XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico[1]

Rodolfo **Vergel** Causado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá-Colombia
rvergelc@udistrital.edu.co

Resumen

El análisis sobre formas de pensamiento algebraico no evade la discusión de las formas de pensamiento aritmético. Resultados de investigación muestran que la ausencia de indicios espaciales en secuencias numéricas hace recaer la generalización sobre relaciones entre números, lo que facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error que se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008; Vergel, 2015). A partir de datos provenientes de una investigación doctoral y de un programa de extensión con profesores de matemáticas, se analiza la actividad semiótica de una estudiante y de una profesora de primaria, respectivamente. El análisis sugiere, por un lado, la presencia de una posible zona en la que formas sofisticadas de generalización aritmética estarían muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico, y, por otro lado, profundizar la reflexión epistemológica en aras de lograr una caracterización más inteligible de esta zona conceptual.

Palabras clave: Analiticidad, Generalización aritmética, Generalización algebraica, Pensamiento algebraico temprano, Proto-analiticidad.

Abstract

The analysis about forms of algebraic thinking does not evade the discussion on arithmetical thinking forms. Research results show that the absence of spatial clues in numerical sequences leads to the generalization of relationships between numbers, which implicitly facilitates the emergence of trial-error strategies that stand as an obstacle to the deductive thinking on which analyticity rests (Radford, 2008, Vergel, 2015). Based on data from PhD research and an extension program with mathematics teachers, the semiotic activity of a student and a primary school teacher, respectively, is analyzed. This analysis suggests, on the one hand, the presence of a possible zone

[1] Este trabajo se inspira en las reflexiones epistemológicas y pesquisas adelantadas en el marco de mi estancia posdoctoral, bajo la dirección del Dr. Luis Radford, en Laurentian University, Sudbury, provincia de Ontario, Canadá.

in which sophisticated forms of arithmetic generalization would be very close to proto-forms of algebraic thinking, and, on the other hand, to deepen epistemological reflection in order to achieve a more intelligible of this conceptual zone.

Keywords: Analiticity, Arithmetic generalization, Algebraic generalization, Early algebraic thinking, Proto-analyticity.

Introducción

La generalización puede considerarse como uno de los procedimientos relevantes en términos de producción del conocimiento. De hecho, investigadores de la Educación Matemática confieren un protagonismo didáctico a este proceso y un interés importante, ya que, entre otros aspectos, posibilita analizar procesos de pensamiento matemático de los estudiantes. La "anatomía" o naturaleza de la actividad matemática (en tanto actividad semiótica) de los alumnos se constituye en una preocupación didáctica, principalmente, cuando nos vemos avocados, como maestros en la sala de clase, a tratar de comprender lo que nuestros estudiantes nos quieren comunicar al expresar semióticamente las generalizaciones que producen. En este sentido, tiene relevancia la idea de semiótica como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan, es decir, una teoría de la comunicación y significación (Eco, 1988).

Recientemente se reconoce el interés que viene ganando la investigación sobre álgebra temprana (ver, por ejemplo, Ainley, 1999; Cai y Knuth, 2011; Kaput 1998; Kaput, Blanton, & Moreno, 2008; Radford, 2010, 2011, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c). Particularmente, la investigación viene mostrando que, aun cuando las producciones de los alumnos no contienen signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico. En este contexto de investigación se ha situado el estudio de la generalización, pues como lo sostiene Michael Otte, "la generalización es esencial, ya que es este proceso el que distingue la creatividad matemática del comportamiento mecánico o algorítmico" (Otte, 2003, p. 187).

Este escrito está dividido en tres secciones. En la primera, que he llamado Consideraciones teóricas, planteo algunas caracterizaciones de álgebra y de actividad algebraica, así como una definición de saber algebraico que posiciona, a su vez, una caracterización de pensamiento algebraico, y de generalización algebraica y aritmética de patrones. En la segunda sección presento el análisis de dos ejemplos de actividad semiótica que me permiten discutir una posible zona conceptual en la que se confunden o entrecruzan formas avanzadas de generalización aritmética (como ejemplos de pensamiento aritmético) y proto-formas de pensamiento algebraico. Hacia el final de este trabajo derivo algunas conclusiones y propongo varias consideraciones que sugieren continuar profundizando la discusión alrededor de esta zona conceptual, discusión que puede contribuir al desarrollo de la propuesta de cambio curricular de Álgebra temprana.

Consideraciones teóricas

En el trabajo de aula es frecuente que los profesores, en su ejercicio profesional de enseñar matemáticas, enfaticen, en momentos específicos de la clase, alguna concepción de álgebra. Desde luego, el énfasis sobre alguna concepción de álgebra en particular estaría afincada en la misma naturaleza de la actividad matemática, pues en algunos momentos se debe desplegar un tipo de actividad semiótica que opere con lo indeterminado, sin descuidar, por supuesto, la toma de conciencia sobre los procesos de deducción implicados; en otros momentos de la clase es necesario avanzar en procesos de generalización y simbolización ya sea en presencia o no de números, y en otros episodios de la actividad matemática se puede requerir específicamente concentrar la atención en la identificación de relaciones funcionales entre variables o cantidades, etc.

