XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Ideas para valorar el nivel de complejidad de un problema: una experiencia costarricense

Ricardo **Poveda** Vásquez
Ministerio de Educación Pública.
Escuela de matemáticas. Universidad Nacional
Costa Rica
ricardopovedav@gmail.com

Johanna **Mena** González
Ministerio de Educación Pública.
Escuela Educación. Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica
menajohanna22@gmail.com

Resumen

El dominio de conocimientos o el desarrollo de habilidades, aunque necesarios no son suficientes para avanzar en la competencia matemática. El desarrollo preciso de las habilidades se construye a través de la mediación pedagógica, mediante procesos que colocados en tareas matemáticas de diversos niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión) permiten el desarrollo de capacidades superiores. Para este taller se propone la aplicación del modelo simplificado de Ruiz (2017) a una tarea matemática. El objetivo es que los participantes puedan vivenciar una manera para valorar los niveles de complejidad de una tarea matemática a partir de los procesos matemáticos: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar.

Palabras clave: currículo, resolución de problemas, capacidades cognitivas superiores, procesos matemáticos, niveles de complejidad.

Antecedentes

En mayo del 2012 el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprueba nuevos programas de estudio para la asignatura de matemáticas en primaria y secundaria. Este currículo es cualitativamente diferente a los anteriores: no se trabajan objetivos y contenidos; sino el propósito principal es el desarrollo de capacidades cognoscitivas superiores, que parten de habilidades asociadas a conocimientos (áreas matemáticas). Además, se propone la Resolución de Problemas (RP) como estrategia metodológica principal, que busca potenciar las competencias y capacidades matemáticas de los estudiantes.

Resolución de Problemas y valoración de capacidades superiores

Se sabe que se puede lograr un aprendizaje mediante la RP, donde esta posición trasciende la habilidad para resolver problemas y el estudio de estrategias para el mismo fin (Alfaro y Barrantes, 2008; 2015). Esta posición es asumida por los programas de estudio de Matemáticas costarricense, los cuales proponen un estilo para la organización de las lecciones.

Clase mediante la RP

Según el MEP (2012) la clase de matemática debe plantearse a través de dos fases llamadas: el aprendizaje de conocimientos y movilización y aplicación de los conocimientos.

Para la primera fase, se propone que el docente trabaje en cuatro momentos:

- propuesta de un problema,
- trabajo estudiantil independiente,
- discusión interactiva y comunicativa,
- clausura o cierre

Una vez finalizada esta etapa se debe trabajar en una segunda fase que consiste en la apropiación y fortalecimiento de las habilidades que han sido propiciadas a través del problema, esto implica utilizar los conocimientos en contextos diferentes o novedosos.

Chaves (2018) plantea que es necesario la utilización de problemas matemáticos de diferente nivel de complejidad: reproducción, conexión y reflexión; es decir, se debe considerar un nivel creciente en la demanda cognitiva de las áreas matemáticas que se proponen en la clase.

Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de las capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza (MEP, p. 13).

Capacidades cognoscitivas superiores y los procesos matemáticos

Para lograr capacidades cognitivas superiores en los estudiantes, la mediación pedagógica de la clase de matemática debe incorporar procesos matemáticos que son:

> …formas de acción cognitiva que pueden generar capacidades. La selección y conceptuación de estos procesos ordena y define el papel que se desea dar a las capacidades matemáticas (por ejemplo asociar estrechamente la resolución de problemas y la modelización), y facilitan la implementación en la acción de aula de acciones cognitivas transversales de alto nivel. (MEP, 2012, p. 14)

Los procesos matemáticos estipulados en el currículo costarricense son:

Razonar y argumentar: son actividades mentales que buscan la deducción, inducción, comparación, generalización entre otras.

Plantear y resolver problemas: se refiere a la búsqueda de estrategias para la resolución de problemas de diversos contextos. También busca el planteo de problemas a través de situaciones matemáticas dadas.

Conectar: pretende la conexión de las diferentes áreas matemáticas y de otras áreas del saber a través de problemas.

Comunicar: busca que el estudiante se comunique matemáticamente, de acuerdo a su nivel, con su docente o sus compañeros. Esta comunicación puede ser verbal, escrita o visual.

Representar: se refiere al uso y elaboración de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos de cada área.

De acuerdo con Ruiz (2017), el cómo y en qué grado intervienen estos procesos matemáticos en un problema establecen el grado de dificultad de la tarea matemática. Los niveles de complejidad (reproducción, reflexión y conexión) sintetizan la intervención de los procesos; es decir, los procesos son el punto de partida para identificar el nivel de demanda cognitiva de una tarea matemática. Visto de este modo basta con identificar el grado de intervención de los procesos en una determinada tarea matemática o problema para definir el nivel de demanda cognitiva del mismo.

