XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula

Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

La sencillez es uno de los atributos que le dan realce a la argumentación matemática, pero a veces nuestra endeble cultura matemática no nos permite apreciar que un asunto matemático con apariencia sencilla esconde muchas alternativas no menos atractivas que el tema original. Nuestro interés es compartir experiencias con el recurso didáctico de la historia de la matemática empleado para estimular el desarrollo de prácticas argumentativas en el aula, tanto de enseñanza secundaria, como universitaria. Trataremos varios problemas aritméticos relacionados con las irracionalidades enteras aparentemente muy sencillos, pero con variadas alternativas que permiten desarrollar prácticas argumentativas a diferentes niveles de enseñanza.

Palabras clave: argumentación matemática, irracionalidades enteras, números metálicos, números de Pisot-Vijayaraghavan.

Acerca de la importancia de las prácticas argumentativas

Según la experiencia acumulada hasta el momento consideramos que deberíamos enfocar una atención prioritaria a lograr que los alumnos, con creciente independencia, aprendan a razonar lógicamente y se acostumbren a usar criterios científicos a la hora de tomar decisiones. Uno de los medios primordiales para desarrollar este pensamiento científico es la comprensión y realización de la argumentación matemática para explicar, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemáticas (ver p. e. el *19th ICMI Study* editado por Hanna & Villiers, 2012) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos.

En general, el nivel universitario suele incluir demostraciones, aunque a veces son demasiado formales y pierden atractivo para los jóvenes; el nivel primario frecuentemente -es una pena que no sea siempre- prepara para iniciar las prácticas argumentativas, aprovechando la natural curiosidad de los niños expresada en los insistentes *¿por qué?*, … pero en el nivel intermedio o secundario ¿qué ocurre? Pues que, con asiduidad, nos olvidamos del valor de la argumentación científica y, por una u otra justificante, no se adiestra y a veces ni se incluye explícitamente en los programas, ni aparece en todos los textos oficiales.

Asumimos que todos conocemos la existencia de diferentes "categorías" en las prácticas argumentativas, que van desde una argumentación informal heurística a una prueba formal totalmente rigurosa, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con toda la precisión lógica. En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones dignas, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas matemáticas correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática*. Y no solo la historia antigua, sino también la historia más reciente, incluidas las aplicaciones prácticas que casi siempre aparecen mucho después. Y esto debe hacerse siempre con adecuación a las circunstancias concretas, haciéndolas más accesibles y atractivas al estudiante en un nivel escolar dado. Nuestros argumentos sobre este asunto los hemos venido exponiendo en diferentes escenarios y los más recientes se pueden encontrar en Sánchez (2018) y en Sánchez & Valdés (2016), aquí solo haremos una breve síntesis de nuestras ideas.

¿Para qué recurrir a la historia de la matemática?[1]

Las diferentes pruebas existentes de un determinado teorema o proposición no se realizan en un vacío atemporal, por tanto, nosotros podemos recrear ese contexto histórico en el aula, hacer "una reconstrucción racional" en la complicidad maestro-alumnos, para simular que descubrimos la idea y su efecto, con el asombro y la emoción de la primera vez.

Pero, ¡atención! no se trata de reproducir los detalles históricos, hacer un cuento minucioso y seguir con la forma tradicional de la demostración deductiva; si lo hiciéramos de tal forma, en lugar de propiciar la inteligibilidad del asunto, complicamos la situación didáctica: hemos añadido un valor que significa algo más para aprehender. El maestro competente realiza a priori un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que *lo histórico, lo lógico y lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva.

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia nos provee de una cultura matemática sobre el teorema o proposición correspondiente que sobrepasa con creces el simple conocimiento de una sola de las pruebas –sobre todo si la única conocida es la más concisa y más formal-. Por ejemplo, en el texto de J. W. Dawson (2015) podemos encontrar razones contundentes para recomendar el conocimiento de diferentes demostraciones de una misma proposición, por muy simple que parezca su enunciado.

Es necesario *atemperar y acondicionar* el discurso matemático en el salón de clase, de forma que las prácticas argumentativas sean atractivas y eficaces en cada nivel de enseñanza; para esto consideramos que el recurso de la historia es un ingrediente eficaz. En su origen y desarrollo los hechos matemáticos pasan por diferentes etapas, en la clase no tenemos que reproducir todas estas fases que tienen relación con la actividad investigativa, pero su conocimiento amplio y profundo, posibilita una clase más rica y atractiva. Eso es precisamente el principal objetivo del maestro: *facilitar la comprensión del hecho matemático*.