Considero pertinente señalar, al menos desde el punto de vista teórico, algunas caracterizaciones de álgebra que podrían estar operando cuando abordamos el trabajo de aula en matemáticas: (i) El álgebra es un método para operar sobre formas generales, mientras que la aritmética es un método para operar sobre números concretos (Viète, 1983); (ii) El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985); (iii) El punto de vista del álgebra concebida como una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (Kieran, 2007). En este caso cabe llamar la atención sobre el proceso de desarrollar un sentido de lo indeterminado, pues éste no se logra súbitamente. “Es más bien un lento y laborioso proceso que está íntimamente ligado al tipo de tareas propuestas en la sala de clase y a la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y entre estudiantes y profesor” (Vergel, 2016b, p. 511); (iv) El álgebra es inherente a la aritmética […] la aritmética tiene ya un carácter algebraico” (Carraher & Schliemann, 2007, p. 17); (v) La actividad simbólica es algebraica. Aquellas actividades en las cuales la generalización es expresada a través de otros sistemas simbólicos no son consideradas genuinamente algebraicas (son llamadas cuasi-algebraicas) (Kaput et al., 2008); (vi) El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (Subramaniam & Banerjee, 2011, p. 87).

Coincido con Luis Radford en caracterizar el saber como un sistema. Para este autor, el saber “es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (Radford, 2017, p. 101). El término sistema usado aquí quiere enfatizar la idea de movimiento, de proceso, algo dinámico y transformativo, susceptible de ser modificado. El saber se entiende como una capacidad latente incrustada en la cultura, una potencialidad (una posibilidad de hacer algo). Pero el origen de esa posibilidad no se encuentra en un mundo platónico, sino en la práctica política y social, es decir, aun cuando el saber es algo general, un arquetipo, formas generales de hacer algo, no constituye un mundo aparte, aislado de las acciones humanas (Radford, 2017).

Recordemos que para Platón, “el conocimiento de las ideas constituye un mundo aparte, separado del mundo sensible, porque su objeto son aquellas cosas inmutables como la belleza y la naturaleza de los dioses” (Platón, 1983, p. 15). Para Radford (2017, p. 103), “el saber es labor cristalizada”, realizada a través de acciones humanas; el saber “es un sistema de acciones codificadas culturalmente” (Radford, 2017, p. 103). Por eso la idea de proceso, de transformación, cobra relevancia. Por ejemplo, en relación con la aritmética, “estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos” (Radford, 2017, p. 101). En esta dirección conceptual, tendríamos que entender el saber algebraico como una forma prototípica de acción y reflexión humana que se convierte en potencialidad cultural y, por tanto, sería pura posibilidad para los estudiantes, es decir, posibilidades que se les ofrecen para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera. En términos de sintetizar estas ideas, e inspirados en los desarrollos filosóficos de Luis Radford, para Vergel y Rojas el saber algebraico:

> Es una síntesis evolutiva —sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa— y culturalmente codificada —como patrones de acción— de hacer y reflexionar en términos

analíticos — es decir, la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido— sobre números indeterminados y conocidos (Vergel y Rojas, 2018, p. 51).

Una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas (Radford, 2010): (a) *el sentido de indeterminancia* —objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros— "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (p. 39); (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción, esto es, partir de ciertas premisas para llegar a ciertos resultados. En otras palabras, la analiticidad refiere al proceso en el cual las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan de manera analítica y, aun cuando estas cantidades no son conocidas, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si fueran conocidas; como señala Descartes (1954, p. 8), "sin hacer distinción entre números conocidos y desconocidos"; y (c) la *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. En el contexto de las secuencias de patrones, "El pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados" (Radford, 2011, p. 23).

Generalización algebraica y generalización aritmética de patrones

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues, entre otros aspectos, posibilita, en el trabajo de aula, aproximarse a situaciones de variación que se erigen como procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento algebraico. De hecho, la propuesta de cambio curricular Álgebra temprana sugiere avanzar en estos procesos de generalización a partir del trabajo con patrones (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2013; Vergel, 2010, 2016c). El trabajo de generalización de patrones nos obliga a precisar, al menos, dos clases de generalización: la algebraica y la aritmética. De acuerdo con Radford (2013), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$).

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$), y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[2] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

[2] Énfasis en el original.

Figura 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales propuesta en Radford (2013)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de lo cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. “La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible” (Radford, 2013, p. 6). De acuerdo con Radford (2013, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*.[3] Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

En el proceso de generalización de patrones, es posible identificar casos de producciones matemáticas de estudiantes que no presentan las características de la definición de generalización algebraica de patrones mencionada anteriormente. En este caso, estos estudiantes aún no han ingresado al reino del álgebra, en tanto pueden estar operando aún en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo, trabajo que podría estar anclado en el nivel de lo concreto. Como dice Vygotsky (1986, p. 133), “El marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto el marco del adulto es conceptual”. Si bien lo generalizado puede ser una comunalidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. Precisa Radford (2013, p. 7), “Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados)”. En este sentido estamos frente a una *generalización aritmética* (Radford, 2008). En el recorrido por la Figura 1 estaríamos predicando sólo hasta configurar la generalización de la característica común. En este caso, no hay deducción de una expresión directa que autorice calcular el número

[3] Énfasis en el original.

de elementos (v.g., cuadrados, círculos, números) en cualquier término de una secuencia de patrones. Como señala Radford (2013, p. 7):

> En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica.

El tipo de inducción al que refiere Radford se llama *inducción ingenua* (Radford, 2008). El adjetivo se usa para distinguir el tipo de inducción de otros tipos de inducción más sofisticados, por ejemplo, del proceso de inducción matemática o inducción completa, tal y como lo describe Fowler (1994, p. 253):

"If $\mathrm{P}(1)$ and

$\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ for all n are both true (valid),

then $\therefore \mathrm{P}(n)$ is true (valid) for all n".

