XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

GeoGebra como recurso para favorecer la interpretación matemática

Agustín **Carrillo** de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
España
agustincarrillo@telefonica.net

Resumen

Incorporar recursos como GeoGebra supone modificar determinados aspectos en el desarrollo de los contenidos sin olvidar los que los alumnos deben adquirir, aunque requiere algunos cambios en la forma de trabajo en el aula tanto para el profesorado como para el alumnado.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones que comienza con la determinación de los apartados correspondientes a dominio, puntos de corte, asíntotas, extremos, crecimiento, etc., hasta llegar a completar los elementos necesarios que permitan su representación gráfica; mientras que con ayuda de programas como GeoGebra el proceso cambia, lo primero que se obtiene es la gráfica de la función, por lo que algo debemos modificar en el proceso de enseñanza para que los alumnos sean capaces de interpretar la gráfica para determinar qué deben estudiar.

Algo parecido ocurre con otros contenidos habituales en los distintos niveles educativos que expondremos en este trabajo.

Palabras clave: GeoGebra, TIC, interpretación.

Introducción

La realidad sobre el uso de las tecnologías en las aulas no es la que todos pensamos, se habla mucho de distintos programas y aplicaciones, pero la situación es otra, ya que tras muchos años aún no hay una implementación generalizada del uso de estos recursos para aprovechar las posibilidades que ofrecen.

El papel escrito que había tenido una gran importancia en la forma de difusión de la información está siendo sustituido por la pantalla del ordenador, del móvil, etc. Las personas ya no son meros receptores de información, se han convertido también en emisores, al crear contenidos y sobre todo al difundirlos y compartirlos.

En la sociedad actual, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al alumnado.

Los estudiantes de hoy son diferentes, quieren usar la tecnología de su tiempo y no les gusta, ni despierta interés, una educación que no se relaciona bien con el mundo real en el que viven. Necesitan nuevos objetivos y nuevas estrategias.

Se hace imprescindible el uso de las TIC en las escuelas desde distintos puntos de vista; tanto para manejar la información que se encuentra al alcance del alumnado, de modo que aprendan a desenvolverse en esta nueva sociedad del conocimiento como ciudadanos con un espíritu crítico, como para potenciar el aprendizaje en las distintas materias del currículo.

Llevamos años cambiando para lograr una escuela que refleje el mundo en el que vivimos, pero la realidad es ¿hemos incorporado nuevos recursos y cambiado la metodología de trabajo para lograrlo?

Cualquier cambio metodológico es lento y al profesorado le cuesta cambiar para adaptarse a los cambios y en este caso a lo que supone incorporar las TIC.

Somos conscientes de la importancia de la tecnología en la sociedad actual y también de la necesidad de su presencia en el aula, pero nos planteamos algunas cuestiones como qué utilizamos, para qué y cómo.

El uso de las tecnologías, si queremos, puede estar presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

GeoGebra como recurso TIC

Este software como es evidente no tiene exclusividad como recurso TIC aunque está claro que la comunidad que se ha creado a su alrededor está ayudando a producir cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Todos conocemos sus principales características entre las que destaca ser software libre y estar disponible para distintos sistemas operativos, además de su continua evolución, sin perder la sencillez de las primeras versiones.

A todo esto hay que añadir los miles de recursos creados por otros usuarios que facilitan el aprendizaje y también su uso sin necesidad de excesivos conocimientos.

Quisiera destacar dos aspectos importantes que pueden ayudar a que GeoGebra se haga más presente en las aulas. Por un lado la amplia oferta de formación y de recursos, y por otro, el que las editoriales se estén interesando por este software incorporándolo a sus nuevos libros.

Utilizar programas como GeoGebra permitirá arrinconar los procesos mecánicos para promover una enseñanza basada en la comprensión de conceptos, para los que fomentar la interpretación de lo que se observa será fundamental.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

El uso de las tecnologías y en concreto de software como GeoGebra promueve el trabajo autónomo de los alumnos y permiten el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los estudiantes, mediante el uso de las herramientas matemáticas adecuadas. Además, se podrán incorporar, con distintos grados de complejidad a la enseñanza de la Matemática, el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, así como para la obtención, proceso y comunicación de la información generada.

La calculadora, y programas como GeoGebra son herramientas al alcance de los alumnos, por lo que su uso estará presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirán mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas.

Al utilizar estos recursos, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

A veces en el proceso de enseñanza se presta más atención a los métodos algorítmicos que al propio concepto o contenido que se está exponiendo o estudiando, lo que supone que un alumno conoce el proceso pero desconoce lo que acaba de hacer o para qué lo ha hecho.

Promover la interpretación matemática será el objetivo de los ejemplos que se describen a continuación.