Ilustremos estas ideas a través del tratamiento del tema de los números irracionales que aparece en casi todos los currículos de enseñanza secundaria y es retomado posteriormente en el

[1] Un artículo muy lúcido y explicativo es Grabiner (2012) que hemos usado como sustento de nuestras reflexiones y puede aclarar mejor al interesado.

nivel universitario. Un tema que cuándo se le comprende bien transparenta simpleza e importancia, tanto en el plano didáctico, como en el plano lógico e histórico. La primera parte se piensa puede ser favorable para maestros del nivel secundario y el tratamiento de los números de Pisot-Vijayaraghavan sería una motivación a la introducción de temas muy fértiles asociados al álgebra conmutativa y al análisis armónico en un nivel universitario.

Las "inexpresables" raíces de los polinomios irreducibles con coeficientes enteros

¿Hay algo más sencillo que resolver ecuaciones como x^n-p=0, dónde p es un número entero? En el caso que el entero p es una potencia enésima de otro entero es sumamente fácil encontrar al menos una raíz. Pero, ¿si p no es una potencia enésima? Aparentemente sigue siendo simple, basta tomar las raíces enésimas del número p, lo que puede reducirse al conocimiento de las raíces enésimas de la unidad. Temprano en la enseñanza secundaria aprendemos que este problema casi nunca tiene una solución racional, es decir, no es un número expresable como cociente de dos números enteros. Más adelante comprendemos que este problema sencillo está relacionado con la misma esencia de unos "números inexpresables" que, con aparente desestimación, se acostumbra a llamarles "números irracionales" y "números complejos".

¿Cómo podemos trasmitir la importancia matemática de estos números inexpresables? ¿Cómo podemos mostrar su profundidad conceptual sin lastrar su sencillez originaria? ¿Qué debemos revelar en cada nivel educacional? Estas interrogantes y muchas otras se pueden responder mejor con el conocimiento de su historia y de sus diferentes pruebas.

En un principio número y magnitud estaban ineludiblemente ligados. Se suele decir que fue en la Grecia Clásica dónde se "descubrieron" los números inexpresables asociados a las magnitudes inconmensurables. Pero mucho antes, los babilonios "inventaron" métodos para enunciar con cierta precisión las *magnitudes inexpresables* con números enteros o fraccionarios.

Por ejemplo, los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas usando sucesiones recurrentes con números fraccionarios que pueden considerarse pasos heurísticos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla, datada en un momento cercano al 1800 a.C., que se conserva en la Universidad de Yale aparece la aproximación en fracciones sexagesimales para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario que con la notación actual es:

$$\sqrt{2} \approx 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \approx 1{,}41421296296$$

Muy cercana al valor aproximado que hoy conocemos en representación decimal

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237\,.$$

También en Egipto, la India y en China se han encontrado documentos antiquísimos que atestiguan el interés originario de dar un valor aproximado a esos "números inexpresables" de manera racional, aunque ¿no es *completamente racional* buscar una medida aproximada? En muchas culturas antiguas y medievales ese era un procedimiento natural y muy racional. Pero hoy nos aferramos a desarrollar el origen histórico de los números irracionales mencionando solo la idea del valor exacto inexpresable como cociente de enteros, enfoque que nos llega desde la Hélade Clásica. Por supuesto, esta idea no es descabellada y también podemos utilizarla aderezándola con el condimento histórico. Veamos.

Al parecer fue el pitagórico Teodoro de Cirene (siglo V a. C.), maestro de Platón, uno de los primeros en plantear una argumentación para el estudio de números inexpresables que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular, con sus conocimientos de geometría demostró que *los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad*. Otro alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios con coeficientes enteros: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio irreducible de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de un polinomio de grado mínimo igual a cuatro, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio con coeficientes enteros de sexto grado como mínimo.

Platón en su diálogo "Teeteto" glorifica uno de los argumentos más socorridos para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2:

> <u>Demostración</u> (en su esencia presentada por Platón). Si 2 fuese racional representable en la forma $\sqrt{2}$= m/n con mcd (m, n) = 1, se cumpliría $m^2=2n^2$, luego m sería par m=2k y de ahí se obtendría que $2k^2=n^2$ y n también sería par, contradiciendo la suposición de que m y n no tenían factores comunes.