La inducción ingenua se basa en diversas abducciones que están representadas en propuestas de fórmulas, las cuales parecen plausibles, y son sometidas a un número finito de pruebas. Aun cuando por este razonamiento se podría obtener una fórmula algebraica que corresponda al término general de la secuencia, esta regla es obtenida por inducción, es decir, a través de un procedimiento basado en un razonamiento probable y, como precisa Radford (2008, p. 3), "cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas", lo cual, por un lado, marca la diferencia con el proceso de inducción matemática descrito por Fowler (1994), y de otra parte, no sugiere un proceso de deducción (que contiene en su arquitectura la abducción analítica) que sí comporta la generalización algebraica de patrones.

El criterio acerca de la analiticidad, entonces, ofrece un principio operacional para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Es necesario precisar aquí que detrás de la operación con lo indeterminado, se encuentra esta idea de analiticidad, entendida no sólo como el carácter operatorio de los objetos indeterminados, sino también en términos de procesos de deducción, es decir, el trabajo a partir de algo, que es admitido o supuesto con certeza (Descartes, 1983), para llegar a una conclusión. Por eso sostenía Viète (1983) que lo que era distintivamente algebraico correspondía a la manera analítica en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente.

Permítanme hacer una rápida mirada a la historia del pensamiento babilónico en la idea de intentar mostrar su complejidad y su "confusión" sobre si este tipo de pensamiento es algebraico o aritmético. Quiero insistir en el criterio operacional que ofrece la analiticidad para hacer la distinción hasta donde sea posible. En efecto, los escribas babilónicos realmente pensaron que el número uno representaba lo desconocido en un sentido algebraico (Radford, 2001). La elección numérica para lo desconocido pudo haber permitido a los escribas sistematizar los métodos numéricos de resolución de problemas y alcanzar un paso significativo en términos del desarrollo conceptual del pensamiento proporcional antiguo. En el caso específico del método de la falsa posición, haciendo una revisión histórica al pensamiento babilónico, Radford (2001) muestra cómo el trabajo con símbolos numéricos pone de presente una serie de procedimientos que a los ojos de hoy en día son genuinamente algebraicos.

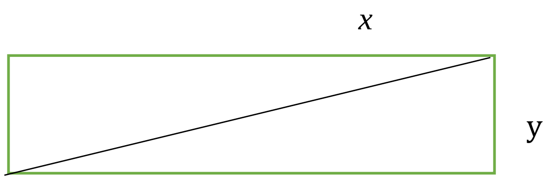

Figura 2. Representación geométrica del problema babilónico

El problema relacionado con el método de la falsa posición, en términos modernos, es el siguiente: *Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo ancho es su longitud menos un cuarto de ella y su diagonal es 40.*

En nuestro sistema semiótico alfanumérico moderno, tendríamos el siguiente desarrollo:

$$y = x - \frac{1}{4}x$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = 1600$$
$$x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} d$$

El escriba babilónico, en contraste, asume una falsa longitud x_0, lo que sugiere una falsa anchura y_0 y procede haciendo el siguiente cálculo:

$$y_0 = x_0 - \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4}x_0.$$

Entonces, asumiendo estas premisas (i.e., las condiciones del problema), él calcula la falsa diagonal usando d_0 de la siguiente manera:

$$d_0 = \sqrt{\left(x_0{}^2 + (\tfrac{3}{4}x_0)^2\right)} = \frac{5}{4}x_0 = \frac{5}{4}\text{, pues } x_0 = 1$$

La cantidad verdadera (solución exacta al problema) puede ser legítimamente pensada a través de otra cantidad. Las “cantidades falsas” aparecen como metáforas de “cantidades verdaderas”[4] (Radford, 2001). La idea principal, señala Radford, estaba supuestamente apoyada por el hecho de que, en algunos problemas, el escriba toma el número 1 como la solución falsa (como el ejemplo aquí mostrado) y cuando, según procedimientos babilónicos, reemplazamos el número 1 por nuestra moderna x desconocida, los *procedimientos de resolución de problemas se parecen mucho a los procedimientos algebraicos modernos*. Mi llamado de atención reside en el hecho de que, si bien no hay signos alfanuméricos en los procedimientos babilónicos, las formas de operar con el símbolo numérico 1 no distan mucho de las formas de operar actualmente con lo desconocido.

Es claro, entonces, que el símbolo numérico 1 se tomaba en realidad como una representación de lo desconocido. También es claro que si no podemos, de manera directa, ver lo

[4] El pensamiento mesopotámico estaba lleno de metáforas (odas, poemas épicos, textos literarios y religiosos) las cuales muestran un intrincado sistema de expresiones metafóricas. Desde la inferencia histórica, se puede afirmar que el álgebra, al parecer, estaba redactada en un sistema así. Ésta es una de las evidencias que muestra cómo la cultura incide en la naturaleza y el desarrollo del saber matemático.

desconocido, es simplemente porque los escribas babilónicos no tenían un símbolo con el que podrían representarlo (Radford, 2001). Es decir, los procedimientos babilónicos y sus formas de pensar tenían lugar con y a través de los signos que disponían. Por eso, desde una postura sociocultural, las maneras como los individuos llegan a conocer, y lo que conocen, llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento y de actividad (Vergel, 2014). Cabe aquí mencionar la premisa epistemológica dialéctico materialista acerca de la cognición y los signos: "La manera, profundidad e intensidad en que un objeto aparece como objeto de conciencia son consustanciales con el material (contenido) semiótico que hace posible que tal objeto se convierta en un objeto de conciencia y pensamiento" (Radford, 2018a, p. 22) [Traducción propia].

