



Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes

Salvador **Llinares**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

sllinares@ua.es

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se articula a través de diferentes tareas profesionales que ponen de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta situación introduce la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Desde esta perspectiva, la competencia docente “mirar de manera profesional” la enseñanza de las matemáticas como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas se entiende cómo interpretar las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en las que el profesor se encuentra para apoyar las decisiones de acción según los objetivos de aprendizaje planteados. Esta perspectiva deriva desafíos para los formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, competencia docente, conocimiento de matemáticas para enseñar, formación de profesores de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas

Desde hace algunos años se insiste en la necesidad de que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la forma de pensar matemáticamente de los niños para ayudarles en su aprendizaje de las matemáticas. Ayudar a los estudiantes a razonar matemáticamente implica que los profesores deben elegir tareas matemáticamente relevantes para sus estudiantes e identificar oportunidades durante la enseñanza para que los estudiantes se impliquen en procesos matemáticos como particularizar y generalizar, conjeturar y argumentar/probar y así. Desde esta perspectiva, la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para los objetivos de aprendizaje, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1). Este

sistema de actividades del profesor que articulan la práctica de enseñar matemáticas se puede concretar en actividades particulares. Por ejemplo, la selección o diseño de tareas matemáticamente relevantes implica la necesidad de anticipar respuestas probables de los estudiantes a dichas tareas. La gestión de las discusiones matemáticas en el aula implica la posibilidad de seleccionar estudiantes particulares para presentar sus respuestas e ideas durante la puesta en común, secuenciando con un propósito explícito el orden en el que los estudiantes se les da la oportunidad de discutir sus resoluciones y reconocer la posibilidad de hacer conexiones entre las respuestas de los diferentes estudiantes y entre estas y las ideas matemáticas clave que son el objetivo de la lección (Stein, Engle, Smith, y Hughes, 2008).

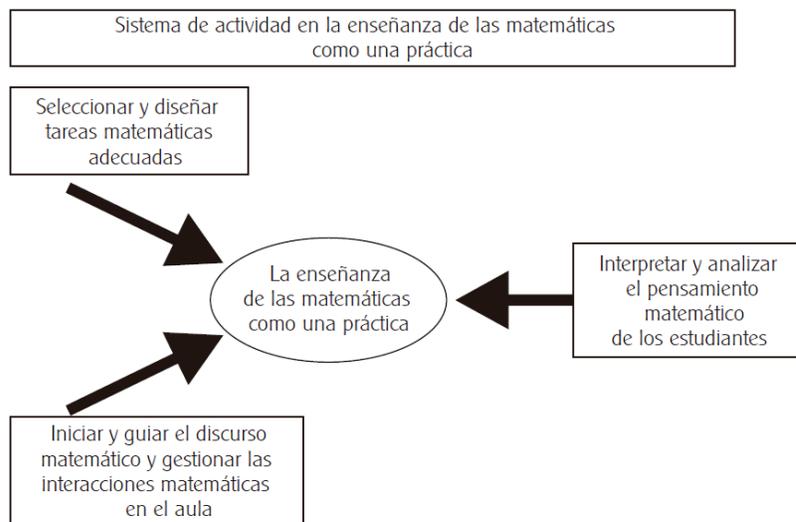


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica en Llinares, Valls, y Roig (2008), pag. 34.

Estas actividades pueden contextualizarse desde los momentos en los que el profesor piensa sobre la enseñanza (planificación), hasta momentos imprevistos durante la enseñanza. Entre los primeros, están los momentos en los que el profesor tiene que planificar las lecciones, y tiene que pensar cómo secuenciar actividades con diferente demanda cognitiva teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos en su clase. Entre las segundas, podemos encontrar el aprovechamiento de situaciones imprevistas durante la enseñanza que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, reconocer alguna cuestión planteada por los estudiantes y generada durante las discusiones matemáticas en el aula a partir de la cual el profesor puede decidir una determinada dirección de la clase para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

Esta variedad amplia de situaciones y con características tan diversas en las que los profesores deben responder en y durante la enseñanza de las matemáticas ha puesto de manifiesto la relevancia del conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Ball & Bass, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis, & Renert 2013; Rowland, et al. 2009). Desde esta perspectiva se asume la influencia del conocimiento del profesor en determinar la calidad de la enseñanza. Ya que, en particular, la falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes de su clase, en reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante la lección, en observar y

analizar el pensamiento matemático de los estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula de matemáticas.