Desde entonces acá han proliferado las pruebas de la irracionalidad de las raíces de números que no son potencia de números primos. En el caso de la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, podemos clasificar los tipos de prueba en cinco clases:

1. Las que como la prueba de Teeteto suponen la representación irreducible como fracción y deducen que esta fracción irreducible es reducible, llegando a una contradicción;

2. Las pruebas basadas en el método de descenso infinito, es decir, suponen la expresión racional y prueban la existencia de otra menor, proceso que puede continuarse indefinidamente, lo cual es absurdo porque en todo conjunto de números enteros positivos hay un elemento mínimo;

3. Las pruebas visuales sobre la imposibilidad geométrica de encontrar dos cuadrados de lados enteros, tales que el área del mayor duplique el área del menor;

4. Pruebas con argumentos puramente aritméticos, por ejemplo, que si expresamos los números en un sistema de base 3, entonces los cuadrados terminan en 0 o en 1, por tanto, no pueden ser iguales al doble de un número cuadrado perfecto que terminaría en 2;

5. Pruebas que conjugan dos o más de estos procedimientos.

Nos parece conveniente que en el aula de secundaria se manejen varios tipos de argumentación. Por ejemplo, después de hacer referencia al origen del problema y relatar alguna de las anécdotas se puede plantear la prueba como la cuenta Platón, subrayar el basamento en la lógica bivalente para llegar a contradicción. Preguntar si será posible alguna otra prueba que no use el mismo argumento, dejar pensar y al rato, si no hay propuestas, introducir otro argumento, por ejemplo, hacer uso de que el numerador es mayor que el denominador, sea n=m+p para p > 0, elevar al cuadrado $m^2+2mp+p^2=n^2=2m^2$ e inferir que m>p. Consecuentemente, y razonando análogamente, para algún entero positivo a>0, m=p+a y n=2p+a, luego

$$(2p+a)^2=2(p+a)^2 \rightarrow a^2=2p^2$$

y el proceso puede repetirse indefinidamente: n>m>a>p>… lo que es un absurdo pues todo conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Seguidamente se puede buscar una interpretación geométrica de esta prueba: si existen dos cuadrados uno teniendo el doble de área que el otro, entonces siempre existe otro par de cuadrados más pequeños con la misma propiedad. En el capítulo 4 del clásico texto de Hardy & Wrigth (1938) se encuentran varias demostraciones y exquisitos comentarios históricos.

El problema enseguida se puede generalizar a la determinación de la no racionalidad de otras raíces cuadradas y cúbicas como $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{5}$ y otros números como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como el número de oro. Se puede proceder de diversas formas, por analogía, por generalización, por adaptación y sustituyendo los argumentos que no sean aplicables. De tal forma, con naturalidad, se pasa a raíces de polinomios con coeficientes enteros.

Decimos que α es un *entero algebraico* si cumple $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$, para ciertos b_i todos enteros. Obsérvese que en esta definición se exige que el polinomio sea *mónico*, es decir, el coeficiente principal, $b_n = 1$. Por supuesto, los números enteros son enteros algebraicos, pues son solución de la ecuación $x - n = 0$, y son los únicos números racionales que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes enteros, por ello se llaman *racionales enteros,* los demás se suelen llamar *irracionales enteros,* denominación por cierto aparentemente contradictoria si nos mantenemos con la mentalidad de la aritmética clásica. Reafirmemos que un aporte significativo de la introducción histórica en el siglo XIX de estos nuevos tipos de números es precisamente el fomento de un cambio radical de la mentalidad dogmática aferrada a los clásicos campos numéricos, dónde se cumplen propiedades como la representación única en factores primos o la no existencia de divisores de cero, que en algunas de estas nuevas estructuras numéricas no se conservan.

Consideramos que el tratamiento de estos hechos históricos adaptándolos al contexto escolar tiene un valor didáctico incuestionable. El maestro interesado tiene mucha literatura a su disposición, en particular, recomendamos nuestra biografía de uno de los responsables en difundir las bondades de tales números Richard Dedekind (Sánchez & González, 2015, pp. 81-93).

Es sencillo probar que los enteros algebraicos o son racionales enteros o irracionales enteros, es decir, no pueden ser racionales fraccionarios como 2/3 o -7/5. Para argumentar esto, basta suponer $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$ para $\propto = \frac{p}{q}$, sustituir en la ecuación y llegar a que el denominador q solo puede ser 1 y el numerador debe ser un entero divisor del término independiente b_0. A este resultado tan sencillo se suele llamar *Teorema de la raíz racional* o se asocia al *Lema de Gauss* para la factorización de polinomios, aunque muchos otros matemáticos lo usaron anteriormente sin formalizar su idea.