La operación con lo desconocido o indeterminado, en este caso con el símbolo numérico 1, implica procesos de deducción, esto es, procesos en los cuales, considerando ciertas premisas (en el caso aquí mostrado, serían las condiciones del problema que son atravesadas por el hecho de que $x_0 = 1$), se llega a ciertos resultados. Si bien el número 1 fungía como lo desconocido para el escriba, es claro que desplegaba también procesos de deducción. Descartes lo diría mejor: "Deducción es todo aquello que se concluye necesariamente de otras verdades conocidas con certeza" (Descartes, 1983, p. 125).

Dos ejemplos de actividad semiótica

En esta sección presento fundamentalmente la producción de una estudiante participante de una investigación (Vergel, 2015), que indagó, desde un análisis multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006), por las formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 4° y 5° de primaria (10-11 años), y la producción de una profesora de básica primaria participante de un programa de extensión (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) que pretendía cualificar las prácticas docentes en matemáticas en escuelas y colegios del distrito de Bogotá (Colombia).

El caso de Yaneth

En el contexto de la investigación aludida, una de las producciones de los estudiantes estuvo precedida por el interés de indagar acerca de los medios semióticos de objetivación que podrían emerger durante su actividad matemática, cuando la *tarea* propuesta correspondía a una secuencia de patrones que no contaba con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular (Vergel, 2015). En términos generales, la tarea tiene un estatus epistemológico y en tal sentido juega un papel clave en la actividad matemática de los estudiantes. De acuerdo con Vergel y Rojas (2018, p. 76):

> La tarea […] está revestida de una densidad epistemológica, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas matemáticas y procesos matemáticos —p. ej., procesos de deducción y de generalización—, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos.

En tanto categoría didáctica, la tarea desarrolla, a través de su abordaje, pensamiento matemático. La idea de tarea se inspira en la máxima vygotskyana, según la cual, "la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración" (Wertsch, 1988, p. 87). La idea de instrucción, que es una traducción del vocablo ruso *obucheni*e usado por Vygotsky, comprometida en la caracterización de tarea, refiere a la actividad integrada de interacción en la cual los procesos de enseñanza y aprendizaje se hallan implicados.

La tarea propuesta, denominada secuencia numérica con apoyo tabular, es la siguiente:

2	**5**	**8**
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 3. Secuencia numérica con apoyo tabular correspondiente a la tarea implementada en Vergel (2015)

Entre otros requerimientos, se solicitaba encontrar los términos 4 y 5 de la secuencia (que se genera a partir del término general $3n - 1$, con $n = 1{,}2{,}3, \ldots$). La profesora Johanna[5] introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (…) entonces miren el término 1 es (…) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores.

El diálogo muestra que el desarrollo de la clase de matemáticas que se venía dando estaba basado en secuencias figurales con apoyo tabular, y ahora los estudiantes se topan con otro tipo de secuencias que no cuentan con elementos geométrico-espaciales. La profesora Johanna decide iniciar un *trabajo conjunto* (Radford, 2014a) e intenta resaltar la relación funcional entre el término y el número correspondiente, con el propósito de hacer emerger una toma de conciencia de dicha relación funcional en y entre los estudiantes. El trabajo conjunto es, precisamente, el que posibilita la toma de conciencia, pues ésta se encuentra estrechamente vinculada con la interacción entre los estudiantes, es decir, con la actividad. “La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia” (Leontiev, 1978, p. 96). Esta relación íntima entre individuo, conciencia y actividad participa en el desarrollo o materialización del sujeto, considerado como una “entidad histórico-cultural en perpetua transformación, esto es, una subjetividad en proceso de fabricación” (Radford, 2018b, p. 23) [Traducción propia]. En este sentido, hay que entender la conciencia en términos de relación —relación al mundo. Esta relación concreta con el mundo sugiere que la conciencia debe entenderse como un caso particular de la experiencia social (Vygotsky, 1979).

El sujeto, entonces, no puede ser, no podría desarrollarse sin la presencia de otros sujetos, sin co-participar de los pensamientos de otros sujetos, de pensamientos ajenos. Para Holquist (1994, p. 25), “Ser [es decir, el sujeto] es una simultaneidad, es siempre un co-ser”. Por eso es

[5] La profesora Johanna participó en la investigación referida en su rol de orientadora de las sesiones de trabajo. Su participación también estuvo asociada con el análisis de las tareas que se diseñaron.

que en la actividad o labor conjunta, las intervenciones de la profesora Johanna buscan propiciar relaciones de alteridad a partir de las cuales haya un entrecruzamiento de conciencias; al decir de Bajtín (2009, p. 360), "la conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena", lo cual sugiere que la conciencia adquiere su identidad dentro de la práctica social reflexiva.

La idea de labor conjunta quiere resaltar el hecho de que "profesores y estudiantes laboran juntos para producir el saber" (Radford, 2014b, p. 11). La actividad o labor conjunta (lo que Radford llama el Particular hegeliano) es, justamente, la que hace que el saber algebraico, como pura potencialidad cultural, se ponga en movimiento. Este es el significado epistemológico que se le confiere a la actividad. Como sostiene Radford (2014b, p. 10), "para convertirse en objeto de conciencia y pensamiento, el saber algebraico tiene que ser puesto en movimiento a través de la *labor conjunta*[6] del salón de clase".

La labor conjunta sugiere que los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje se están transformando, pues aprender algo significa transformación. Esta transformación tiene lugar a través de la interacción y cooperación humanas no alienantes, es decir, a través de una relación de alteridad en la que los sujetos se posicionan críticamente frente a la clase. Radford plantea que:

> Es a través de la labor que encontramos los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser. En su sentido ontológico, la labor significa alteridad —el encuentro de eso que no soy yo, y que al encontrarlo, me transforma. Pues estamos hechos tanto de sangre y huesos, como de historia y relaciones sociales y culturales (Radford, 2014a, p. 138).