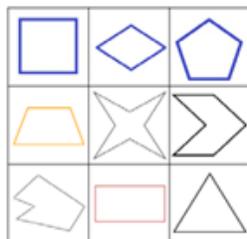
Diferentes estudios han estado caracterizando los dominios de conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y que resultan relevantes para la realización de estas actividades (Davis & Renert, 2013; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, Pino-Fan, 2019). Una de las características que han revelado estos estudios es la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento que es movilizado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, un aspecto común en esta aproximación a la caracterización del conocimiento necesario para enseñar es el reconocimiento de la importancia de las actividades que articulan la práctica y el uso que el profesor hace de su conocimiento en la resolución de dichas actividades. Relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor. En particular, cuando hay que considerar tareas relevantes según el nivel de sus estudiantes, y para realizar inferencias sobre el pensamiento matemático de los estudiantes basados en las evidencias dadas por lo que los estudiantes dicen, hacen o escriben.

Por ejemplo, el reconocimiento por parte del profesor de oportunidades durante la enseñanza aprovechándolas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes es una manifestación de la manera en la que el profesor usa diferentes dominios de conocimiento para realizar inferencias basadas en las evidencias para tomar decisiones de enseñanza (Stockero, Van Zoest, 2013; Van Zoest Stockero, Leatham, Peterson Atanga y Ochieng, 2017). De esta manera, apoyar la enseñanza de las matemáticas en el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculado a la competencia del profesor para realizar inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En este sentido, para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, los profesores deben diseñar, adaptar o seleccionar tareas matemáticas relevantes, interpretar lo que dicen y hacen sus estudiantes al resolverlas, para poder decidir cómo continuar la enseñanza. Estas actividades (prácticas profesionales) – diseñar/adaptar/seleccionar, interpretar y tomar decisiones requieren conocimiento especializado. En particular en relación a los estudiantes como aprendices, sobre el currículo y sobre estrategias instruccionales.

Competencia docente: uso del conocimiento para resolver actividades en la enseñanza

La especificidad del conocimiento del profesor en la realización de las actividades vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas conlleva el reconocimiento del papel de diferentes dominios de conocimiento. Por ejemplo, un contenido curricular en la educación primaria son las figuras geométricas y los polígonos. Este contenido define como objetivo el desarrollar en los estudiantes formas de razonar con las figuras geométricas y sus atributos. Este objetivo implica ayudar a los estudiantes a comprender los procesos de clasificación de las figuras geométricas que se apoyan en el reconocimiento de atributos comunes a grupos de figuras. En este contexto ante una tarea como la que aparece en la Figura 2, cuando el profesor anticipa posibles respuestas de los estudiantes para justificar su introducción en la planificación de la lección debe movilizar conocimiento desde diferentes dominios.

De entre todas estas figuras hay una que no corresponde a este grupo, ¿Por qué?



