



El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica

The Chronotopy Program: A model-theoretic approach to mathematics, its epistemology, its history and its didactics

Carlos Eduardo **Vasco** Uribe

Profesor Emérito y Doctor H.C. de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá
Colombia

carlosevasco@gmail.com

Resumen

Desde distintos puntos de vista de la historia y la epistemología de las matemáticas, en los últimos CIAEM he venido proponiendo un enfoque global para las matemáticas mismas y para su epistemología, su historia y su didáctica: “El Programa Cronotopía”. Este tiene como marco una filosofía sincrético-analítica que se concreta en una Metafísica con su ontología de procesos y sistemas, una Metagnósica con su gnoseología y su epistemología de modelos y teorías y una Metasémica con su semiología de representaciones e interpretaciones.

En esta conferencia paralela me propongo presentar los avances logrados hasta ahora en este Programa de Investigación en el sentido de Lakatos, Balzer, Moulines y Sneed, para desarrollar una disciplina académica que se llamaría “la Cronotopía”.

Palabras clave: educación, matemática, filosofía, ciencias, modelos, teorías, didáctica.

Abstract

From different viewpoints of the History and Epistemology of Mathematics, in the last few IACME-CIAEM conferences I have been formulating a global approach to Mathematics, its Epistemology, its History and its Didactics: “The Chronotopy Program”. It is framed in a syncretic-analytic philosophy specified in a Metaphysics with its Ontology of Processes and Systems, a Metagnosics with its Gnoseology and Epistemology of Models and Theories, and a Metasemics with its Semiology of

Representations and Interpretations.

In this parallel lecture I intend to communicate the advances achieved up to now in this Research Programme in the sense of Lakatos, Baltzer, Moulines and Sneed in order to develop an academic discipline that would be named “Chronotopy”.

Keywords: education, mathematics, philosophy, science, models, theories, didactics.

Mapa General de la Cronotopía y del “Programa Cronotopía”

El “Programa Cronotopía” se propone construir una ciencia —en el sentido de una disciplina académica o saber explícito, serio, sistematizado y disciplinado que pretende pasar de *doxa* —o mera opinión subjetiva— a *episteme* —o saber fundamentado y compartido que incrementa las probabilidades de éxito de quienes se apoyan en él para orientar sus prácticas— acerca de todos los aspectos del espacio-tiempo mental interno individual y subjetivo y de su proyección al espacio-tiempo físico externo u objetivo.

El “Programa Cronotopía” comienza por el examen de las experiencias internas de quien escribe el texto que pretende “ser científico”, y no por la observación empírica con la que creemos estar en contacto directo con el espacio-tiempo externo o físico, el cual parece ser el mismo espacio y tiempo “públicos” o “sociales”. A pesar de toda la imagenología de los TAC, PET, RMN, MEG y otras tecnologías actuales, eso no lo sabemos ni lo podemos verificar (o, al menos, yo no lo sé y no se me ocurre cómo verificarlo). A lo más, podemos tratar de confirmar esa relación entre lo que yo creo percibir mentalmente en mis modelos internos y lo que sucede “allá afuera” según el éxito o fracaso de ciertas prácticas individuales y sociales que se han configurado según ese saber explícito. Esa ciencia se llamaría “la Cronotopía”, nombre en el que se combinan las raíces griegas de *tiempo* (*chronos*) y de *espacio* (*topos*).

Así pues, esta muy nueva —pero a la vez muy antigua— ciencia de la Cronotopía pretende estudiar solamente el espacio-tiempo interno, a veces llamado “psicológico” o “psíquico”, al que, siguiendo una sugerencia de Bakhtin, llamo “mi cronotopo” y, de allí, se propone sacar consecuencias sobre todo lo que se diga o escriba por cualquier otro autor o autora acerca de su propio cronotopo interno y acerca del espacio-tiempo externo.

Siguiendo a Piaget, además de la única fuente profunda de mis introspecciones sobre las vivencias, experiencias, intuiciones e imágenes que experimento en mi cronotopo privado, las tres fuentes auxiliares de esta disciplina son: la primera, la psicogénesis u ontogénesis de los cronotopos mentales en los niños, niñas y adolescentes; la segunda, la sociogénesis o filogénesis del espacio-tiempo en la historia de las matemáticas como ciencias formales y en la de las ciencias fácticas y, la tercera, la teoría formal de procesos y sistemas, con sus sustratos, sus estructuras y sus dinámicas, que es la manera como interpreto “las estructuras formales” en Piaget.

El “Programa Cronotopía” intenta emular el “Programa de Erlangen” de Félix Klein para la geometría y la topología; el “Programa de la Relatividad General” de Einstein para el espacio-

tiempo; el “Programa o Enfoque Onto-Semiótico EOS” de Godino, Batanero y Font; el “Programa Noético-Semiótico” de Duval; el “Programa Semiótico-Cultural” de Luis Radford; el “Programa Socio-epistemológico” de Cantoral y Farfán y el “Programa Etnomatemática” de Ubiratán d’Ambrosio y Paulus Gerdes como visiones globales de todas las matemáticas, su práctica, su historia y su epistemología, con las consecuencias que tiene cada programa para su pedagogía y su didáctica. Por lo anterior, es claro que el “Programa Cronotopía” tiene pretensiones muy ambiciosas, y no estaría muy desacertado quien lo tildara de megalomaniaco.

En mi cronotopo interno parecen fundirse como totalidades indiferenciadas —“sincréticas”, diría Piaget— el espacio, como contenedor aparentemente vacío y sin límites asignables, las distintas formas de la materia y la energía, los líquidos y gases, los cuerpos sólidos o blandos, el cambio y el movimiento, y el tiempo en todas sus acepciones. Desde este punto de vista, el análisis cronotópico se podría calificar como “sincrético-analítico”, pues parte de las totalidades sincréticas que creo percibir internamente e intenta superar los enfoques analíticos y los sintéticos para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica. Ese mismo análisis de mis imágenes y modelos mentales y del trasfondo desde donde parecen surgir también podría llamarse “modelo-teorético”, pues juega dialécticamente con distintas teorías tratando de interpretarlas en distintos modelos y con distintos modelos tratándolos de expresar por medio de distintas teorías, a veces mutando los modelos para que se ajusten mejor a las teorías y a veces mutando las teorías para que correspondan mejor a los modelos.

Para ello partí de la teoría de modelos en lógica matemática, ante todo del texto de Chang y Keisler explicado por Xavier Caicedo, y de la reinterpretación epistemológica de la relación entre modelos y teorías de Balzer, Moulines y Sneed en su arquitectónica de la ciencia.