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna visita varios grupos para indagar qué piensan sobre la secuencia y cómo, a través de sus producciones e intercambios verbales, han abordado la tarea. Este tipo de actividad es un aspecto clave para hacer aparecer el saber algebraico. Cuando se pone en movimiento, el saber algebraico empieza a transformarse, a materializarse. Es eso lo que se materializa (estos es, lo que se actualiza), mediatizado por la actividad, lo que llamamos conocimiento. En consecuencia, el conocimiento es producto de una mediación (la actividad). Este conocimiento, representado en las diversas producciones semióticas de los estudiantes, necesariamente paga tributo a la actividad.

Desde una postura sociocultural tenemos que aceptar que las formas de pensamiento matemático son consustanciales a la naturaleza de la actividad, en otras palabras, la actividad imprime su marca en la actualización del saber (Ilyenkov, 1977). Dependiendo de la naturaleza de la actividad podríamos hacer emerger una toma de conciencia en los estudiantes acerca de una mirada algebraica de las secuencias numéricas. Es en este sentido que hemos constatado que la materialidad de la actividad es la que hace emerger el saber algebraico de cierta manera (Radford, 2018a; Vergel, 2015, 2016a; Vergel y Rojas, 2018), en otras palabras, el amarre entre el saber y la actividad tiene lugar diferente. Dicha materialidad está representada en las preguntas de la profesora, en las intervenciones de los estudiantes, así como en su producción matemática.

A continuación presento la producción de Yaneth (una estudiante participante de la investigación), como parte de la actividad, motivada por responder al número correspondiente al Término 15 de la secuencia.

---

[6] Énfasis en el original.

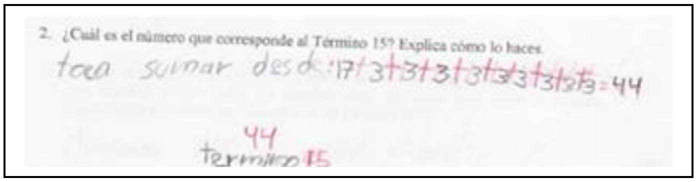

Figura 4. Producción de Yaneth al requerimiento del item 2 de la tarea sobre secuencia numérca con apoyo tabular

Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2, Figura 4). Su producción con respecto al ítem 2, *"toca sumar desde:* $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$*"*, indica que el número 9, obtenido por la diferencia entre los números 15 y 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.

En el proceso de análisis de la secuencia, de cómo cambian los números correspondientes a los términos, esto es, en el proceso de identificación de ciertas determinaciones sensibles potenciales, Yaneth identifica una característica común (aumentar 3) y, a partir de su respuesta al ítem 2, es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al término solicitado (Término 15). Sin embargo, esta generalización de la característica común (abducción en el sentido de Peirce), no parece ser utilizada de manera analítica. El término analítico era considerado por Pappus como movimiento, Pappus decía: "El análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado" (Rideout, 2008, p. 62) [Traducción propia]. La producción de Yaneth, si bien no parece usar como hipótesis o principio asumido la generalización de la característica común para deducir una expresión que le permita calcular el número correspondiente a *cualquier* término, es decir, su generalización no parece ser de naturaleza algebraica, sí recurre a lo que, inicialmente, propongo llamar una *generalización aritmética sofisticada*, que se podría describir de la siguiente manera:

Se parte de un término cualquiera conocido T_a (en este caso, T_6) y se quiere hallar T_n (para este caso, T_{15}); entonces esta estudiante procede haciendo: $T_a + (n - a) \times 3 = T_n$

El adjetivo "*sofisticada"* introducido quiere establecer la diferencia en relación con el proceso de generalización aritmética teorizado por Radford (2013, p. 7), para quien "la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro". La ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales con o sin apoyo tabular) obliga a la realización de un trabajo de generalización, por parte de Yaneth, basado en relaciones entre números. Además, sus procesos perceptivos quedan anclados, necesariamente, al contexto numérico que enfrenta (en este caso, la secuencia numérica con apoyo tabular). "Los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida" (Luria, 1987, p. 18). En casos de producciones de estudiantes que cursan primeros grados de la primaria, sería posible generar una fórmula algebraica tomando en consideración solamente la dimensión aritmética, al notar que se añade siempre 3 a un término para producir el siguiente, sin embargo, este camino resultaría difícil pues requiere un conteo sistemático, el cual, para el caso de la producción de Yaneth, logró transformarse en una expresión aritmética sofisticada: $17 + (15 - 6) \times 3$, pero para estudiantes de los primeros grados de primaria podría resultar difícil, si consideramos, de manera infortunada, la naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético.

El trabajo a partir de relaciones entre números facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error, las cuales se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008, 2013; Vergel, 2015). En este caso, no hay posibilidad de transitar de la abducción a la hipótesis. No obstante, la expresión sofisticada que logra producir Yaneth, que se puede representar como $17 + (15 - 6) \times 3$, sugiere la presencia de lo que propongo llamar una *proto-analiticidad* o *analiticidad incipiente*. Observemos que la obligatoriedad evidenciada en su elocución "toca sumar desde $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$*",* indica que ha considerado la condición de sumar 3, basada en el análisis de cómo cambian las imágenes (números 2, 5 y 8) de los tres términos dados, para poder producir su expresión sofisticada. Su ejercicio de análisis evidencia una mirada estructural de la secuencia, pues se centra en examinar relaciones no sólo entre las imágenes, sino también entre éstas y sus respectivas pre-imágenes, lo que predica muy bien acerca del uso de pensamiento relacional (Molina, 2009).