1a- cuadrado; 1b- rombo; 1c- pentágono regular

2a- trapecio isósceles; 2b- octógono cóncavo simétrico; 2c- hexágono cóncavo simétrico

3a- hexágono no simétrico cóncavo; 3b- rectángulo; 3c- triángulo equilátero

Figura 2. Actividad de reconocer semejanzas y diferencias entre figuras geométricas. (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2018)

La selección de esta tarea (Figura 2) refleja el conocimiento del objetivo curricular (aprender a identificar y razonar con los atributos de las figuras). La tarea implica reconocer un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite agruparlas en relación a otras, y poder justificar por qué una figura no tiene el atributo identificado. Además, la tarea tiene en cuenta que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar una comprensión amplia sobre las figuras geométricas si tienen la posibilidad de analizar múltiples ejemplos de figuras y discutir sobre sus semejanzas y diferencias. Desde este punto de vista introducir ejemplos de figuras que cumplan ciertos requisitos junto con figuras que no los cumplan es clave. Esta tarea refleja aspectos del currículo (tipo de figuras y atributos) y de los procesos cognitivos que se tiene que desarrollar en los estudiantes (reconocer atributos, y semejanzas y diferencias entre las figuras). En este sentido, preguntas que pueden ayudar a movilizar el conocimiento del profesor sobre estos aspectos son ¿las actividades previstas en el plan de la lección presentan variedad de ejemplos y contraejemplos? En este ejemplo, la tarea tiene como objetivo que los niños/as reconozcan atributos de las figuras geométricas y que sean capaces de establecer listas de estos atributos vinculados a diferentes figuras para poder establecer diferencias entre las figuras (regularidad, cóncavo /convexo, número de lados, simetría, paralelismo, diagonales, etc.). En la tarea propuesta, los atributos que permiten diferenciar una figura de las otras pueden ser (i) la simetría que permite diferenciar hexágono cóncavo que no tiene ejes de simetría del resto de figuras, (ii) el tener más de un ángulo mayor de 180° , que permite diferenciar el octógono cóncavo (la estrella) del resto de las figuras, y (iii) no tener diagonales, que permite diferenciar al triángulo equilátero del resto de las figuras.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre los estudiantes y el aprendizaje matemático, el profesor debería reconocer que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de generar diferentes aproximaciones a la resolución de las tareas pueden generarse diferentes soluciones. En este tipo de situaciones los profesores deben anticipar posibles respuestas de los estudiantes, aunque algunas veces se tiene que asumir que las respuestas de los estudiantes pueden ser imprevisibles. Es, en este contexto, en el que la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden, además del conocimiento reunido por las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, en relación a la tarea anterior

(Figura 2), una referencia puede ser las características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico proporcionada por el modelo de van Hiele relativos a la capacidad de reconocer atributos de las figuras (Figura 3).

Durante muchos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado proporcionando información sobre características de cómo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y desarrollan procesos matemáticos. Esta información es la que los profesores pueden usar para realizar inferencias sobre qué y cómo los estudiantes están aprendiendo desde lo que los estudiantes dicen o hacen cuando resuelven problemas y justificar, como consecuencia, las direcciones de la enseñanza generadas.

NIVEL	RECONOCER
1. Los estudiantes reconocen las figuras como un todo .	<ul style="list-style-type: none"> • Asocian las figuras a objetos conocidos. “<i>Esta se parece a un reloj de arena</i>”. • Hacen uso de artículos demostrativos para indicar las diferencias de las figuras. Usan los demostrativos “eso” o “esto” para indicar las diferencias de las figuras. • Tienen dificultades para reconocer los atributos de las figuras. • Usan términos perceptuales para nombrar algunos atributos aunque estén descontextualizados (no conocen los términos o no los usan adecuadamente).
2. Los estudiantes describen las partes y los atributos de las figuras.	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes reconocen de manera progresiva los atributos de las figuras: Figuras cerradas/abiertas, Lados rectos/curvos, Lados no-cruzados/cruzados. Aunque inicialmente pueden tener dificultades en reconocer algunos atributos, (Cóncavo/convexo, Número de lados elevado, Altura triángulos, ...) finalmente los reconocen de manera sistemática. • Empiezan a incorporar los nombres de las figuras para diferenciarlas (rombo, cuadrado, triángulo rectángulo, cuadriláteros, ...) • Finalmente, reconocen los atributos de las figuras, y los usan para diferenciarlas entre sí. <ul style="list-style-type: none"> – Diagonales (tamaño, perpendicularidad). – Ejes de simetría. – Paralelismo, perpendicularidad de los lados (ángulos rectos) • Usan un vocabulario adecuado, incorporando los términos adecuados de los atributos para explicar las diferencias entre las figuras (figuras cerradas/abiertas, lados curvos/rectos, triángulos rectángulos/acutángulos/obtusángulos, ...).