Ese trasfondo difuso de mi cronotopo es el que me permite representarme, imaginarme o *modelar* mentalmente los procesos externos y representarme a mí mismo en forma privada todo el mundo externo o público, por medio de distintas imágenes y modelos mentales, pensados o imaginados o imaginarios que creo proyectar activamente sobre ese trasfondo con mi imaginación como proyector multimodal y multimedial, o que parecen surgir espontáneamente de él. Aunque solo puedo testificar sobre mi propia experiencia, y por eso solo podría hablar de mí mismo y de las vivencias subjetivas de mi trasfondo cronotópico y las imágenes y modelos que percibo, es en ese trasfondo en donde creo que cada uno de nosotros se imagina todos los aspectos de las matemáticas antiguas y modernas como ciencias formales, y todos los aspectos de la física antigua o astronomía y de la física moderna —o mejor “las físicas”, por ser incompatibles la mecánica newtoniana, la relativista y la cuántica—, así como las demás ciencias fácticas. Solo digo que “creo” que cada uno de mis lectores y lectoras se imagina algo parecido sobre un trasfondo parecido, pero no puedo comprobarlo ni menos afirmarlo con alguna seguridad.

Creo también que esos modelos mentales imaginados e imaginarios son los que guían y regulan mi actividad en todo momento e intermitentemente tengo que “echarlos a correr” (“run”) para “navegar” en el mundo externo, trayéndolos de la memoria a largo plazo a la memoria de trabajo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir. Las pesadillas y el sonambulismo, así como la expresión “soñar despierto”, dan mucho material para pensar en la reformulación cronotópica de las matemáticas y

las físicas. Por ello, las preguntas de investigación sobre la interfaz sensorial entre el mundo exterior y el interior y la interfaz cerebral entre los módulos sensoriales del cerebro y los módulos motores del cerebro y el cerebelo son esenciales al Programa Cronotopía.

Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo por las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte de mi modelo mental de mi casa.

Corrección: Mi *avatar* es el que sube y baja en ese modelo mental de las escaleras, y si funcionan bien mis conexiones interactivas intermitentes entre el mundo externo y el interno por los órganos de los sentidos y mi conexión interna entre cerebro y músculos, yo puedo subir y bajar las escaleras exitosamente. Esas son las mismas preguntas de fondo del Programa Cronotopía por la naturaleza y el funcionamiento de la interfaz sensorio-motriz.

Clave hermenéutica 1. Aunque ese avatar no suele revelarse espontáneamente a la atención interna, no es conveniente olvidar que mi avatar es el que me representa en mi cronotopo interno para cualquier formulación o reformulación cronotópica de las matemáticas y las físicas, especialmente en la construcción de sistemas de referencia con sus coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. Pero hay un filtro cerebral de tipo *Gestalt* que rápidamente oculta al avatar cuando tratamos de examinar un modelo y entrever el trasfondo.

Corolario 1. Todo predicado $P(-)$ de cualquier lengua articulada L que aparentemente sea n -ario o de n -puestos (“slots”) es al menos $(n+1)$ -ario, porque está situado en una vecindad cronotópica mental que incluye al sujeto enunciador y al avatar z que lo representa en el modelo mental. Para decirlo de otra manera, todo modelo mental activado en mi imaginación es siempre cronotópico y está *situado* en una vecindad cronotópica que involucra una región limitada del espacio-tiempo en la que está contenido mi avatar z y los objetos de atención que me afectan. Por ello, todo predicado aparentemente unario $P(-)$ atribuido a cierto objeto mental x , $P(x)$, se refiere a una relación binaria entre ese objeto x y mi avatar z , relación que está situada en una vecindad cronotópica delimitada por fronteras difusas.

Clave hermenéutica 2. Este primer corolario es clave para la interpretación de los predicados monádicos o unarios $P^1(-)$ y las proposiciones atómicas respectivas $P^1(x)$ de cualquier lenguaje articulado L , pues los predicados monádicos o unarios $P^1(-)$ pasarían a ser en realidad predicados cripto-diádicos o cripto-binarios (el prefijo *-cripto* se refiere al ocultamiento de la polaridad entre el objeto mental x y el avatar z). La polaridad adicional con respecto al sujeto enunciador y a su avatar z que lo representa, la cual se sitúa en la vecindad cronotópica implícita en el modelo mental, borra la distinción usual entre los predicados monádicos o unarios $P^1(-)$ y las proposiciones atómicas respectivas $P^1(x)$ y las relaciones binarias yR^2x or $R^2(x, y)$; las proposiciones $P^1(x)$ pasarían a ser relaciones cripto-diádicas o cripto-binarias, $\mathbf{R}^2[P^1](x; z)$, y las segundas pasarían a ser relaciones cripto-triádicas o cripto-ternarias $\mathbf{R}^3[R^2](x, y; z)$. Los operadores n -arios $@^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que producen un resultado y , representables como relaciones $(n+1)$ -arias $R^{n+1}[@^n](x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ pasarían a ser relaciones $(n+2)$ -arias $\mathbf{R}^{n+2}[@^n](x_1, x_2, \dots, x_n, y; z)$. En un lenguaje articulado L no habría pues sino términos simples y compuestos y predicados relacionales de distintas ariedades.

Clave hermenéutica 3. Esta inyección de los operadores n-arios $@^n(-)$ en el sistema de relaciones $R^{n+1}[@^n(-)]$, que pertenecen a la estructura de otro sistema de orden superior, muestra que la dinámica de un sistema todavía no es suficiente para modelar la actividad o funcionamiento de un sistema en acción, en acto, lo que sería la cinemática o kinemática del modelo. En el Programa Cronotopía, esta distinción entre dinámica y cinemática, que corresponde a la potencia y al acto en la Metafísica y la Ontología clásicas, ya no solo sería utilizable en las ciencias físicas, sino que también se extendería a las matemáticas.

Si ahora quiero seguir avanzando en la reformulación de las matemáticas, su historia y su epistemología, el Programa Cronotopía me dice que el punto de partida son las experiencias subjetivas de mi cronotopo interno que vivo yo mismo cuando me involucro en actividades o prácticas que se suelen llamar “matemáticas, etnomatemáticas, matematizables” o de cualquier otra manera, como contar, medir, jugar ciertos juegos con reglas, resolver ciertos tipos de problemas o ejercicios, repetir rutinas según instrucciones explícitas u otras actividades parecidas. Sobre estas prácticas o actividades habría que citar numerosas referencias a los libros y artículos de Alan Bishop, Paul Ernest, Ubiratán D’Ambrosio, Paulus Gerdes, Yves Chevallard, Ricardo Cantoral, Teresa Farfán y muchos otros autores. La diferencia se da en la atención prioritaria que el Programa Cronotopía presta a las vivencias subjetivas de quien está involucrado en esas actividades, más que a las expresiones y formulaciones públicas, gráficas, verbales o de cualquier otra modalidad semiótica de esas prácticas o actividades, a las de los artefactos utilizados o a las de los resultados obtenidos por esas prácticas o actividades.

Además, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las líneas y figuras geométricas; ni calculo con las letras y los números u otros símbolos que aparecen en las superficies planas de los cuadernos, libros, pizarras y tableros; ni trabajo con las reglas, compases, calculadoras u otros artefactos, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales cronotópicos allá dentro de mi cerebro, intentando modular, regular y guiar ese procesamiento con la información que tengo en la memoria y con la información que recibo del exterior en tiempo real. Luego, trato de externalizar esas manipulaciones mentales y sus resultados imaginarios con palabras, gestos y dibujos, con el fin de examinarlas mejor yo mismo, de compartirlas con otros y someterlas a prueba por parte de mis interlocutores y del flujo de los procesos físicos naturales en los que estoy inmerso. Nótese que la palabra *manipulación* que utilicé ya es metafórica, a menos que usted piense que el homúnculo sensorial en los lóbulos posteriores del cerebro también tiene dos pequeños apéndices que se puedan llamar “manitos” o “manitas”.