Los enteros algebraicos cumplen propiedades interesantes, como es que son estables por adición y multiplicación, por tanto, toda potencia entera de tales números es también un entero algebraico . Existen muchos ejemplos atractivos y simples de irracionalidades enteras que pueden estudiarse en el aula de secundaria, no solo raíces elementales de números libres de potencias. Por ejemplo todos los *números metálicos* definidos como raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$, donde N es un entero no negativo y son determinados por la fórmula:

$\delta_N = \dfrac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$. Para N=1 obtenemos el número de oro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$. Cuando N=2, $\delta_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2{,}4142135624$ *número de plata*. Para N=3, $\delta_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}3027756377$ es conocido como *número de bronce*. Todos los números metálicos se pueden aproximar por cocientes racionales formados por términos consecutivos de sucesiones de Fibonacci. Así, por ejemplo, si F(1)=F(2) y F(n+1)=F(n)+F(n-1), se prueba que $\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ y generalizando se toma la sucesión recurrente G(n) definida por: G(n+1)=kG(n)+G(n-1) para n>1, G(1)=G(2)=1, que para cada k>1, genera a uno de los miembros de la familia de números metálicos como límite del cociente $\frac{G(n+1)}{G(n)}$.

La ecuación cúbica semejante $x^3 - x - 1 = 0$ define un irracional entero conocido como número plástico *pl* y cuyo valor puede expresarse por la fórmula encontrada en el siglo XVI para la solución de la ecuación cúbica:

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1{,}324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje benedictino holandés Hans van der Laan en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Con esta *proporción plástica* diseñó la abadía de San Benito en Holanda. Posteriormente el número plástico fue estudiado con mayor profundidad por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935), quién definió una sucesión de número enteros cuyos cocientes aproximan al número plástico. La sucesión de Padovan se define de forma análoga a la sucesión de Fibonacci por medio de una relación de recurrencia A(n+1)=A(n−1)+A(n−2), para n>2 y A(1) = A(2) = A(3)= 1. Entonces el cociente $\frac{A(n+1)}{A(n)} \to pl \approx 1{,}3247$. Por supuesto, mientras mayor sea n, la aproximación del entero irracional por fracciones racionales es más precisa.

En la literatura especializada se pueden encontrar familias de números irracionales enteros con una fértil y atractiva historia. Por ejemplo, familias de números plásticos (Spinadel & Buitrago, 2009) con múltiples usos en diseño, arquitectura y en el estudio de cuasi cristales. Una de las clases de enteros irracionales que más nos sorprende por sus múltiples aplicaciones a dominios de la ciencia tan disímiles, es la clase más amplia consistente de los números de Pisot-Vijayaraghavan (Bertin et al. 1992).

Hace precisamente un siglo, en 1919, el matemático inglés G. H. Hardy encontró que la clase de los posteriormente denominados *números de Pisot* era efectiva para la solución de problemas de aproximaciones numéricas. Posteriormente el indio Tirukkannapuram Vijayaraghavan alumno de Hardy extendió estos resultados. Aproximadamente, por la misma época el joven francés Charles Pisot en su tesis de doctorado (1938) hizo un estudio muy amplio de tales números encontrándoles aplicación en el análisis armónico. Desde entonces en la literatura occidental se les llama *números de Pisot* y pocas veces números de Pisot-Vijarayaraghavan, por simplificación histórica y retórica. Esta clase sorprendente de números irracionales enteros, gracias a los adelantos tecnológicos de las ciencias de la computación, se ha convertido en un modelo ideal para interpretar las características de la estructura ordenada, pero aperiódica de los cuasi cristales, rompiendo un paradigma clásico de la cristalografía (El lector curioso puede encontrar agradable la historia matemática de los cuasi cristales como es narrada por el brillante matemático ruso Vladimir Igorevich Arnold y que aparece traducida al inglés en Arnold, 1990).