La interpretación de conceptos en matemática

Un primer ejemplo, favorecido por la sencillez que ofrece GeoGebra, puede ser el conocer e interpretar el significado de los distintos coeficientes en una función cualquiera, desde ejemplos sencillos como la función lineal para comprender el significado de los a y b en su expresión $y = a\,x + b$, como de una función cuadrática expresada en la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$, o mejor como $y = a\,(x - b)^2 + c$, ampliable según el nivel de los alumnos con los que se trabaje a otras familias de funciones como $y = a\,sen(b\,x + c) + d$.

Promover otro tipo de interpretación en la que se pedirá a los alumnos que con lápiz y papel, estimen cuál será el resultado, se puedo lograr con ejemplos como los siguientes:

a. D es un punto de una circunferencia, ¿Qué rastro determina el segmento CD cuando C es interior, al mover el punto D? ¿Y cuando C es un punto exterior?
b. A partir de una circunferencia de centro A y radio 2, se dibuja una nueva circunferencia de centro C y radio 1, siendo un punto de la circunferencia inicial. ¿Cuál es el rastro de la segunda circunferencia al mover el punto C?
c. ¿Qué rastro determina la circunferencia de centro C y radio CD al mover D, siendo D un punto de otra circunferencia y C exterior a dicha circunferencia? ¿Qué ocurre cuando C es un punto interior a la circunferencia inicial? ¿Y cuando C está también sobre la misma circunferencia que el punto D?
d. Determina el rastro de la circunferencia de centro C y radio CD al mover C, siendo C y D puntos de otra circunferencia.

Intuir los rastros resultará una actividad interesante que posteriormente se podrá comprobar con GeoGebra a partir de construcciones sencillas, que requieren pocos pasos y por tanto, pocas herramientas.

Este será el éxito del uso de GeoGebra en el aula ya que si se utilizan construcciones que requieran poco tiempo, permitirán dedicar el resto del horario a conceptos y contenidos matemáticos y no al uso del programa.

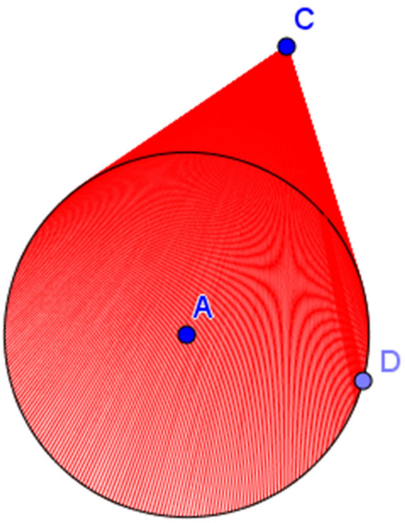

Figura 1. Lugar descrito en el ejemplo a.

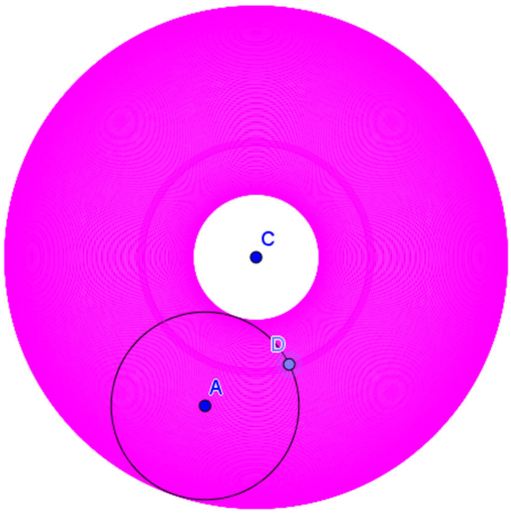

Figura 2. Lugar descrito en el ejemplo c.

Algo parecido ocurre al resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones a las que se dedica excesivo tiempo al mecanismo de la resolución algebraica sin hacer mención a qué representa la ecuación y sobre todo, cuál es el significado de la solución en caso de existir.

Por ejemplo, si se plantea la resolución de la ecuación $3x - 6 = 0$, el proceso seguido por el alumnado será:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

La respuesta será que la ecuación tiene solución y su valor es 2.

Si aprovechamos las posibilidades que ofrece GeoGebra, se podrá representar la función correspondiente a la ecuación que se desea resolver, obteniendo la repr4esentación de la recta $y = 3x - 6$; a partir de la que se podrá trabajar el significado de "resolver la ecuación" y sobre todo determinar, sólo con mirar la gráfica si tiene o no solución, así como dónde estará la solución, tal y como aparece en la figura 3.