Estructura de Intervención de los Procesos en los Problemas (EIPP): Modelo simplificado

Ruiz (2017) establece 61 criterios o indicadores que definen operativamente la interacción de cada uno de los procesos matemáticos en una tarea. La lista de criterios clasificada en los cinco procesos matemáticos define un modelo completo que permite determinar el nivel de complejidad de un problema o tarea matemática. Sin embargo, dada la complejidad de implementar los 61 indicadores Ruiz (2017) diseñó un modelo simplificado, con 30 indicadores, que permite identificar el nivel de complejidad de una manera más simple. A continuación se detalla el modelo simplificado propuesto por Ruiz (2017).

Tabla 1
Indicadores de grados de procesos de acuerdo al modelo simplificado de Ruiz (2017).

Procesos	Grado 1	Grado 2	Grado 3
Razonar y argumentar	RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?). RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.	RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).	RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos. RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.
Resolver y plantear	PRP1.1 Resolver problemas con datos	PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para	PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados

problemas	sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución. PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.	resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar. PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.	donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.
Conectar	C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas. C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.
Comunicar	COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos. COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).

Representa r	R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada. 10 indicadores Grado 1	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados. 10 indicadores Grado 2	R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas. 10 indicadores Grado 3

Fuente: Ruiz (2017, pp. 142-144)

Como se puede observar en la Tabla 1, si se lee por filas, en estas se establecen los indicadores de cada proceso matemático aumentando el grado de intervención del mismo en el problema matemático. Mientras que si la tabla se lee por columna, se visualiza como esta presente el Grado 1, Grado 2 y Grado 3 en cada uno de los procesos matemáticos. La simbología previa a cada indicador ayudará en el trabajo del taller.

Para realizar el análisis de intervención de los procesos es necesario, en primera instancia resolver el problema dado. Posteriormente, se realiza un barrido por cada uno de los procesos y por cada uno de los indicadores para determinar cuál de ellos está presente en la resolución de la tarea. Puede que algunos procesos no estén presentes. Después de realizar este razonamiento, se desea conocer el nivel de complejidad del problema. La Tabla 2 nos da la fórmula para decidir esto.

Tabla 2
Criterio simplificado para valorar niveles de complejidad

Criterio	
Nivel de Complejidad Simplificado1 (NCS1)	**Nivel de Complejidad Simplificado2 (NCS2)**
Cuando en un problema hay al menos 3 indicadores de un grado N en los procesos se valorará el nivel de complejidad del problema de la siguiente manera: N=1, nivel de complejidad *reproducción*. N=2, nivel de complejidad *conexión.* N=3, nivel de complejidad *reflexión*.	Cuando no se cumple NCS1 (de los 3 indicadores): se debe valorar la situación especial y tomar una decisión con base en los indicadores que se juzguen más decisivos para establecer el nivel de complejidad; por ejemplo, cuando en un problema no sea posible identificar 3 indicadores de un grado N.

Fuente: Ruiz (2017, p. 146).

Para explicar la Tabla 1 y Tabla 2 se planteará un problema y se analizará por completo la intervención de los procesos matemáticos, para luego decidir el nivel de complejidad del mismo.

Análisis de un problema A

A continuación se presenta un contexto, con base en este se plantea un problema, una posible resolución del mismo, se identifican las habilidades y posteriormente se expone el análisis del procedimiento desarrollado a través del EIPP Simplificado.

Porcentaje de Grasa Corporal

La ecuación de Deurenberg permite el cálculo del porcentaje de Grasa Corporal (%GC) a partir del índice de Masa Corporal (IMC) para personas mayores a 15 años utilizando la fórmula:

$$\%GC = (1{,}2 \cdot IMC) + (0{,}23 \cdot edad) - (10{,}8 \cdot sexo) - 5{,}4$$

Donde, en la variable sexo se coloca 0: Mujeres y 1: Hombres, la varible edad debe ser dada en años y el IMC es el índice de masa corporal, que se calcula con la fórmula $\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{\text{estatura}^2}$, con peso en kilogramos y estatura en metros.

Según la Organización Mundial de la Salud, las diferentes categorías para el %GC son:

Tabla 3

Categorías según el %GC

Porcentaje de Grasa corporal %GC		
Categoría	**Mujeres**	**Hombres**
Grasa esencial	10-13	2-5
Deportistas	14-20	6-13
En forma	21-24	14-17
Valor normal	25-31	18-24
Obesidad	Más de 32	Más de 25

Fuente: Organización Mundial de la Salud

Daniel desea comenzar un programa de entrenamiento diario para mejorar su condición de salud. Para ello necesita conocer su %GC. Si Daniel tiene 38 años, una estatura de 1,76 metros y un peso (masa) de 88 kilogramos:

¿Puede usted ayudar a Daniel a identificar en qué categoría de %GC de acuerdo a OMS se encuentra?