Propongo, en consecuencia, pensar en una zona conceptual en la cual se confunden formas sofisticadas de generalización aritmética y proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad). El caso de la profesora de primaria que expongo a continuación pretende aportar más evidencias empíricas con el objetivo de substanciar la discusión en relación con la zona conceptual aludida.

El caso de la profesora de primaria

El programa de extensión o proyecto de fortalecimiento curricular en matemáticas aludido anteriormente con profesores de básica primaria (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) tenía por objetivo proponer orientaciones didácticas a los maestros de matemáticas de 150 instituciones educativas de la ciudad de Bogotá (Colombia) para el trabajo en sus clases de matemáticas. Más específicamente, el proyecto pretendía aportar elementos didácticos para promover el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes de todos los grados de la escolaridad. Uno de los aspectos que desarrolló el proyecto consistía en diseñar y validar una serie de tareas que justamente posibilitaran, en su abordaje por parte de los maestros y de los estudiantes, el desarrollo de pensamiento matemático.

Varias de las tareas propuestas en el proyecto de fortalecimiento curricular tenían que ver con secuencias de patrones (tanto numéricas como figurales, ambas con apoyo tabular) y se adelantaron algunas reflexiones con los maestros sobre la importancia didáctica del trabajo en el aula a partir de este tipo de secuencias. Durante el proyecto se planteó a los maestros la siguiente secuencia figural apoyada con representación tabular:

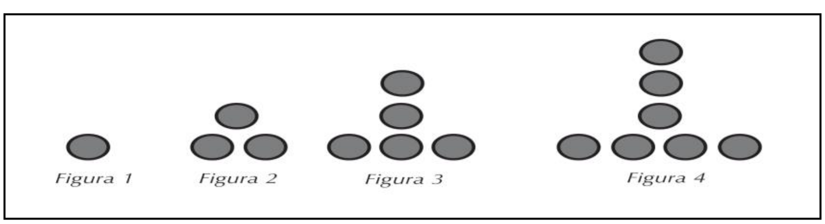

Figura 5. Secuencia figural con apoyo tabular propuesta en el proyecto SED (en prensa)

En su actividad los profesores habían construido las figuras 5 y 6 que fueron solicitadas, y tuvieron la oportunidad de analizar la secuencia, poniendo especial atención a la articulación de las estructuras espacial y numérica en la idea de identificar las variables independiente y dependiente, así como proponer alguna relación entre ellas. Se esperaba que estas reflexiones didácticas sirvieran de insumo para el trabajo posterior que ellos desarrollarían con sus estudiantes a través de la implementación de las tareas, cuyas producciones debían ser analizadas a la luz de las ideas teóricas, provenientes de la didáctica de la matemática, que se discutían previamente en las sesiones de trabajo.

Frente a la pregunta *¿cuántos círculos tiene la figura 100?,* una profesora de básica primaria responde de la siguiente manera:

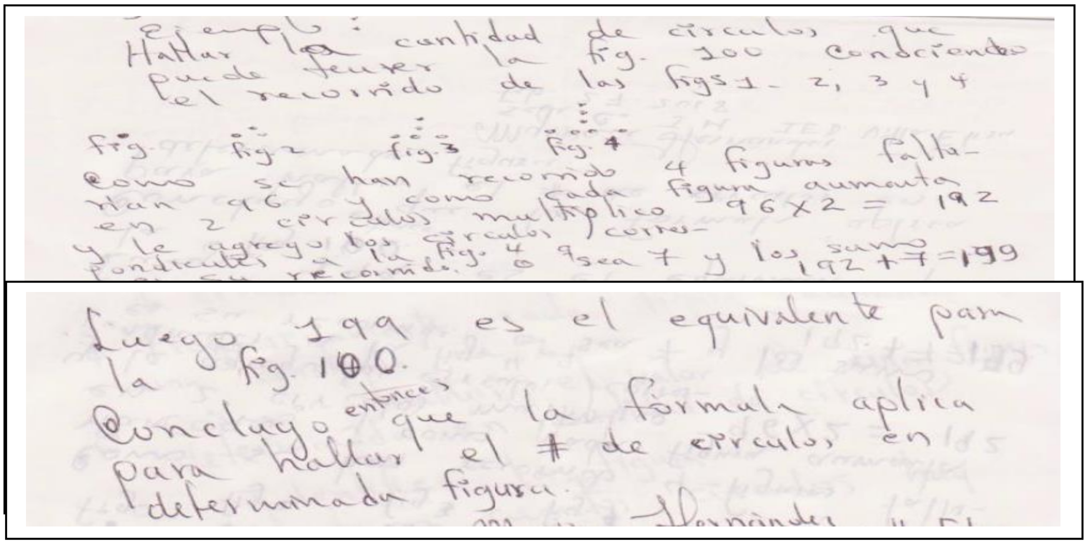

Figura 6. Producción de una profesora de básica primaria que evidencia una generalización aritmética sofisticada

Es clave destacar el sorprendente parecido de la producción sofisticada de esta profesora con la producción de Yaneth analizada anteriormente. Recordemos que la estudiante aborda una secuencia numérica con apoyo tabular, mientras que esta profesora trabaja sobre una secuencia figural con apoyo tabular. En su producción se observa que Yaneth se ancla en 17 que corresponde al Término 6. Por su parte, en su respuesta se observa cómo la profesora se ancla en el número de círculos de la Figura 4 (7 círculos). Ella dice: *"*96 *es lo que le hace falta a* 4 *para llegar a* 100 *y cada figura aumenta de a* 2*, entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4".* El hecho de contar con índices perceptivos generalizables en las secuencias figurales, propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, articulación que viene a constituir un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues la descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos *sin distinguir entre éstas* (esto es lo que Descartes llamó lo *analítico*). Como en el caso de la producción de Yaneth, aquí también emerge un tipo de relaciones, basado en una mirada estructural de la secuencia, que confiere un carácter algebraico a lo que se llama pensamiento relacional (Molina, 2009).