Figura 3. Características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en relación a la actividad de Reconocer (Bernabéu, Moreno, y Llinares, 2018, Pag. 63)

En relación al conocimiento de las estrategias instruccionales en este tipo de tareas el profesor puede ayudar a los estudiantes a realizar comparaciones y conexiones. En el ejemplo propuesto indicando a los estudiantes que generen listas de atributos que cumplan las diferentes figuras y comparando las diferencias y semejanzas entre ellas. Facilitar la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de ideas. Además, otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación al currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación al aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas.

Desarrollando competencias docentes para aprender una profesión

La caracterización de la enseñanza de las matemáticas realizada en las secciones anteriores a través de la identificación de diferentes tareas profesionales pone de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta caracterización nos ha permitido introducir la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las actividades profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. La consideración de la idea de la competencia docente como un proceso basado en el conocimiento lo hemos caracterizado mediante un ejemplo vinculado a la elección de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para ejemplificar el uso de diferentes dominios de conocimiento. Esta caracterización de la enseñanza de las matemáticas como una práctica en la que se movilizan diferentes dominios de conocimiento (competencia docente) tiene reflejos en las propuestas de formación de profesores (Llinares, 2012).

En particular, en propuestas basadas en la práctica que inciden en maximizar la relación entre la teoría y la práctica en contextos que favorezcan el uso del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas (Fernández, Callejo & Márquez, 2014; Oonk, Verloop, Gravemeijer, 2015). En particular, en el sentido de proporcionar a los estudiantes para profesor con oportunidades de analizar la práctica como un contexto para el desarrollo de competencias docentes. Uno de los objetivos en esta aproximación a la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar un discurso profesional vinculado a la práctica (Ivars, Fernández y Llinares, & Choy, 2018). Es decir, favorecer el desarrollo de argumentos prácticos como una elaboración formal de formas de razonar sobre la práctica. En el desarrollo de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor se pretende que estos establezcan razones de sus decisiones vinculando las evidencias proporcionadas por los registros de la práctica con principios más generales procedentes de la teoría (Fenstermacher y Richardson, 1993; Roig, Llinares, & Penalva, 2011).

En este contexto se ha empezado a subrayar en los últimos años el papel que puede desempeñar el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza (Llinares, 2013, 2015; Seibert y Groenwald, 2013). Mirar de manera estructurada “las situaciones de enseñanza para generar información sobre lo que está sucediendo y proponer nuevas tareas se considera un proceso basado en el conocimiento (Mason, 2002; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Desde la perspectiva de la formación de profesores se plantea la necesidad de caracterizar cómo se va a entender el desarrollo de esta competencia, y cuáles pueden ser las características de los contextos de aprendizaje que apoyen dicho desarrollo. Estas dos cuestiones generan desafíos a los formadores de profesores en el sentido de tener que conceptualizar modelos de desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” (Sánchez-Matamoros, Moreno, Perez-Tyteca & Callejo, 2018) y maneras de pensar sobre el diseño de intervenciones en los programas de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2016; Llinares, Valls, & Roig, 2008).

Una línea de actuación que intenta aportar información a estas cuestiones enfatiza el uso de diferentes tipos de registros de la práctica para crear los contextos de desarrollo de la competencia docente. Un registro de la práctica puede ser un video de una lección en una clase, las respuestas escritas de los estudiantes a uno o varios problemas, una planificación de una lección o grupos de planificaciones de una lección. A partir de estos registros de la práctica es

posible generar tareas para los estudiantes para profesor en el sentido de ayudarles a estructurar su mirada: qué aspectos mirar del registro de la práctica, que conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc. En el apéndice de este texto se muestra un ejemplo de este tipo de tareas en un programa de formación de maestros (Educación Primaria).