Corolario 2. Una primera conclusión podría ser que en el Programa Cronotopía no hay palabras unívocas ni definiciones únicas y unívocas; en particular, no hay números reales distintos de los imaginarios: todos los números que nos enseñen o que nos inventemos son siempre imaginarios e imaginados.

Sin embargo, si usted considera que sus imágenes mentales son “reales” en su cerebro, entonces, para usted, también todos los números imaginarios serían reales en ese sentido restringido. Pero desde el punto de vista sincrético-analítico, los llamados “números reales R” serían más bien una simplificación de los llamados “números complejos C”, y no los segundos una complexificación

de los primeros. Ni siquiera habría una definición de cero ni de uno, ni sabríamos si los números de contar empiezan por cero, o por uno, o tal vez por dos. La proposición matemática que introduce esta incertidumbre entre el cero, el uno y el dos (y también entre el menos uno, el cero y el más uno) es la siguiente: “En cualquier base b , el logaritmo en base b de uno es cero”. Todavía estoy manipulando mis modelos mentales y ejercitando mis limitados conocimientos semióticos para interpretar esa proposición de manera coherente con la aritmética, el álgebra y el análisis que aprendí en la universidad.

Esta incertidumbre, esta proposición, los dos corolarios anteriores y muchos más enigmas que voy encontrando en la historia de las matemáticas y en las preguntas y explicaciones de los estudiantes me han venido imponiendo un principio matemático, lógico y filosófico muy difícil de aceptar, pero que se confirma en mi mente a medida que avanzo en el Programa Cronotopía:

Postulado 1. Toda expresión o formulación o fórmula bien formada (fbf o wff) con la que intento expresar algo acerca de una imagen o modelo cronotópico, una vez graficada y escrita deja de ser verdadera o falsa, y queda totalmente dependiente de la interpretación subjetiva del lector o lectora en alguno de los modelos mentales que le sugieran las gráficas o grafías y los términos y las fórmulas escritas. Esta clave hermenéutica paradójica podría llamarse “el Postulado de la Relatividad Absoluta” de la Cronotopía.

Este postulado tiene un problema grave: que el lector o lectora no le va a hacer mucho caso a ninguna de las afirmaciones que me he atrevido a escribir en este documento, puesto que ni siquiera yo mismo las propongo como verdaderas; pero podría tener una ventaja que para mí es crucial: que cuando algún lector o lectora crea que alguna afirmación mía es falsa, se detenga unos segundos y le dé una segunda oportunidad para ver si, dándole otra interpretación creativa, la puede considerar subjetivamente como verdadera en esa interpretación.

Corolario 3. Este postulado crea un problema grave para mi interpretación del Teorema de Incompletitud de Gödel de 1931, pues por bien formulado que esté dicho teorema, y por más validez formal que se le otorgue, el dominio de las verdades de la aritmética de Peano estaría vacío. Ninguna formulación escrita de la aritmética de Peano, formalmente demostrable o no, sería verdadera, y por lo tanto ninguna máquina de cálculo numérico podría permitirnos concluir que hay una verdad no demostrable; peor todavía, que no hay ninguna verdad demostrable, pues lo único demostrable es una fórmula sintácticamente bien formada y bien conectada a otras en un grafo dirigido. Eso no tiene nada que ver con la verdad o la falsedad.

Recuerdo la frase de Bertrand Russell acerca de que toda fórmula matemática es de la forma “si p , entonces q ”, pero que no sabemos lo que estamos diciendo ni sabemos si es verdad o no. Al menos en mi interpretación subjetiva, creo que el Postulado de la Relatividad Absoluta de la Cronotopía estaba ya muy bien formulado en las obras de Bertrand Russell, lo cual tampoco quiere decir que alguna frase que el dejó escrita sea verdadera, sino todo lo contrario: ninguna es verdadera, pero tampoco es falsa.

Un poco de memoria histórica

Intentemos devolvemos hacia el pasado para intentar vivir por unos momentos en nuestro modelo mental de lo que nos imaginamos que sería el planeta Tierra hace un millón de años. ¿Sabemos qué es “un millón”? ¿Qué es *año*? ¿Qué es tiempo o a qué llamamos tiempo, *tempus*, *chronos*? ¿Cómo lo medimos? ¿Qué es medir? Preguntas permanentes —y acuciantes— del Programa Cronotopía, que, más que respuestas verbales a quien nos hace la pregunta, producen exámenes mentales atentos al cronotopo interno de cada uno de nosotros.

Reconstruyamos pues un modelo mental de lo que sería el lugar, el ambiente, el *topos* en donde vivían nuestros antepasados del orden de los primates hace un millón de años. Algunas especies de un cierto género de antropoides, homínidos u homininos lograron ir separando algunos tiempos para el trabajo de supervivencia como cazadores y recolectores y otros para el ocio, el disfrute, el descanso, el ritual, la fiesta, la música y la danza. Me atrevería a decir que el proceso de hominización de los primates de nuestro género *Homo* se revela precisamente en ese cambio en la conciencia del tiempo libre y en su utilización.

En la medida en que en esos ratos de ocio empezaron nuestros conspecíficos a dedicar más y más tiempo para la reflexión mental sobre todas sus actividades conscientes e inconscientes y sobre sus sueños diurnos y nocturnos, se fueron perfeccionando los lenguajes *análogos* multimodales de todas las artes y afinando sus productos, como la música, el baile, la mímica, el grabado o pintura y el moldeado o modelado o escultura. Así empezaron a multiplicarse las huellas, los rasguños, las gráficas o grafías relativamente estables y duraderos, que no propiamente eran lenguas ni lenguajes, pero sí podríamos llamarlos por su carácter semiótico *lenguajes analógicos*. Hasta ese momento, y por muchos milenios después, la única grabadora de audio y video existente era la memoria situada en el cerebro de esos primates, que grababa también en forma multimodal y multisensorial los modelos mentales en reposo y en movimiento.

Más tarde, tal vez hace menos de cien mil años, se fueron configurando los lenguajes *articulados* (o digitalizados o cuantizados o discretizados en sonidos separados, discretos, inicialmente sílabas y fonemas cortos y luego en lo que hoy llamamos “las palabras”) que posibilitaron el cuento, el rumor, el chiste, la instrucción, la amenaza, la poesía, la canción y el teatro para intentar expresar en forma externa y pública las impresiones, las afectaciones, las emociones y conmociones, las representaciones y valoraciones subjetivas internas de los fenómenos externos perceptibles directamente por el cerebro de cada uno de los miembros de esa especie privilegiada del género *Homo*, mal llamada “*sapiens*” porque seguimos siendo muy poco sapientes (más bien: muy ignorantes, insipientes (con ese), insápidos e insípidos).

