al concepto de función, Gutiérrez y Jaime (1990) demostraron la evolución del concepto y sus implicaciones, poniendo de manifiesto que el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto y, a su vez, induciendo al desarrollo de los conceptos de cantidad y de número, evidenciando la relación con el concepto de infinito.

El infinito y su enseñanza en las matemáticas

En las matemáticas el infinito aparece de diversas formas; para Jato (2012):

> Desde el comienzo de la formación escolar se empieza a conocer y convivir con el infinito, concretamente con el infinito potencial que paulatinamente va adquiriendo reflejo en nuestras estructuras mentales ya sea asociado a procesos cíclicos – alternancia entre el día y la noche- a procesos de conteo – números naturales- o a través del infinito geométrico (…) en cuanto al infinito actual este aparece en la escena matemática con el cálculo infinitesimal y se prolonga en la enseñanza de grados universitarios del ámbito técnico científico (p. 14).

La enseñanza del infinito inicia desde edades tempranas en el ámbito escolar, se sitúa hacia la representación de la numerosidad de un conjunto hasta la finalización del bachillerato, con la idea más o menos formal de la noción de límite, con la imagen exclusiva de un símbolo al cual se le atribuye el sinónimo de muy grande o muy pequeño. Esta singular representación ha dejado a un lado el papel que desempeña el infinito en innumerables tópicos de aprendizaje de la matemática en educación media y universitaria, relacionados con conceptos, como: Número real, sucesión, derivada, tangente u otros conceptos asociados. En la enseñanza de las matemáticas, la incorporación del infinito, permite dar una mirada de la literatura científica de diversos estudios para tratar de comprender el papel que desempeña en la construcción de objetos matemáticos; a partir de esto: Belmonte y Sierra (2009) consideran que el concepto de infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones, funciones y series, entre otras.

El modelo de van Hiele y el concepto de infinito

El origen del modelo de van Hiele surge de las dificultades del aprendizaje en la geometría, fue abordado por los esposos Pierre M. van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes en 1957 lo presentan como resultado en sus disertaciones doctorales en la Universidad de Utrecht (Holanda); la experiencia que los esposos poseían producto de su trabajo como docentes, los llevaron a estudiar de fondo las dificultades que mostraban sus estudiantes para solucionar problemas en la geometría, al plantear situaciones cotidianas de la misma índole en diferentes contextos, los estudiantes carecían de ideas y comprensión para alcanzar a resolverlos desde su propia perspectiva, es decir que cuando ellos aprendían los conceptos de memoria no era suficiente para plantear, resolver y hallar una solución válida; en consecuencia el fracaso los llevaba a pensar que la matemática era difícil y en particular la geometría.

El modelo de van Hiele ha sido implementado en diferentes investigaciones para describir la comprensión de algunos objetos matemáticos por parte de estudiantes; este modelo es una propuesta adecuada -entre muchas otras- que describe de manera integral y con suficiente rigor, cómo se desarrolla la evolución de la comprensión del concepto de infinito y sus implicaciones en otros campos de la matemática y demás áreas del conocimiento.

Cuando se reflexiona sobre la descripción y el proceso de comprensión de un concepto matemático específico, se asocia en relación a identificar diferentes formas de razonamiento y se puede valorar su progreso (Hoffer, 1893). A nivel de la instrucción, marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran. En consecuencia y como producto de las disertaciones, Pierre van Hiele diseñó un sistema de niveles de pensamiento en geometría y Dina Van Hiele enfocó sus estudios en el progreso de los niveles de pensamiento de los estudiantes

De esta forma concibieron que el proceso de aprendizaje bajo estos dos aspectos básicos permita explicar cómo el razonamiento geométrico de los estudiantes acontece a través de una serie de niveles. El aprendizaje, para los van Hiele, citados por Shaughnessy y Burger (1985), es una diferenciación y reestructuración progresiva de campos que producen estructuras mentales nuevas y más complejas. Los niveles altos son alcanzados si las reglas que rigen a las estructuras más bajas se han hecho explícitas y han sido interiorizados, llevando esto al desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas.

Metodología

La investigación está orientada en un enfoque cualitativo, de tipo estudio de casos, cuyo propósito es alcanzar una comprensión en profundidad del caso en sí mismo; según Stake (1999) "solo se estudia un caso, o unos pocos casos, pero se estudian en profundidad" (p. 19). Por lo tanto, el estudio de casos se considera el más pertinente, por cuanto permite obtener información detallada de la manera como razonan los estudiantes entrevistados, en relación al concepto objeto de estudio (Londoño, 2011, p. 182). Para la recolección de la información se utilizó como herramienta fundamental la entrevista socrática; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento y se describe la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real.

La Entrevista Socrática

El método socrático, nace de los diálogos que sostenía Sócrates para llevar al individuo a encontrar la verdad sobre el conocimiento. Por tal razón, se considera una estrategia para promover el pensamiento crítico, y de este modo, el estudiante sea quien descubra el conocimiento, utilizando una serie de preguntas y el análisis de sus propias respuestas, es decir; se construye conocimiento a partir de la reflexión crítica de una situación motivada. En este sentido, la elaboración de la entrevista socrática, debió ser cuidadosamente estructurada por varios aspectos: el primero es el lenguaje, factor fundamental para determinar si el estudiante ha comprendido los conocimientos matemáticos; entre otros, están el vocabulario y las relaciones significativas entre los conceptos, los cuales fueron factores de análisis en el desarrollo de la investigación. En estas razones, se resalta la descripción que realiza De la Torre (2003) sobre el método socrático y el modelo de van Hiele, trayendo algunos apartes de su artículo "El método socrático y el modelo de van Hiele"

> El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a develar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz; la inducción en Sócrates no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias. En el modelo van Hiele se insiste en el cuidado que debe tenerse con las premisas siguientes: El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo. El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente. El trabajo es individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se le permita avanzar también a aquellos que se muevan a paso lento. El maestro debe reconocer acertadamente la dificultad del problema, para que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p.101).