Este tipo de tareas mantienen una estructura similar. En primer lugar, se contextualiza el registro de la práctica y luego se introducen las evidencias, en este caso, el texto escrito de la interacción entre una maestra y un alumno motivada por la resolución de una actividad centrada en el desarrollo de la comprensión de los números de tres cifras. Finalmente, se presentan una serie de cuestiones para el estudiante para profesor para organizar su aproximación al análisis de la situación. Esta estructura del diseño de las tareas en el programa de formación permite tener la oportunidad de desarrollar diferentes aspectos de lo que constituye la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) concreta estos aspectos como: (i) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

La secuencia de este tipo de actividades en el programa de formación (Figura, 4) crea el contexto para favorecer el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la acción sobre la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para profesor (Ivars, et al. 2018). El desarrollo de este discurso profesional es el que puede evidenciar la relación entre (i) identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, (ii) usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las evidencias proporcionadas, y (iii) realizar conexiones entre los sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Van Es y Sherin 2002).

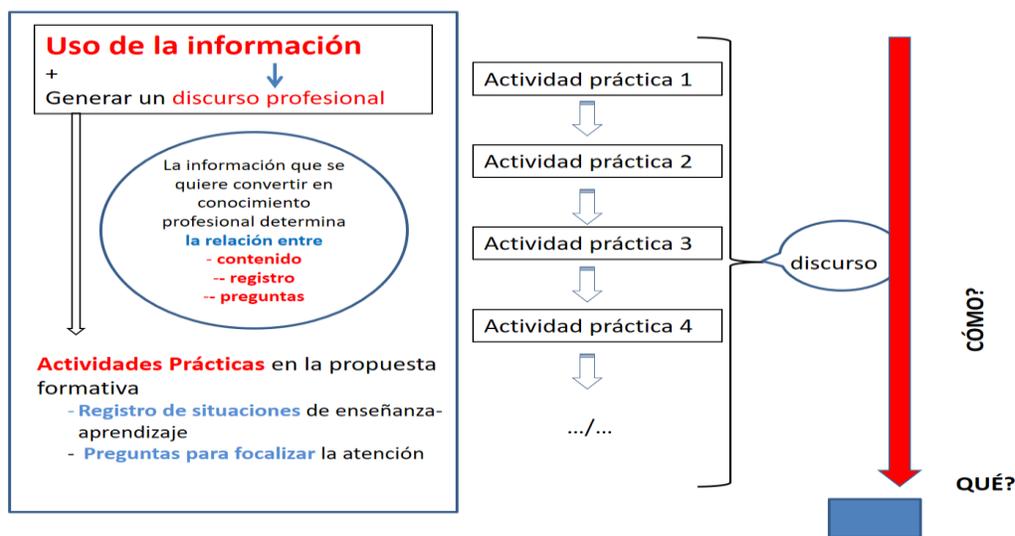


Figura 4. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente “mirar profesionalmente” (Ivars,

Buform, y Llinares, 2017; pag. 77).

A modo de conclusión: Desafíos en aprender la práctica de enseñar matemáticas

Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, reconocer que el proceso de llegar a ser profesor significa aprender una práctica basada en el conocimiento, genera desafíos para los formadores de profesores. En primer lugar, por la necesidad de identificar sistemas de actividad que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Lampert, 2001). La descomposición de la práctica en sus aspectos constituyentes permite a los estudiantes para profesor tener la oportunidad de estudiar componentes separados pero relevantes de la práctica (Figura 1). En segundo lugar, por la posibilidad de asumir diferentes representaciones de la práctica de enseñar que puedan ayudar a determinar qué tipo de registros de la práctica y qué tipo de actividades con ellos deben insertarse en los programas de formación (*core practices*) de manera que los estudiantes para profesor puedan aprenderlas (Grossman, 2018). En este aprendizaje resulta relevante la manera en la que los estudiantes para profesor se apropian de instrumentos conceptuales para guiar sus decisiones sobre la enseñanza (Ivars, Buform y Llinares, 2016). En tercer lugar, la necesidad de hacer explícito cómo los formadores de profesores conceptualizan el desarrollo de las competencias docentes (Sánchez-Matamoros et al, 2018). Los diferentes modelos a través de los cuales los formadores caracterizan el aprendizaje de los estudiantes para profesor permiten justificar las decisiones sobre cómo organizar los entornos de aprendizaje en el programa de formación.