Observemos que su testimonio hacia el final, *"Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el número de círculos en determinada figura"*, sugiere pensar, aquí también, en la *deducción primitiva o incipiente*, la cual, en este caso, proviene de considerar su actividad perceptual sobre el número de círculos en cada una de las cuatro primeras figuras y de un análisis de cómo éstas cambian (ella dice "*entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4").* Si bien la forma de predicación algebraica es general, y en tal sentido necesitaríamos las cantidades indeterminadas, este tipo de deducción que propongo quiere enfatizar el hecho de que, aun cuando la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico, la producción sugiere que estaría muy cerca de este tipo de pensamiento o confundirse con éste.

La profesora procede desde un contexto aritmético y su fórmula es aritmética. No obstante, su producción hacia el final testimonia que esta fórmula aplica para calcular el número de círculos en *determinada figura,* lo cual indica que la fórmula encontrada ha sido deducida de las premisas de la tarea. De otra parte, esta fórmula le permite hallar el número de círculos de cualquier figura. Una vez más, estaríamos ante la presencia de una deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad). Para aclarar esta idea, podemos decir que de la expresión aritmética, por ejemplo, $3 + 8 = 8 + 3$ se puede deducir que $3 + 8 + 2 = 8 + 3 + 2$, pero, insisto, la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico.

Las dos producciones muestran la diferencia, respectivamente, entre el número o imagen a alcanzar (el número correspondiente al Término 15, en el caso de Yaneth, y el número de círculos de la Figura 100, en el caso de la profesora de básica primaria) y el número del término o número de círculos en el que se anclan las dos (el número correspondiente al Término 6 para el caso de Yaneth y el número de círculos de la Figura 4 en el caso de la profesora). El análisis de las producciones en los dos casos hace pensar que podríamos estar ante la presencia de una *generalización aritmética sofisticada* ($T_{\mathrm{a}} + (n - a) \times 3 = T_n$, para el caso de Yaneth, y $T_a + (n - a) \times 2 = T_n$, para el caso de la profesora) o quizás ante la presencia de unas proto-formas de pensamiento algebraico, caracterizadas por una analiticidad incipiente tal y como lo he mostrado a través del análisis semiótico.

Conclusiones y consideraciones finales

Desde las reflexiones epistemológicas y el análisis semiótico planteados en este trabajo, es posible, por tanto, pensar en lo que propongo llamar una *zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico,* zona que estaría caracterizada fundamentalmente por el solapamiento o entrecruzamiento de estas dos formas de pensamiento matemático y que se puede inscribir en el marco de lo que se ha dado por llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico (Radford, 2010).

Si bien el criterio acerca de la analiticidad, tal y como lo he mostrado, ofrece un principio operacional que es útil para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, habría que decir también que el análisis de las estrategias de generalización en la secuencias numéricas con apoyo tabular sugiere que la estructura de la actividad (lo que Radford llama el Particular hegeliano) juega un papel importante en los tipos de generalizaciones que puedan efectuar los estudiantes. Inicialmente nos topamos con formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de, o evolucionar hacia, proto-formas de pensamiento algebraico (caracterizadas por una proto-analiticidad o analiticidad incipiente o primitiva). En *Lecciones sobre la historia de la filosofía I*, Hegel plantea que:

> Para comprender qué es la evolución, es necesario distinguir dos estados: uno es el que se conoce como posibilidad, como capacidad, lo que yo llamo el ser en sí, la potentia; el otro es el ser para sí, la realidad (actus) (Hegel, 1955, p. 26).

Y más adelante Hegel precisa que "El ser en sí y el ser para sí son los momentos de la actividad; en la acción se encierran, por consiguiente, estos dos momentos distintos" (Hegel, 1955, p. 28). La idea vygotskyana que, a mi manera de ver, se inspira en los planteamientos filosóficos de Hegel es que la naturaleza de la actividad (instrucción u obuchenie, en términos de Vygotsky) haría propulsar un tipo de pensamiento particular o transformar un estrato específico de generalidad. El análisis presentado en este trabajo brinda una pauta para pensar que es posible una evolución desde una generalización aritmética hacia una generalización aritmética sofisticada y, a su vez, hacia una proto-forma de pensamiento algebraico. Justamente una de las contribuciones de Vygotsky (2001) fue posicionar la relación crucial que existe entre la instrucción y la maduración de las funciones psíquicas listas a madurar. El filósofo ruso sostiene que, con una instrucción conveniente (obuchenie), las funciones psicológicas, que están próximas a desarrollarse, podrán hacerlo. Como lo sugiere Radford (2014a, 2014b, 2017), para remarcarlo una vez más, es el contenido o la materialidad de la actividad o labor conjunta lo que hace aparecer el saber algebraico de cierta manera (ésta es la idea de encarnación). En otras palabras, "Toda actividad se encarna en alguna forma, reviste alguna forma real, se "amortigua" en su producto, como su resultado" (Kelle y Kovalzon, 1974, p. 241).

En términos de desarrollar una mayor sensibilidad frente a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, considero pertinente continuar auscultando este tipo de deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad) a través de reflexiones epistemológicas en el contexto de las generalizaciones observadas en las secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular. Estas reflexiones de corte epistemológico deben tener en cuenta la idea de analiticidad, que caracteriza el pensamiento algebraico, y a su vez no desestimar las generalizaciones inductivas, las cuales parecen apoyar las generalizaciones de tipo aritmético. Más específicamente, propongo investigar detenidamente la *deducción*, pues ésta podría adquirir significados diferentes en la medida en que una proviene de una abducción mientras que la otra procede de una aserción no abductiva.