Por ejemplo, no sabíamos entonces nada —y todavía no sabemos prácticamente nada— acerca del espacio, el tiempo, el cambio y el movimiento “allá afuera”; por lo menos yo poco sé de todo eso, porque vivo encerrado en mi estrecha caja craneana, y solo tengo alguna vivencias o experiencias con alguna consciencia difusa y esporádica de lo que vivo yo, o al menos lo que parece vivir mi pequeño avatar, un homúnculo más entre las sombras, duendes y maniqués de este oscuro y estrecho teatro mental que parece encerrado en una bóveda hemisférica de una capacidad aproximada de un decímetro cúbico. ¿Sé qué es “bóveda” o “hemisferio”, o “capacidad” o “decímetro cúbico”?

Como decía Sócrates, “solo sé que nada sé” de lo que pasa por fuera de esa caverna de Platón. ¿Será que mi caverna es como la de Platón, o como la de cada uno de los que me lee o escucha? Ni siquiera sé cómo sabía Platón —o cómo sé yo— qué es *caverna* o qué es *teatro* y que no lo es. Peor todavía, por más que haya logrado avanzar en el Programa Cronotopía, todavía no sé qué es propiamente “avanzar” ni “Programa”, y menos “avanzar en un Programa”. ¿Ustedes sí? Los felicito, y los envidio, pero no acabo de creerles.

No quiero, ni mucho menos, silenciar sus respuestas a las preguntas, sino que, por más atención que les pongo y aunque me las repitan varias veces, en virtud del Postulado 1 o Principio de la Relatividad Absoluta me abstengo de declarar sus respuestas ni como verdaderas ni falsas. Pero sí necesito la ayuda de las reacciones y rechazos que nazcan sinceramente de la perplejidad o el escepticismo de otros sujetos como mis lectores y lectoras que traten de interpretar lo que yo digo sobre mi cronotopo mental y lo comparen con lo que ellos y ellas experimenten en el suyo, para poder reconstruir la métrica, la geometría, la medición, o en general, la *metría* de mi propio cronotopo mental, con la ayuda de dibujos, grabados o grafías y expresiones verbales orales y escritas para compartir esas experiencias; esas expresiones formarían las *grafías* y las *logías* que pretendo acumular para avanzar hacia una ciencia de la Cronotopía, y con ellas y sobre ellas pasar a la *metría* (o métrica o metrización) y luego a la *nomía* (o formulación de las regularidades, leyes y normas de una futura Cronotopía).

Le adelanto al lector o lectora que, aunque logremos avanzar conjuntamente en el Programa Cronotopía con la acumulación, discusión y depuración de múltiples grafías y logías, ese avance sería apenas el comienzo de la tercera fase de la Cronotopía como ciencia, la cual, como creo yo de toda ciencia, incluiría cuatro fases: la cronografía y la cronología, la topografía y la topología, la cronometría y la topometría; luego vendría la fase principal: la crononomía y la toponomía.

Postulado 2. En el Programa Cronotopía, la epistemología de modelos y teorías le asigna las mismas cuatro fases: la X-grafía, la X-logía, la X-metría y la X-nomía a toda ciencia X que haya aparecido en Occidente desde el siglo XVII, y a las disciplinas antiguas del Quadrivium o Tétrodos pitagórico que se sistematizaron hacia el siglo VII A.C. en la llamada “Magna Grecia” del Mediterráneo. El enigma epistemológico principal es por qué más de mil años de la Astrografía y la Astrología antiguas se concretaron en la Astrometría y la Astronomía para configurar una ciencia ya muy desarrollada al final de la Edad Antigua, unos dos mil años antes de que Galileo Galilei, Francis Bacon e Isaac Newton comenzaran a configurar las nuevas ciencias de la Edad Moderna europea.

Corolario 4. A pesar de las disputas sobre la originalidad del mal llamado “descubrimiento” de la derivada, la derivada de Leibnitz sería muy distinta de la de Newton; la derivada de Leibniz (dy/dx) no puede ser una velocidad, porque es geométrica y pretende solo resolver el problema geométrico del trazado de rectas tangentes a gráficas curvas no circulares propuesto por Fermat y Roberbal. Así, la derivada de Leibnitz es equivalente a la tangente trigonométrica de un ángulo local en un plano coordinatizado y, por lo tanto, sería solo topométrica, mientras que la derivada o fluxión de Newton (notada ‘ x' ’ con un punto encima de la x) sí pretende ser crono-topométrica y representar la rapidez, celeridad o velocidad de un punto de masa que se mueve en el espacio tridimensional, que podríamos llamar “velocidad lineal”. Pero ninguna de esas dos derivadas se parece a la velocidad areal de la Astronomía antigua, llamada también metafóricamente

“velocidad de barrido”, que le sirvió a Kepler para refutar la propuesta copernicana de las órbitas circulares de los planetas, calculando (sin disponer de ecuaciones cartesianas) que la forma de las órbitas era elíptica y que las velocidades areales eran constantes.

Corolario 5. Si la mecánica de Einstein es incompatible con la de Newton, y ambas con la mecánica cuántica, tampoco la ‘ c ’ de Lorentz y Einstein puede ser una velocidad, y menos la mal llamada “velocidad de la luz”, porque en la teoría de la relatividad no hay nada que sea “la velocidad” ni nada que sea “la luz”, o por lo menos yo no las veo. Tampoco las vio Leopold Infeld, quien le dijo a Einstein que Minkowski lo había traicionado, pues al espacializar el tiempo como cuarta dimensión *ict*, la velocidad desaparecía y solo quedaba la tangente de un ángulo.

Efectivamente, si se toma la constante c como la tangente del ángulo de 45 grados, $c = 1$, y todos los cálculos de la relatividad especial y de la relatividad general funcionan perfectamente con ese valor unitario de la constante c , que, por lo tanto, no tendría nada de velocidad, rapidez o celeridad.

Lo que sucede es que, como decía Leibnitz, todos somos ciegos y sordos respecto del futuro, y solo tenemos unas estrechas ventanitas hacia el pasado. Pero al menos esas ventanitas por las que nos entra una información exigua también nos abren una puerta para emprender el camino hacia la sabiduría, si acaso es posible alcanzarla o por lo menos avanzar algo en ella, de lo cual también podría dudarse, como lo hicieron los agnósticos y los cínicos en Grecia; pero podemos ser más optimistas, pues, por ejemplo, ya desde hace unos 4000 años podemos, por medio de cálculos mentales topométricos y cronométricos con sus grafías y sus logías, imaginando modelos mentales de trayectorias invisibles de los planetas y sus satélites, conjeturar las fechas precisas y las horas aproximadas de algunos eventos futuros como los eclipses de sol y de luna. El enigma epistemológico es por qué, si somos ciegos hacia el futuro, y si esas grafías y logías matemáticas no son ni verdaderas ni falsas, esos eventos sí suceden en las fechas y horas aproximadas que calculamos muchos años antes.