Las ideas y principios que ayudan a dar respuesta a estos desafíos (identificar sistemas de actividad relevantes, determinar diferentes registros de la práctica, y el modelo de desarrollo de las competencias adoptado) se están considerando como referentes para articular los programas de formación reconociendo la dificultad de aprender la práctica de enseñar matemáticas.

La posibilidad de descomponer la práctica de enseñar matemáticas en actividades relevantes puede verse como una simplificación de la práctica, pero permite a los formadores de profesores generar entornos de aprendizaje en el programa de formación centrados sobre aspectos específicos sin perder de vista la mayor complejidad que se genera en situaciones reales de clase. Por ejemplo, el poder analizar aspectos particulares de la interacción entre un alumno y su maestra (ver el apéndice) puede ayudar a los estudiantes para maestro a detenerse e interpretar aspectos particulares de la interacción que sería más complicado en una situación de clase real. En el desarrollo de este tipo de actividades de análisis de registros de la práctica los estudiantes para profesor pueden empezar a identificar aspectos relevantes, nombrarlos de manera que facilite la comunicación con otros y a interpretarlos. En este proceso resulta clave los instrumentos conceptuales que el formador de profesores puede ponerle a su alcance de manera que puedan ser usados para identificar, nombrar e interpretar los aspectos de la práctica que centran su atención. Estos instrumentos conceptuales, como esquemas para analizar la interacción en el aula o trayectorias de aprendizaje de las nociones matemáticas, proporcionan a los estudiantes para profesor el lenguaje para describir e interpretar los aspectos de la práctica y formas de ver y comprender la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2015).

Finalmente indicar que, la identificación de desafíos en la formación de profesores de matemáticas al adoptar la perspectiva de que llegar a ser profesor implica aprender una práctica, se apoya en el trabajo, reflexión sobre la práctica e investigación de los formadores de profesores en sus intentos de mejorar su propia práctica.

Reconocimiento. La investigación mencionada en este trabajo ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad –MINECO - a través de la Agencia Estatal de Investigación- AEI, España mediante el proyecto nº EDU2017-87411-R; y de la Generalitat Valenciana- GVA- a través del grupo de Excelencia PROMETEO2017/135.

Referencias

- Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83–104). Westport: Ablex.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389–407.
- Bernabéu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). ¿Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica? En Roig-Vila, R. (ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza superior*. Barcelona: Octaedro.
- Davis, B. & Renert M. (2013). *The Math Teachers Know. Profound Understanding of Emergent Mathematics*. London: Routledge
- Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división medida. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 407-424.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, nº 13, 39-61.
- Fenstermacher, G. & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies*, 25(2), 101-114.
- Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Harvard Education Press: Cambridge, MA.
- Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente. *Acta Scientiae*, 18(4), 48-66.
- Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (ed). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 65-88). Caracas, Venezuela: CIES.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New York: Yale University Press
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7, nº 10, 53-62.
- Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas”. Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B.