Solución

Primero se debe hallar el IMC pare ello procedemos a sustituir los valores dados:

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{\text{estatura}^2} = \frac{88}{1{,}76^2} = 28{,}41$$

Una vez calculado el IMC procedemos a determinar el %GC, para ellos sustituimos cada una de las variables en la ecuación de Deurenberg:

$$\%\text{GC} = (1{,}2 \cdot \text{IMC}) + (0{,}23 \cdot \text{edad}) - (10{,}8 \cdot \text{sexo}) - 5{,}4$$

$$\%GC = (1{,}2 \cdot 28{,}41) + (0{,}23 \cdot 38) - (10{,}8 \cdot 1) - 5{,}4$$

$$\%GC = 26{,}63$$

De acuerdo a la clasificación de la OMS sobre el %GC, Daniel está en la categoría de obesidad.

Estructura de Intervención de procesos en un problema (EIPP).

Razonar Argumentar

Al efectuar el problema se debe interpretar la información brindada en el contexto “Porcentaje de Masa Corporal”, es decir, comprender que la ecuación de Deurenberg permite calcular el índice de masa corporal, para ello se deben sustituir los valores dados en cada una de las variables proporcionadas en la ecuación (valor numérico de una expresión algebraica). Luego, el estudiante se debe percatar que primero debe calcular el IMC para poder sustituir ese valor en la ecuación de Deurenberg junto con los otros valores que son dados directamente. Por último, hay que interpretar el valor obtenido de acuerdo a la tabla brindada por la OMS. Indicador RA1.4

Plantear y resolver problemas
El estudiante debe visualizar que primero se debe calcular el IMC para ser sustituido con los otros valores en la ecuación de Deurenberg. Note que el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica es un procedimiento rutinario para el estudiante. Indicadores PRP1.2; PRP1.2

Conectar
Una vez realizada la sustitución de valores en la ecuación de Deurenberg (valor numérico de una expresión algebraica), queda determinada una operación con números racionales que el estudiante debe resolver. Luego se debe determinar una interpretación del valor encontrado de acuerdo a la tabla de la OMS (comparando números racionales). Existe la interacción de dos áreas matemáticas (Números y Relaciones y álgebra) con un contexto real. Indicadores C2.2; C2.1

Comunicar
Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en el contexto para determinar una estrategia de solución. Luego se debe proporcionar una respuesta que interprete el valor encontrado después de calcular el valor numérico. Indicadores COM1.1; COM 1.4

Representar
Se deben identificar los datos presentes en el contexto suministrado. Indicador R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos:
RA1.4; PRP1.2; PRP1.2; C2.2; C2.1; COM1.1; COM 1.4; R1.2

Nivel de complejidad: Al existir seis indicadores de Grado 1 y solamente dos de Grado 2 entonces se utiliza el criterio NCS1 de la Tabla 2, por lo que el problema es de reproducción

Consideraciones finales

- La metodología de Resolución de Problemas permite que las clases de matemáticas sean más dinámicas y con mayor aprendizaje significativo, sin embargo esto trae una serie de retos para los profesores de primaria y secundaria: uno de estos retos es diseñar problemas que propicien capacidades cognitivas superiores.
- Elaborar la solución o posibles soluciones es fundamental para poder valorar la intervención de los procesos matemáticos, asimismo, se debe considerar la solución que el docente considera la más natural de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo, debe estar anuente a considerar soluciones alternativas y valorarlas con la EIPP.
- El análisis del nivel de complejidad de los problemas es fundamental para las actividades que se proponen en la clase pero también en las evaluaciones sumativas.
- En caso de dudas sobre la intervención de los procesos matemáticos en la resolución de un problema, se puede recurrir al modelo completo propuesto por Ruiz (2017) debido a que se exponen otros indicadores que permiten identificar algunas acciones que el simplificado omite con el objetivo de ofrecer un recurso más práctico.

Referencias bibliográficas

Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008) *¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense.* Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática 3(4), 83-98.

Alfaro, C y Barrantes, H (2015). ¿Qué es un problema matemático? [pptx]. Universidad de Costa Rica, Facultad de Educación. Escuela de Formación Docente. FD0531 Metodología para la Enseñanza de la Matemática. Recuperado de: https://docs.google.com/presentation/d/1Mtf2KVI6tmpUuDoOQJoKmkhqOMiTs00fNiRcdV0hDa8/edit - slide=id.p3

Carbajal, A. (2017). *Manual de Nutrición y Dietética.* Departamento de Nutrición. Facultad de Farmacia. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: https://www.ucm.es/data/cont/docs/458-2013-07-24-cap-2-composicion-corporal55.pdf

Chaves, E. (2018). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34371

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ruiz, A. (2017). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, octubre. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622