Confiemos pues en que, a pesar de que las afirmaciones científicas, una vez formuladas por escrito, no deban ya considerarse ni verdaderas ni falsas, sí podemos al menos avanzar un poco en sabiduría y en ciencia y evolucionar positivamente como especímenes del género *Homo* y su especie *sapiens*. En vez de desanimarnos ante las evidencias de un millón de años de ignorancia sobre el espacio, el tiempo y el espacio-tiempo “allá afuera”, cada uno de nosotros puede comenzar ahora mismo un programa de investigación (previsiblemente interminable y que no garantiza nada) en el que nos empeñemos en analizar por lo menos el cronotopo interno de cada uno de nosotros y tratar de “comparar notas” con lo que nos externalicen los otros miembros de nuestra especie a través de grafías y logías. Tal vez así podamos reconstruir algo de ese largo camino de cien mil años desde las primeras representaciones y artefactos culturales de los astrónomos antiguos, hasta llegar a las matemáticas y a las físicas actuales. Seamos un poco más modestos: intentemos comprender algo de nuestras experiencias cronotópicas internas en los últimos diez mil años, o al menos de los diez últimos años de nuestra vida interior y sus vivencias matemáticas. Esa es la meta del Programa Cronotopía.

Las grafías y las logías en la evolución humana

Volviendo a la historia de nuestra especie, en los últimos cien mil años se fueron configurando múltiples manchas, tallas, pinturas, grabados, relieves, estatuas y otras configuraciones táctiles y visuales, que en la Cronotopía se llaman “grafías”: dibujos, rasguños, pinturas, esculturas y diagramas que permiten externalizar y hacer públicas las imágenes y modelos mentales que proyectan hacia adentro los cerebros cada vez más grandes de los especímenes del género “*Homo*”. En cien millones de años ya nuestro cerebro ha evolucionado a mil centímetros cúbicos de volumen y cien mil millones de neuronas. Pero necesitamos que pasaran cien mil años para poder decir esto último, aunque todavía no entendamos muy bien qué significa todo eso (pues creo que apenas estamos llegando a la fase de configuración de las distintas métricas, que en la Cronotopía se llaman “metrías”).

¿Qué significa mil, cien mil, cien millones o cien mil millones? ¿No serán más bien cien billones en el Brasil o en los Estados Unidos? Poco sabemos de aritmética, de geometría, de métrica o metrización o metría. Pero parece que sí sabemos mucho, por lo menos desde que se estableció el Sistema Internacional de Unidades SI en 1960. Esa es otra pregunta permanente del Programa Cronotopía, que no requiere respuestas verbales inmediatas sino una reflexión personal atenta y obstinada para llegar de la geometría escolar a la topometría; del calendario y los relojes a la cronometría, para reconstruir la aritmética antigua y la moderna desde la música, la acústica y el ritmo y la astronomía antigua y la moderna desde la óptica, la pintura, la escultura y la arquitectura. La pretensión de avanzar en la cronometría y la topometría es que así podemos llegar a las nomías, que nos permitirían reformular las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica.

Corolario 6: Si eso es así, sería mejor comenzar el Quadrivium o “Tétrodos” matemático como lo hacía Pitágoras hace 2500 años, con la música, la fónica o la fonética, la rítmica o la ritmética de los números en movimiento, y habría que llamar a la teoría de los números fijos, quietos y estáticos no “aritmética” sino “aritmética”.

La rítmica o ritmética, la música y la danza, el ritmo y el tambor funcionan muy bien para empezar las matemáticas en preescolar y avanzar rápida y motivadamente en ellas, como lo mostradlo a lo largo de 30 años la investigadora del MIT Jean Bamberger y como lo he podido comprobar repetidamente con niños, niñas y maestros y maestras de preescolar.

En forma más general, ¿cuáles son los mínimos requisitos neuronales, cognitivos o gnósticos que debe cumplir nuestro cerebro para producir, mantener y estudiar los modelos mentales y los lenguajes análogos y digitales o articulados con que tratamos de domesticarlos y comunicarlos a través de las matemáticas y las físicas? Esa es la pregunta permanente del Programa Cronotopía, de nuevo, no para contestarla verbalmente, sino para pensarla introspectivamente.

Al mismo tiempo que las grafías, nuestros antepasados se inventaron múltiples narrativas, relatos, admoniciones, prescripciones e instrucciones en distintos lenguajes orales ya digitalizados o articulados para acerca del espacio y el tiempo, los usos y costumbres, que en la Cronotopía se llaman “logías”: sartas de sonidos, sílabas y palabras articuladas oralmente,

acompañadas con gestos, gritos, cambios de tono y de ritmo que nos permiten compartir las imágenes y modelos mentales entre los miembros cercanos de nuestra especie “sapiens”.

Esas grafías y esas logías comenzaron a ayudar a nuestros antepasados a hacer mejores refugios, a cazar con más eficacia y menos riesgos, a domesticar plantas y animales, a perfeccionar herramientas, a desarrollar la agricultura, a construir las primeras edificaciones y los primeros asentamientos o ciudades e, infortunadamente a diseñar mejores armas para matar más gente más rápidamente.

Hablamos, pues, de las técnicas, la *techne*, con sus tecno-grafías y tecno-logías, según la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, Gascon y Bosch. Pero no son tan nuevas esas técnicas como sus tecno-logías escritas: las grafías, las logías, las técnicas, tecnografías y tecnologías se desarrollaron en el neolítico hace unos diez mil años.

Hace solo cinco o seis milenios, con la invención de la escritura o “logografía”, que es la grafía de las logías, empiezan las primeras civilizaciones, las élites y las castas sacerdotales y se inician los primeros imperios. Nuestros antepasados perfeccionaron las medidas y los instrumentos de medición, los números y los cálculos o cuentas, que, como ya vimos, en la Cronotopía se llaman “las metrías”, y se van multiplicando las expresiones de las regularidades, leyes, normas y esquemas que en la Cronotopía se llaman “las nomías”. Esa sería la cuarta y última fase de toda ciencia, en particular de las dos subdisciplinas de la Cronotopía, la Crónica y la Tópica, cada una con sus cuatro fases, que, al articularlas, van completando la Cronotopía.

En menos de mil años, del año 5000 al 4000 antes de Cristo se desarrollaron simultáneamente las Físicas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas en la China, la India y Mesopotamia. Hace unos 4000 años pasaron estos saberes a Egipto, y hacia el año 700 A.C. a toda el Asia Menor y a las ciudades del Peloponeso, sobre todo a Atenas y, más tarde, a Alejandría. Ya desde esa misma época se extendieron y refinaron esos saberes a toda la Magna Grecia mediterránea, inicialmente con Tales y Pitágoras, culminando con los maestros atenienses, alejandrinos y sicilianos, entre los que sobresalen Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquímedes.