- D'Amore & M.I. Fandiño (Comp.), *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Bogotá, Colombia: Ediciones Universidad de la Sabana
- Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. En G.A. Perafan, E. Badillo, & A. Aduriz (eds.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Bogotá: Colombia: Editorial Aula de Humanidades.
- Llinares, S., Ivars, P., Buform, A. & Groenwald, C. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M.T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Llinares, S., Valls, J. & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 31-54
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Oonk, W.; Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 559-598.
- Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática*, 23(3), 39-65.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Londres: SAGE
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 203-228.
- Scheiner, Th., Montes, M., Godino, J.D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2018). What makes mathematics Teachers Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics*, 17(1), 153-172.
- Seibert, L.G., Groenwald, Cl. (2013). Observar com Sentido: una competencia importante na vida professional do professor de Matemática. *Acta Scientiae*, 15(1), 133-152.
- Stein, M.K., Engle, R.A.; Smith, M.S.; Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Educators*, 16, 125-147.
- Van Zoest, L., Stockero, Sh., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in Whole-Class Discussion. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(1), 33-54.
- Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, 10(4), 571-596.

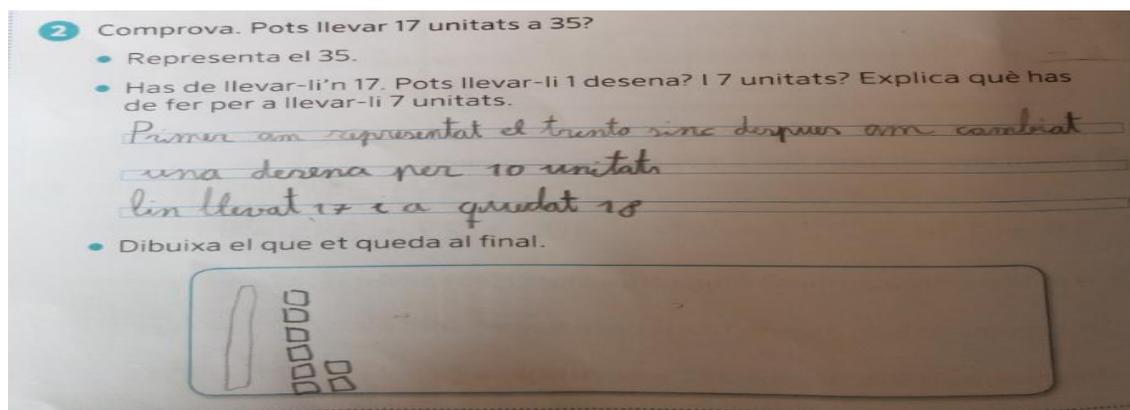
Apéndice- El caso de Mikel y el significado de los números de tres cifras

Mikel tiene 7 años y 7 meses.
Está en 2º Educación primaria. Estamos en enero.
Texto: *Taller de Matemàtiques Manipulatives. Matemàtiques 2º de Primaria*. Edt. SM-arrels



Contexto: Mikel está en el tema de la resta llevando con números de dos cifras. Él usa bloques multibase en cartulina (los lleva en una bolsita a clase) para realizar las actividades. Representa los números con los bloques, dibuja los bloques en el cuaderno/libro y escribe los números –símbolos- que representan las cantidades que tiene con los bloques multibase.

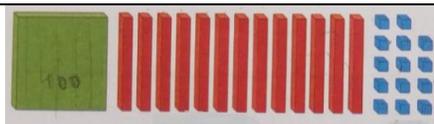
Lo que sigue es una de las actividades que ha realizado en su libro unos días antes¹:



Unos días después se plantea la siguiente tarea que tiene

La tarea

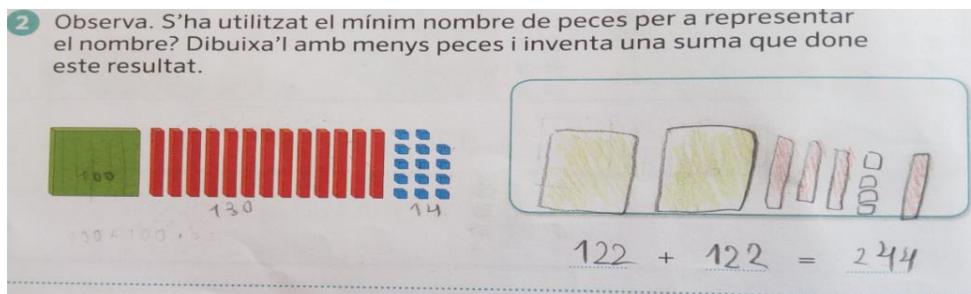
Observa, s'ha utilitzat el mínim nombre de peces per a representar el nombre?
Dibuixa'l amb menys peces i inventa una suma que done este resultat.