En este proceso, el diálogo simple pero complejo a la vez, evidencia como la metodología de Sócrates aporta al modelo, en el fondo induce la manera en que se puede enseñar al estudiante un concepto desde su propia experiencia, modificando de cierta forma lo aprendido y volviendo a analizar, reflexionar e inferir otra perspectiva del objeto matemático, entendido como la estimulación para orientar el razonamiento.

Resultados parciales

El modelo de "van Hiele es utilizado como una propuesta que permite describir las concepciones de razonamiento en un objeto matemático específico, desarrollando la indagación y cuestionamiento permanente para adquirir un conocimiento propio sin necesidad de enseñar" (Londoño y otros, 2017, p.124). Al describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito a través del concepto de función de variable real, se utilizaron descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel establecido en el mismo modelo. A continuación, se especifican cada uno de los niveles que postula el modelo de van Hiele, las características enmarcadas en él y uno de los descriptores, a modo de ejemplo, que deben cumplir los estudiantes para estar clasificados de acuerdo al nivel de razonamiento en que se encuentra.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens (1997):
Nivel 0, **Predescriptivo**
Nivel I, **de Reconocimiento Visual**
Nivel II, **de Análisis**
Nivel III, **de Clasificación, de Relación.**

Nivel 0. (Predescriptivo)

En este nivel, los estudiantes reconocen los elementos básicos aritméticos y geométricos para percibir y describir las figuras, formas o conceptos como un todo, enfatizándose en lo físico y concreto.

- Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos

Nivel I. (Visual)

Para que un estudiante se encuentre clasificado en el Nivel I, de reconocimiento visual, debe: reconocer las figuras y formas por su apariencia global, y percibirlas como objetos individuales.

- Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.

Nivel II (De análisis).

En este nivel los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades, a partir de este análisis puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase, de otro lado, no relacionan las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades.

- Analiza procesos que permiten construir biyecciónes entre un conjunto infinito y un subconjunto infinito propio de él, infiriendo que podrían tener la misma cantidad de elementos.

Nivel III (De clasificación o relación)

Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra. Sin embargo; no reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes; pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla. Sin embargo, pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras, pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

- Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.

Reflexiones o conclusiones.

En estudios como los de Londoño & Jurado (2005), Esteban (2003) Jaramillo C. (2001), entre otros, evidencian que el diseño de la entrevista socrática para la comprensión de diversos objetos matemáticos, permitió de manera efectiva conseguir el objetivo de describir la comprensión. A partir de los anteriores resultados y de el obtenido en la presente investigación, se puede conjeturar que la implementación de un dispositivo elemental pero bien estructurado, permite acceder fácilmente a la comprensión del concepto de infinito, sin duda necesario en el diseño de una entrevista socrática, pues contribuye a que el desarrollo del trabajo de campo se lleve a cabo con más naturalidad y efectividad en el proceso de comprensión.

Esta investigación evidencia que los procesos de descripción y razonamiento para la comprensión que tienen los estudiantes frente a la percepción no cuantificable sobre el concepto de infinito, puede contribuir de manera efectiva a establecer su relación con el concepto de función de variable real.

Referencias Bibliográficas

Belmonte, y Sierra J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in MathematicsEducation,* 17(1), 31– 48.

Cantoral, R. & otros. (2005) “Desarrollo del Pensamiento Matemático” Editorial Trillas, Mexico.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2005) “Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis” Editorial Trillas, Mexico.

De la Torre, A. (2003) “El Método Socrático y el modelo Van Hiele”. Universidad de Antioquía, Lecturas Matemáticas, volumen 24.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. Epsilon, THALES, 58, 20(1), 45T73.

Esteban, P. (2003) “Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele”. Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1989) "Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele". Rev. de Enseñanza de las Ciencias nº 7, p. 89-95.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En L. y. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Hoffer, A. (1893). *Van Hiele - basedresearch. R. Lesh & M. Landau, eds. Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York.

Jato, S. (2012) “El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria”

Jaramillo, L, & Pérez, P. (2001) “La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele”. En: Educación Matemática. Vol., 13. No. 1.Grupo editorial Iberoamérica. México. p. 68 – 80.

Jaramillo, C y Campillo, L. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. *Divulgaciones matemáticas,* 9 (1), 65-84.

Jurado, F., & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la noción de suma de una serie de términos positivos vía área de figuras planas. Antioquia: Universidad.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis doctoral. Colombia: Universidad de Antioquia.

Londoño, R & otros. (2017) "Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnologia, Policia Nacional, volumen 9, numero 2.

Llorens, J., & Pérez, P. (1997). An Extension of van-Hiele's model to the Study of Local Approximation. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 28 (5), 713-726.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Editorial Morata.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.