Desde el punto de vista de la Cronotopía, excepto por el desarrollo de mejores tecnologías y notaciones más diferenciadas, es poco lo que han progresado las tres disciplinas matemáticas más antiguas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética que practicamos los matemáticos actuales en nuestros modelos mentales cronotópicos. Más bien podría decirse que desde las aritméticas de Boecio y Nicómaco en la Edad Media europea, o sea del año 400 al año 1600, y en todos los 300 años de las matemáticas centroeuropeas que llamamos “Modernas”, desde 1600 hasta el “Programa de Erlangen” de Lie, Klein y Poincaré en 1872, con muy contadas excepciones de parte de unos pocos matemáticos geniales, no parece que hubiéramos progresado mucho en la exploración de ese mundo mental tridimensional que estudia, analiza y trata de reconstruir y practicar el “Programa Cronotopía”.

La Ciencia y las ciencias

Esas externalizaciones de los cronotopos mentales de los que llamamos desde la Antigüedad “sabios”, “astrólogos”, “gurúes” o “magos” hasta el Renacimiento europeo de los siglos XV y XVI conformaban las únicas ciencias entonces conocidas: las tres disciplinas del Trivium o Triodos: Gramática, Retórica y Dialéctica, y las cuatro del Quadrivium o Tetodos: la Astronomía, la Geometría, la Música o Ritmética y la Aritmética o Arritmética.

No se encuentra antes del año 1600 ningún uso de la palabra “ciencia” en el sentido actual de la palabra. La palabra latina “Scientia” y sus derivadas en los idiomas vernáculos se refería a todo tipo de conocimiento. Solo después de la invención de la imprenta y la expansión de los libros impresos, comenzó la Ilustración de los siglos XVI y XVII. A comienzos del siglo XVII se configuró en Europa central “la ciencia nueva” de los fenómenos terrestres y celestes estudiados por la astronomía de Copérnico, Galileo, Kepler y Tycho Brahe.

Esa “nueva ciencia” que se anuncia con Galileo y empieza a balbucear con Descartes, se formuló explícitamente en Inglaterra con el “Novum Organon” de Francis Bacon, que pretendió desplazar al antiguo “Organon” de Aristóteles y a toda la sabiduría filosófica y astronómica medieval. Su primer gran producto fue la Mecánica newtoniana, refinada en la Mecánica analítica leibniziana y lagrangiana con una fantástica producción de nuevas formulaciones matemáticas. Luego vino la explosión científica del siglo XIX con las teorías del campo electromagnético de Maxwell y la termodinámica de Boyle, Hooke, Black, Watt, Sadi-Carnot, Thompson, Clausius, el mismo Maxwell, Boltzmann, Joule y Kelvin. A comienzos del siglo XX surgen las teorías de la relatividad de Lorenz, Poincaré y Einstein. Poco después, aparecen las dos variantes de la Mecánica cuántica del siglo XX, con Schrödinger y Heisenberg, con Louis de Broglie, Weyl, Pauli y Dirac, que nos han legado otro diluvio de formulaciones matemáticas alucinantes.

El Programa Cronotopía intenta incluir y sistematizar todas esas matemáticas del siglo XX con las europeas de 1600 a 1900, con las antiguas que se dieron en la China, la India y Mesopotamia desde el segundo milenio antes de nuestra Era, las de Egipto y la Magna Grecia del Mediterráneo en los seis o siete últimos siglos antes de Cristo, desde Parménides, Heráclito y Zenón, Tales y Pitágoras, Eudoxo y Euclides y luego Arquímedes. Pero como no toma ninguna formulación por verdadera o falsa, también intenta relativizarlas, contrastarlas, criticarlas y hacer nuevas propuestas matemáticas, epistemológicas, históricas y didácticas.

La apuesta es a que no han cambiado mucho nuestros cerebros ni hemos progresado mucho en esas matemáticas construidas y reconstruidas solo con la exploración de nuestro cronotopo privado interno; pero es claro que ahora tenemos innumerables ventajas técnicas y simbólicas de finales del siglo XIX, entre otras impensables antes: la fonografía o grafía del sonido de Edison (1877) y la cinematografía o grafía del movimiento de los hermanos Lumière (1895). En la segunda mitad del siglo XX contamos con muchas otras ayudas técnicas, tecnográficas y tecnológicas invaluable: las nuevas tecnologías de la información y la comunicación actuales o las TIC. Con esa ayuda, ahora podemos reconstruir en unos ocho o diez años de estudio los 4000 años de la Astronomía antigua y los 400 de las matemáticas y las físicas modernas. Cada estudiante —o al menos cada estudioso— podría ahora con la ayuda de Internet y las TIC a reformular y sistematizar en 40 años esos 4000 años, y luego reconstruir los desarrollos de las matemáticas y las físicas que llamamos “Modernas”, que nacieron en los países de Europa

Central de 1600 al 2000 y, ojalá, sin esperar a que esa reconstrucción y reformulación se complete, lleguemos pronto a inventar nuevos desarrollos.

Nos parece invenciblemente que todos esos hechos y fenómenos de la Astronomía, las matemáticas y las físicas ocurren en el espacio-tiempo “allá afuera”, en el espacio extramental o extracraneano, pero también nos parece invenciblemente que de alguna manera tienen que ocurrir en forma comprimida, sucesiva y paralela en el interior del cráneo de cada uno de nosotros. Nuestro cerebro tiene que recibir informaciones externas, calcular mentalmente y luego echar a andar modelos mentales con sus proyecciones dinámicas internas que estén conectadas con los nervios y los músculos para reaccionar a tiempo a los peligros y prever los cursos de acción para el futuro inmediato. Eso no es solo para las matemáticas y las físicas, sino para todas las prácticas individuales y sociales; pero es más evidente en las ciencias formales que construyen modelos mentales muy refinados, aunque parece que “no sirven para nada” en la realidad cotidiana. Recordar, repasar y reflexionar sobre esos modelos mentales y las maneras de expresarlos en grafías y logías, para desarrollar metrías y nomías sobre el espacio-tiempo, el cambio y el movimiento, esa es la tarea del Programa Cronotopía.

Primeros resultados generales del Programa Cronotopía

Mi cronotopo mental es accesible solo a mi propia atención y reflexión. Es un fenómeno exclusivo de mi cerebro encerrado en su caja craneana, atestiguado solo a mi consciencia individual y subjetiva que es la única que ve, oye o sabe acerca de lo que sucede en mi mundo mental privado. No sé cómo son los fenómenos mentales que ocurren en otros cerebros, ni puedo saberlo, por más observaciones, disecciones, radiografías u otras neuroimágenes del cerebro de otros sujetos humanos ni del mío propio. Solo puedo suponer que son muy parecidos a los míos, al menos por la semejanza fisiológica de los cerebros humanos. Esas especulaciones proyectivas sobre la posible mente de otros seres vivientes se han llamado “Teoría de la Mente”, y alguna forma de Teoría de la Mente podría darse en otros animales con cerebros muy desarrollados, como los perros, los caballos, los elefantes, los gorilas, chimpancés y bonobos, y en las ballenas y los delfines.