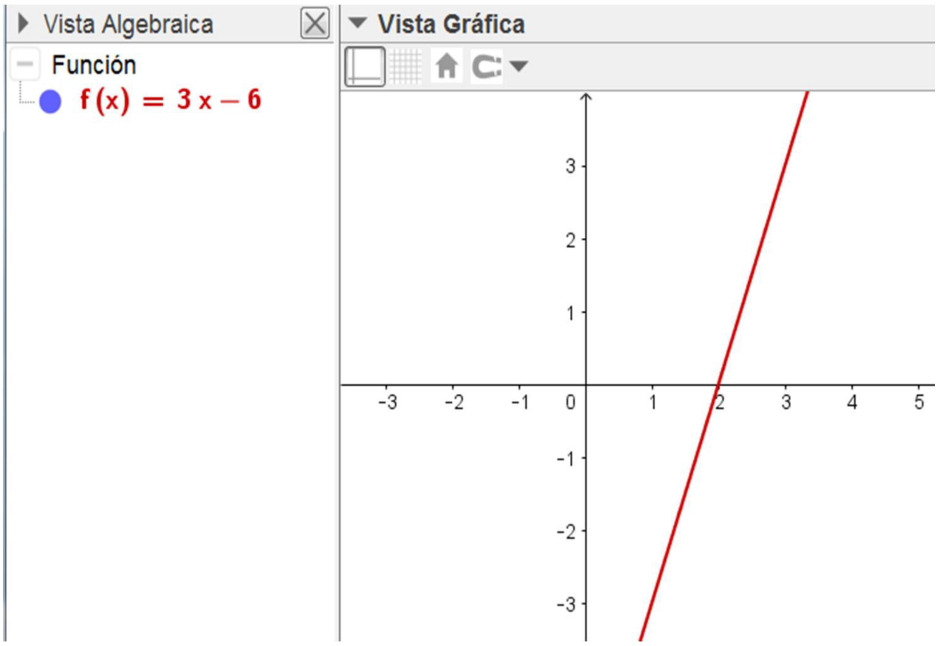

Figura 3. Resolución de una ecuación.

De manera similar se podrá relacionar la representación gráfica de dos rectas al resolver un sistema en la que el segundo miembro no sea 0, o la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con la representación en el plano de dos rectas para estudiar su posición relativa, algo que a menudo no se hace ya que se trata de contenidos correspondientes a bloques de contenidos diferenciados.

Polinomios, ecuaciones y funciones

Estos tres contenidos corresponden a bloques de contenidos distintos, por lo que es habitual hablar sólo de uno de ellos, sin relacionarlo con los otros dos, sin darnos cuenta que conceptos como raíz de un polinomio, solución de una ecuación o punto de corte de una función con el eje X, representan lo mismo.

Descomponemos en factores polinomios, resolvemos ecuaciones y representamos funciones y, en estas tareas en muchas ocasiones proponemos la misma expresión tanto para el polinomio, como para la ecuación como para la función y nos olvidamos de recurrir a la representación para observar la gráfica obtenida a partir de la representación del polinomio, de la expresión de la ecuación o de la función, interpretando lo que aparece y por tanto, lo que debemos obtener.

Utilizar GeoGebra como recurso permitirá fomentar la interpretación matemática para lograr que un alumno al observar la gráfica de una función, reconozca todas sus propiedades y los elementos que debe calcular, tal y como ocurre en la figura 4 en la que al observar la imagen debe interpretar lo que observa.

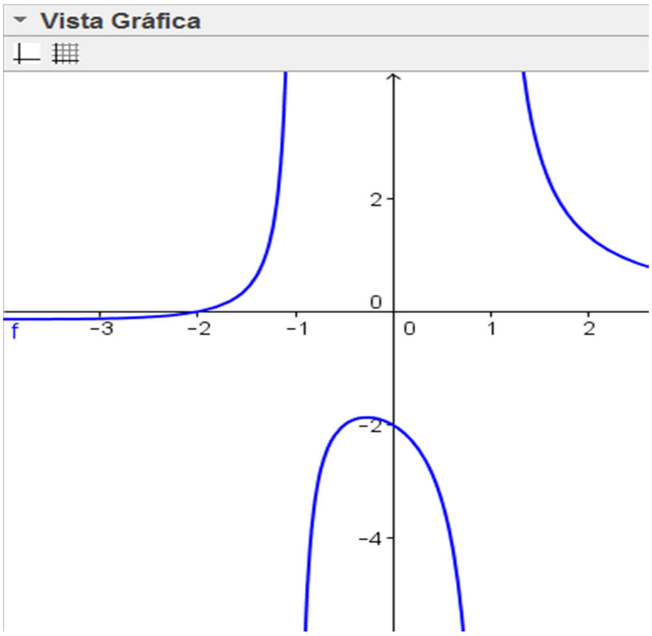

Figura 4. Gráfica de una función.