Este trabajo está en sus primeros pasos y plantea una discusión necesaria para, entre otras cuestiones, aportar en el desarrollo de una sensibilidad didáctica que nos permita identificar formas de pensamiento de nuestros estudiantes que han quedado invisibilizadas o, para decirlo crudamente, que no hemos sido capaces de comprender, pues quizás no hemos atendido didácticamente lo que nuestros estudiantes producen o nos quieren comunicar. Me parece que se abre una avenida de trabajo e investigación que es necesario recorrer.

El horizonte investigativo de diferenciar entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico se constituye en un verdadero desafío, si aceptamos que la aritmética ya está preñada de un carácter algebraico (Carraher & Schliemann, 2007). Mi insistencia es que es posible, tal y como lo he mostrado, identificar generalizaciones aritméticas muy sofisticadas, o quizás proto-formas de pensamiento algebraico, en los primeros grados de las que ni siquiera somos conscientes, dada la limitación del pensamiento aritmético que se ha adoptado con frecuencia en la investigación sobre álgebra temprana. Dicha limitación debe convertirse en una potencialidad si, por ejemplo, se considera un vínculo explícito entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. La experiencia educativa sugiere que en los currículos escolares se adolece de una tematización acerca de las relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. En este sentido, me parece que el nexo metafórico histórico entre las proporciones y el álgebra es otro aspecto interesante para explorar, tal y como aparece brevemente, y quizás de manera implícita, en la alusión al pensamiento babilónico. De hecho, Vergel y Rojas (2018, p. 21) señalan que:

> […] desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad —en tanto relación entre magnitudes, que además posibilita una conexión con la geometría—, desde el reconocimiento y uso de «unidades múltiples» variables, que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula.

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional (Molina, 2009) podría ser otra fuente de estudio que nos puede ayudar a comprender las filiaciones entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Las actividades matemáticas que ponen en juego el pensamiento relacional "representan un cambio fundamental de un foco aritmético —procedimental, centrado en el cálculo de respuestas— a un foco algebraico —estructural, centrado en examinar relaciones—" (Molina, 2009, p. 143). Parece que este tipo de pensamiento puede constituir un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico (Vergel y Rojas, 2018). De hecho, la idea de pensamiento algebraico que se ha caracterizado en este trabajo comporta necesariamente el análisis de las relaciones entre variables o cantidades. Y no puede ser de otra manera dado que el componente de analiticidad discutido incluye este tipo de relaciones, es decir, asume una mirada estructural (aspecto que le confiere carácter algebraico al pensamiento relacional) exigida, justamente, para llevar a cabo conscientemente procesos de deducción.

Agradecimiento

Quiero expresar un especial agradecimiento al Dr. Luis Radford por su permanente interacción conmigo, materializada en discusiones teóricas y filosóficas, las cuales han posibilitado concretar esta producción académica.

Bibliografía y referencias

Ainley, J. (1999). Doing algebra-type stuff: Emergent algebra in the primary school. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 9–16). Haifa, Israel: PME.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (*editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267- 299.

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal.* México: Siglo XXI editores.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization.* New York: Springer.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover. [Original work published 1637].

Descartes, R. (1983). *Discurso del método. Reglas para la dirección de la mente*. Barcelona: Ediciones Orbis, S.A.

Eco, U. (1988). *Signo.* Barcelona: Labor.

Fowler, D. (1994). Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? Critical remarks on an article by S. Unguru. *Physis, 31,* 253-265.

Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I.* México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Holquist, M. (1994). *Dialogism: Bakhtin and his world*. London: Routledge.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic.* Moscow: Progress Publishers.

Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, ma: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Routledge.

Kelle, V. y Kovalzon, M. (1974). *Sociología marxista. Ensayo sobre la teoría marxista de la sociedad*. Buenos Aires: Cartago.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Luria, A.R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos.* Madrid: Akal.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/ roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Otte, M. (2003). ¿Does mathematics have objects? ¿In what sense? *Synthese*, *134*(1-2), 181-216.

Platón (1983). *Diálogos* (M. J. Ribas, Trad.). Madrid: Sarpe.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40:* 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*, pp. 303-322. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, pp. 3-12. Granada, España: Comares.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). On teachers *and* students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Plenary Conference)*, Vol. 1, pp. 1-20. Vancouver, Canada: PME.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B.

D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018a). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Radford, L. (2018b). Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. In Presmeg, N., Radford, L., Roth, M., & Kadunz, G. (Eds), *Signs of signification. Semiotics in mathematics education research* (pp. 21-35). Cham, Switzerland: Springer.

Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury.

Secretaría de Educación Distrital, SED, (en prensa). *Propuesta pedagógica en fortalecimiento curricular para el desarrollo de aprendizajes a lo largo de la vida con énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico matemático.* Bogotá: SED.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 87-107. Berlín: Springer-Verlag.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de Educación Primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá: Asocolme.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65-76.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2016a). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar.* Bogotá: Editorial UD.

Vergel, R. (2016b). Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. In M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore,* pp. 509-512. Bologna: Pitagora Editrice.

Vergel, R. (2016c). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 23-31.

Vergel, R. y Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial UD.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [work published 1591].

Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology, 17*(4), 3-35.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The mit Press. [Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962].

Vygotsky, L. S. (2001). *Obras escogidas* (Vol. 2). Madrid, España: Visor.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.