Entre los pocos y muy dudosos resultados que puedo reportar después de 60 años de acumular grafías, logías y metrías, y de 20 años de tratar de formular nomías, podría apenas comunicarles que en mi cronotopo interno observo “como por el rabillo del ojo interior” el trasfondo claro y a la vez oscuro en el que yo mismo (o al menos mi avatar) como agente noético-semiótico, como sujeto individual en su reflexión mental consciente, experimento internamente los fenómenos que considero “extemos” como si ocurrieran “allá afuera”, aunque solo sé con certeza que ocurren “aquí adentro” de mi cabeza como imágenes y modelos que surgen de ese trasfondo a la vez temporal y espacial que he llamado “mi cronotopo mental privado”.

Mi cronotopo mental me parece ser algo así como un recipiente muy grande e ilimitado pero que tiene que ser lo suficientemente pequeño para que “el mundo me quepa en la cabeza”. La bóveda estrellada parece tener por unos diez mil millones de años-luz, pero mi bóveda craneana por dentro solo parece tener diez centímetros de radio. Lo que o veo desde por dentro de ese recipiente cóncavo parece ser un fondo o trasfondo vago, gris o negro en el que de la sombra

surgen luces y colores, imágenes y modelos mentales, pero a la vez experimento ese espacio-tiempo de mi cronotopo como si estuviera aparentemente vacío o talvez lleno de algún gas o aire tenue, una especie de fluido o líquido imperceptible, que los antiguos llamaron “el éter”, “el aire”, “lo ilimitado”, que está a la vez poblado de multitud de imágenes multimodales sensorio-motoras, que se combinan, se aglutinan o se integran en totalidades conscientes como modelos mentales estáticos y dinámicos. No estoy seguro de que haya éter, o “materia prima” o “prote hyle”, que mis maestros de física y química llamaban “Protilo”, pero tampoco les creo a los que me dicen que no lo hay.

Pareciera que nuestro cerebro estuviera continuamente produciendo toda clase de proyecciones intermitentes de lo que nos parecen películas o videos acompañados de toda clase de sensaciones y percepciones de nuestros sentidos externos e internos. Esas imágenes parecen ser más coherentes y repetibles cuando estamos despiertos, pero mucho menos en las ensoñaciones, sueños y pesadillas cuando estamos relajados o dormidos. Como diría el neurólogo colombiano Rodolfo Llinás, nuestro cerebro es una incansable “máquina de sueños” que funciona 24 horas al día 7 días por semana, desde el nacimiento y hasta por 120 años. En eso sí estoy de acuerdo con el Dr. Llinás, así no entienda bien lo que quiere decir, pero sí creo que estamos de acuerdo, al menos en la manera como trato de interpretarlo.

Un poco de historia personal

Devolvamos la película unos sesenta años, al año 1959. Yo también tuve 20 años. El intento actual que me guía en el Programa Cronotopía —el de reconstruir todas las matemáticas y las físicas antiguas y modernas a partir de mis propios modelos mentales que puedo examinar y analizar en mi cronotopo mental privado— tiene ya una larga historia en mi vida académica. Comenzó con el estudio de la Dialéctica en 1959, con un curso de lógica guiado por el Padre Jesús Sáenz en la Universidad Javeriana, que se basaba en las “Summulae Logicales” de Pedro Hispano, un texto de hace mil años. Me acuerdo aún del hexámetro latino que codificaba las formas válidas del silogismo aristotélico: “Barbara, Celarent, Darii, Ferio Baralipon”. Imposible comprimir más información en menos letras.

Mi tesis de pregrado en filosofía sobre el espacio-tiempo en la Relatividad Especial, dirigida por mi maestro Carlo Federici en 1960, me llevó a analizar el espacio tiempo como ser de razón con fundamento en la realidad, “*ens rationis cum fundamento in re*”. Después, continuó con mi tesis de doctorado, que terminé en 1968, en la que analicé todas las posibles fórmulas algebraicas que combinaran productos conmutativos o no, asociativos o no asociativos, de dos y tres variables, sin importar su interpretación, sino solo sus propiedades formales. Por eso llamo a esa rama del álgebra no asociativa “el álgebra abstracta e inútil”, pero les garantizo que ha sido muy entretenida y me ha ayudado muchísimo para desarrollar el Programa Cronotopía.

Corolario 7: Toda ecuación con números o letras, inclusive la ecuación $X = 10$, tiene un número ilimitado de interpretaciones, y en cada interpretación que se le dé, esa misma ecuación puede tener no una sino muchas soluciones diferentes.

Que me perdone Gauss por arruinarle su Teorema Fundamental del Álgebra, según el cual una ecuación de grado dos, tres o n tendría exactamente dos, tres o n soluciones —no necesariamente diferentes— en los números complejos.

Estudiemos, por ejemplo, la ecuación de primer grado $X = 10$. Esta ecuación tiene una solución única y obvia para cualquier aprendiz de aritmética que utilice la numeración romana: que la ‘X’ es igual a diez. Parece no haber más soluciones. ¿Tendría razón Gauss? Les aseguro que, si le doy otra interpretación como ecuación lineal de primer grado, equivalente a $X - 10 = 0$, cualquier número de contar de dos en adelante es una solución de esa ecuación $X = 10$.

Veámoslo. Si se propone que ese número X sea, por ejemplo, el dos, tomado como base de la numeración binaria de la computación electrónica, podemos comprobar que el dos sí es una solución de la ecuación $X = 10$, porque el dos se escribe ‘10’ en código binario; si se toma el número diez, nuestra base usual de numeración, también es una solución obvia, y me temo que Gauss pensaba que era la única. El número sesenta, tomándolo como base de la numeración en la astronomía antigua, también es una solución. Efectivamente, sesenta en base sexagesimal se escribe ‘10’ y, por pura diversión, ustedes pueden comprobar que el número dieciséis en base hexadecimal en cualquier computador actual también se escribe ‘10’. Desde la Cronotopía y el álgebra abstracta e inútil, el Príncipe de las Matemáticas resultó demasiado tacaño.

Cuando regresé a Colombia en 1971, empecé a trabajar de nuevo con mi antiguo gran maestro Federici y con un nuevo gran maestro, el Dr. Alberto Campos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. El Dr. Campos me invitó a colaborar con los cuatro cursos de Lógica y Matemática I a IV que él había diseñado para los estudiantes de Filosofía de la Universidad Nacional. Sin los cursos, discusiones y escritos de Alberto Campos de 1972 a 1992, no me hubiera adentrado en la historia de las matemáticas, comenzando desde los Presocráticos, Tales, Pitágoras y Euclides; pero con esos aportes me atreví a preparar y escribir mi trabajo de ascenso sobre la historia del álgebra del Renacimiento, y desde entonces no he dejado de estudiar y disfrutar la historia de las matemáticas, su epistemología, su práctica y su didáctica, intentando reconstruirla desde la investigación de lo que ocurre en mi propio cronotopo con sus imágenes y modelos mentales. Para ello, como me lo enseñó Piaget, las preguntas y ocurrencias de los niños y las niñas han sido mis mejores estímulos, y las maneras de escribir formulaciones matemáticas en los manuscritos antiguos, en los libros impresos y en la pantalla de los computadores han sido la materia prima para incontables chispazos cerebrales, así la mayoría de las veces resulten haber sido solo cortocircuitos.