La respuesta de Mikel y la interacción con la maestra

Mikel proporciona como respuesta $122 + 122$

¹ El idioma del texto usado y las respuestas de Mikel es el valenciano, lengua vernácula del contexto de donde procede el registro de la práctica



La maestra al ver la respuesta de Mikel, comprueba que está bien, pero le gustaría averiguar cómo está pensando y qué **comprensión tiene de los números de tres cifras y de la relación entre las diferentes unidades**. Para ello le pide a ver si puede darle otra solución

Maestra: ¿puedes encontrar otros números que sumados den 244?

Mikel: Sí. [Piensa un momento, levanta una mano con sus dedos extendidos, y escribe]
113 + 131

Maestra: ¿Cómo lo sabes?

Mikel: Porque, tres y uno son cuatro (señalando el 4 de las unidades). Uno y tres son cuatro (señalando el 4 de las decenas), y uno y uno son dos (señalando el dos de las centenas).

Maestra: ¿puedes encontrar otros números?

Mikel: [Piensa un momento]. Sí, (y escribe)

121 + 123

Maestra: ¡Muy bien Mikel!

Aunque Mikel ha resuelto bien las tres tareas, la maestra se da cuenta de que ella no tiene evidencias de la comprensión de Mikel de las relaciones entre las diferentes unidades en el número de tres cifras, y por tanto de su comprensión del número. Es decir, ella cree que la resolución correcta de la tarea del libro de texto y de las tareas adicionales que le había pedido, no le dan información sobre la comprensión de Mikel de los números de tres cifras que es el objetivo de la tarea. Por ello, le plantea la siguiente tarea:

Maestra: Bien Mikel, vamos a hacer otro problema igual. ¿Puedes encontrar dos números que sumados den 210?

Mikel se pone a pensar un rato más largo que en las actividades anteriores. Aunque tiene los bloques multibase encima de la mesa, no los utiliza. Después de un rato escribe lo siguiente, pero dudando

15 + 15 = 210

Maestra: ¿cómo lo has hecho?

Mikel: Pues, ..., como cinco y cinco son diez (señalando al 10 del número), y uno y uno son dos (señalando al 2).

[Mikel mira dudando lo que ha escrito]

Maestra: ¿Estás seguro?

Mikel: No.

CUESTIONES

- a) Sobre la tarea. Características
¿Qué elementos matemáticos deben usarse para resolver la actividad? Tras la respuesta de Mikel, la maestra le pide que encuentre la suma de otros dos números ¿qué pretendía conseguir la maestra? ¿Por qué finalmente le plantea una tarea similar, pero cambiando el número a 210? ¿Cuál era el objetivo de esta nueva tarea?
- b) Sobre la comprensión de Mikel
¿Qué elemento matemático debe mejorar en su comprensión? ¿Por qué la tarea del libro de texto no era suficiente para determinar la comprensión de Mikel de los números de tres cifras?
- c) Sobre lo que hacer a continuación
¿Cómo ayudarías a Mikel? ¿Qué tarea (y qué números usarías) para ello?

Lo que sigue es una actividad que propone el libro de texto. Diseña una actividad anterior y una posterior a la dada que podrías utilizar para apoyar a Mikel en la comprensión de los números de tres cifras. Justifica tu decisión en función del elemento matemático que debe consolidar y los números que usas en las tareas.

Com llaves 4 unitats a una placa de 100? Comprova i explica pas a pas el procés seguit.

Dibuixa el que queda al final.