Esto significa que se debe producir un cambio con respecto a la metodología tradicional en la que el proceso para estudiar y representar una función comienza por determinar el dominio, recorrido, corte con los ejes, simetrías, crecimiento, asíntotas, etc., para finalizar con la representación gráfica a partir de todos los datos previamente obtenidos. Sin embargo al utilizar cualquier graficador de funciones, GeoGebra es un buen programa para esta tarea, lo primero que se obtiene es la representación de la función que se desea estudiar, por lo que al menos el proceso debe cambiar. Por este motivo una buena interpretación de la imagen obtenida será un primer paso para lograr determinar todas las propiedades y elementos de la función.

Determinar cuándo una función es continua o cuando es derivable a partir de la representación gráfica de la función será de gran ayuda para exponer estas características, así como para obtenerlas de manera analítica, si es el caso. Algo similar ocurre si se desea establecer si existen simetrías en una función o para estudiar si cumple o no un determinado teorema, también para determinar si una función tiene inversa o no, ya que basta comprobar si la función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Relacionado con el estudio de funciones está el cálculo de límites. El proceso normal para calcular un límite es aplicar los procedimientos conocidos para determinarlo en función del tipo de función o de la determinación que haya aparecido. Lo que nos es usual es representar previamente la función para interpretar si existe o no el límite que hay que obtener. La razón es evidente, la representación requiere más tiempo que aplicar el proceso para determinar el valor del límite, lo que conlleva a repetir procesos mecánicos sin saber lo que se está haciendo y lo que se está obteniendo y sin comprobarlo de manera gráfica.

Al utilizar programas como GeoGebra en el que la representación de una función es inmediata, facilitará su análisis y por tanto, si previamente se han trabajado estos conceptos con los alumnos, serán capaces al ver la gráfica de poder decidir si existe o no el límite pedido. Es por tanto otro ejemplo más de la importancia que la interpretación de los conceptos matemáticos tiene frente a los procesos repetitivos y algorítmicos.

Por ejemplo, si se desea obtener el $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x^3+x}$, se podrá representar la función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3+x}$ para observar que ocurre en el infinito, tal y como muestra la figura 5.

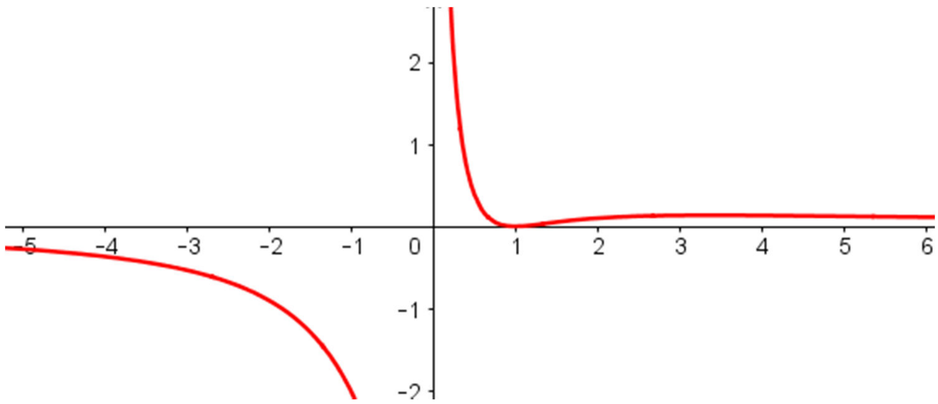

Figura 5.

No olvidemos que este programa permite incorporar imágenes de la realidad, por lo que se podrán analizar si existen curvas que se ajusten a determinados diseños o edificios, en los que a partir de la imagen insertada en GeoGebra se podrá buscar la familia de funciones que pueda modelizarla.

Por ejemplo, podemos intentarlo con ejemplos como los mostrados en las figuras 6 y 7.

Figura 6.

Figura 7.

Conclusión

A veces dedicamos excesivo tiempo a los procesos mecánicos y nos olvidamos de los conceptos, nos preocupa más obtener un resultado que saber lo que se está haciendo y sobre todo lo que representa el valor que se ha obtenido.

Interpretar una imagen de una función es tan importante o más que obtener sus característica ya que si el alumno desconoce a que corresponde cada valor, poco sentido tendrán los cálculos por muy bien que estén realizados.

En necesario cambiar los procesos utilizados en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo cuando se utilizan nuevos recursos, no es posible seguir haciendo lo mismo.

Es necesario aprovechar las posibilidades que ofrecen las tecnologías para cambiar los métodos y modelos de enseñanza, afrontando los cambios que sean necesarios para que las matemáticas dejen de ser abstractas, aburridas, complicadas, ineficaces,…

Aunque la tecnología es importante en nuestra vida, también debe serlo en nuestro trabajo, sin olvidar que la tecnología no debe prevalecer sobre la enseñanza sino que tiene que servirnos para mejorarla.

Referencias y bibliografía

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. PNA, 1(4), 139-158.

NCTM. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.