Comentemos algunas características de los números de Pisot que no hemos encontrado en ningún texto de enseñanza secundaria o universitaria, nos parecen muy atractivas y además sabemos son muy útiles para comprender mejor ciertos conceptos de álgebra abstracta, aunque sus mayores aplicaciones actualmente tienen que ver con asuntos ligados a la cristalografía. Ante todo, definamos qué entendemos por *números de Pisot*: son los enteros algebraicos p>1 cuyo polinomio mínimo irreducible, no tiene otra raíz (real o compleja) que sea de módulo mayor o igual a 1, es decir, si llamamos *conjugados de p* a todas las otras raíces de su polinomio mínimo, entonces p es un número de Pisot si sus conjugados son todos de módulo estrictamente menor que la unidad. Por ejemplo, si p es un irracional cuadrático tiene un único conjugado irracional entero p' y el par de raíces reales puede ser de solo dos formas:

Caso 1. (p=a+√D, p'=a-√D) o Caso 2. ($p=\frac{a+\sqrt{D}}{2}$, $p'=\frac{a-\sqrt{D}}{2}$).

Ejemplos de irracionales enteros p son el número de oro $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el segundo caso, mientras que el número de plata 1+√2 y el número de cobre 2+√5 son ejemplos del primer caso. El número plástico *pl* es un ejemplo de irracional cúbico y sus dos conjugados algebraicos son los respectivos complejos conjugados uno del otro como ocurre con todas las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales. Se conoce que *pl* es el mínimo número de Pisot-Vijayaraghavan.

Es fácil argumentar la propiedad de aproximación de enteros mediante las potencias enteras de un número de Pisot p^n que son también números de Pisot. Como todos sus conjugados tienen módulo menor que la unidad al elevarlos a la potencia n-ésima se hacen cada vez más y más pequeños. Además, la suma de todas las potencias de las raíces del polinomio mínimo asociado es un entero, por tanto, se acercan a un determinado número entero y con velocidad exponencial.

Los estudiantes secundarios pueden muy bien apreciar el atractivo computacional de esta propiedad y en particular pueden comprobarla tomando las potencias de los números metálicos o plásticos. Podemos observar mejor esta propiedad al hacer una tabla:

Tabla 1
Parte fraccionaria de algunas potencias del número de oro

	Valor de $\{\phi^n\}$
10	0,991 869 …
11	0.005 025…
20	0,999 953…
21	0,003 614…
30	0,999 999…

31	0,000 000…

Se observa en la Tabla 1 que la parte fraccionaria de las potencias impares tiende a cero y que la parte fraccionaria de las potencias pares tiende a uno, por tanto, se subraya que estas potencias se aproximan cada vez más y mejor a números enteros. Algo similar ocurre con todos los números irracionales enteros de P-V como se puede argumentar refiriéndose a las *identidades de Newton* (que fueron usadas 40 años antes que Newton por el francés Albert Girard).

Una vez que los irracionales enteros se convirtieron en una herramienta fundamental y se le encontraron disímiles aplicaciones, la comunidad matemática se interesó por su estudio sistemático, sobre todo usando técnicas computacionales (un texto atractivo y actualizado sobre el uso de herramientas computacionales es el de Borwein, 2002, cuyo capítulo 3 se dedica a los números de Pisot) ¿Pero qué les sucede a muchos maestros de nivel secundario que los discriminan y prefieren etiquetarlos como "difíciles", solo porque son *irracionales*? ¿Por qué los profesores de Álgebra Superior en sus cursos sobre polinomios no introducen los polinomios de Pisot asociados a los irracionales enteros de Pisot? Sin embargo, ¿no creen ustedes que cuándo se conoce bien su origen y desarrollo lógico-histórico, así como algunas de sus aplicaciones más recientes, nos damos cuenta que su fertilidad nos puede ayudar en la elevación de la cultura matemática de nuestros alumnos y además darles una *formación matemática útil*?

Referencias y bibliografía

Arnold, V.I. (1990) *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*, Eric J. F. Primrose translator, Birkhäuser Verlag.

Bertin, M. J. et al. (1992) *Pisot and Salem Numbers*. Basel. Springer Verlag.

Borwein, P. (2002). *Computational Excursions in Analysis and Number Theory*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag. Cap. 3.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht: Birkhauser.

Grabiner, J. V. (2012) Why proof? A Historian's Perspective. En Hanna & Villiers. *Proof and Proving in Mathematics Education*. (pp. 147-167). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. & Villiers, M. de (Eds.) (2012) *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1938) *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. En su 70 aniversario apareció una 6ta. ed. complementada por Andrew Wiles et al.

Sánchez Fernández, C. (2018) ¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 13, n°17, 17-34.

Sánchez Fernández, C. & González Ricardo, L. G. (2015) *Dedekind. El arquitecto de los números*. Madrid. Ed. Nivola.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n° 46, 09-32.

Spinadel, V. W. de & Buitrago, A. R. (2009) Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 13, N2, 163-175.