En especial, con el Programa Aritmo-Geométrico pitagórico que aprendí con el Dr. Campos, he venido tratando de reconstruir las Aritmética actual como Arritmética antigua, y todas las demás matemáticas actuales a partir de la Astronomía Antigua, mucho más antigua que Tales y Pitágoras, descubriendo cada vez más profundidad en la teoría talesiana y eudoxiana de las razones, las proporciones y las desproporciones, en la de las razones cruzadas, la armonía y la anarmonía.

Algo parecido a la reconstrucción de las matemáticas me sucedió con su filosofía. En ella me introdujo mi maestro Federici, pero sin los mencionados cursos de filosofía y epistemología de

las matemáticas que el Dr. Campos logró establecer en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, y sin las oportunidades de dirigir yo mismo algunos de esos cursos, no hubiera empezado a investigar y a enseñar en distintas universidades mis cursos de epistemología de las matemáticas. En ellos presentaba las cuatro escuelas dominantes en los siglos XIX y XX: el Platonismo en sus dos variantes, el Formalismo, el Logicismo y el Intuicionismo y, luego, otros cursos más generales de epistemología.

Hacia una filosofía de las matemáticas

En esos cursos y lecturas fui impulsado y retado por mis maestros Carlo Federici y Alberto Campos a intentar formular mi propia filosofía de las matemáticas, de tal manera que, teniendo en cuenta esas cuatro escuelas de filosofía de las matemáticas, lograra superar sus vacíos y limitaciones, ante todo para tener en cuenta la producción de nuevas matemáticas del siglo XX desde el Programa de Erlangen en 1872.

El profesor Fernando Zalamea fue el que me señaló la ausencia de las matemáticas del siglo XX en la historia y la filosofía de las matemáticas, y quién lo creyera, hasta en la docencia de las matemáticas universitarias en toda Latinoamérica. En la educación media o bachillerato y en los cuatro primeros años de las universidades, inclusive en las carreras llamadas “de matemáticas puras”, solo aparecen matemáticas elaboradas antes del final del siglo XIX.

El profesor Zalamea me ganó muy pronto la carrera de producir una nueva filosofía de las matemáticas que incluyera los desarrollos matemáticos de 1870 al año 2000, cuando publicó su filosofía sintética de las matemáticas en el año 2010. Apenas ahora, 60 años después de ese remoto comienzo de mi camino de exploración en 1959, que reinicié en la Universidad Nacional de Colombia en 1972 con mis maestros Federici y Campos; 25 años después de mi trabajo sobre la Teoría General de Procesos y Sistemas de 1995, y diez años después del desafío de la filosofía sintética de Fernando Zalamea, estoy intentando configurar una filosofía propia que llamo “sincrético-analítica”, basada en tres teorías generales: la Teoría General de Procesos y Sistemas (como Metafísica), la de Modelos y Teorías (como Metagnósica) y la de Representaciones e Interpretaciones (como Metasémica).

Los detalles filosóficos habrá que dejarlos para otros escritos, pero para la Cronotopía, la idea central es la de volver a examinar la lógica, las matemáticas, la teoría de la información y las físicas antiguas y nuevas, comenzando no desde la ciencia actual de los siglos XX y XXI, sino desde la Astronomía Antigua, pasando por Heráclito, Parménides y Zenón, por Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquímedes, hasta las modernas teorías matemáticas y físicas, incluyendo las cosmológicas, relativistas y cuánticas. No se trata de preguntarse si son verdaderas o no, ni quién inventó quién y en dónde, sino de reinventarlas uno mismo en su propio cerebro, utilizando la exploración de su cronotopo privado con la ayuda de la filosofía sincrético-analítica formulada en esas tres teorías generales: la de procesos y sistemas, la de modelos y teorías y la de representaciones e interpretaciones.

Esas tres teorías generales me han permitido ir aprendiendo, reformulando y refinando lo mejor del Platonismo, tanto en su vertiente realista como en la idealista; lo más refinado del Logicismo

de Frege y Russell, del Formalismo de Hilbert y del Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Michael Dummett. Explico un poco más esos aportes de las filosofías ya clásicas de las matemáticas a la filosofía sincrético-analítica.

El Logicismo, quitándole los “ismos” y los “fanatismos”, me ha ayudado a reinterpretar a Peano, a Cantor y a Piaget, que consideraban la lógica como anterior a las matemáticas, y a la vez como una rama de ellas, llamada “lógica matemática” o “lógica formal”. Recordemos la formulación de Bertrand Russell, equivalente al Principio de la Relatividad Absoluta.

El Formalismo de Hilbert me ha llevado a perfeccionar la sémica y la metasémica, con las escrituras discretas codificables en bytes con bits binarios en un computador, y por lo tanto la articulación del Programa Cronotopía con la teoría de la información de Shannon y Weaver.

El Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Dummett me ha llevado a explorar con cada vez más refinados métodos y técnicas mi cronotopo personal privado con sus imágenes y modelos, y a confiar en ellos mucho más que los Formalistas y Logicistas nos lo permitirían. He encontrado en el manejo intuitivo —no “intuicionista”— de mis modelos mentales, y a encontrar múltiples afinidades con todos los Astrógrafos, Astrólogos, Astrómetras y Astrónomos de la antigüedad y con los gigantes de las matemáticas del siglo XX después del Programa de Erlangen, así como múltiples reinterpretaciones muy impactantes de sus textos, diagramas, fórmulas y ecuaciones.

He podido retomar así lo más valioso de esas filosofías ya clásicas de las matemáticas, para formular con mayor cuidado mi filosofía sincrético-analítica con sus tres teorías generales y sus herramientas sémicas y metasémicas.

En pocas palabras, este contraste entre las escuelas filosóficas me ha venido cambiando la filosofía y la epistemología de las matemáticas y las físicas, y me ha permitido releer la historia de las matemáticas en forma impensable hace 20 años.

Algunas consecuencias pedagógicas y didácticas

Ese cambio en la formulación de la filosofía y la epistemología de las matemáticas me ha permitido no solo reformular muchos campos de las matemáticas antiguas y modernas, sino también reformular su pedagogía y su didáctica.

Desde el punto de vista de la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, he visto que es necesario partir de los modelos intuitivos de los estudiantes y no de las expresiones verbales o puramente simbólicas de las matemáticas usuales, buscando, por supuesto, las encrucijadas en donde se separan los razonamientos formalmente válidos de los razonamientos con y sobre los modelos mentales imaginables y contrastarlos uno contra otro, sin darle valor de verdad a los razonamientos formales ni tampoco a las conclusiones intuitivas a partir de “echar a correr” los modelos mentales míos y los de cada estudiante. Se trata más bien de montar y realizar experimentos mentales, de manera que pueda sentir yo mismo y facilitarles a ellos sentir

interiormente la resonancia y armonía de lo la teoría predice con el flujo del modelo mental puesto en acto por la dinámica de la teoría que lo expresa y en la que se interpreta.

Ante todo, me ha cambiado la percepción de que los niños y las niñas de preescolar no saben prácticamente nada de matemáticas; todo lo contrario: a los cinco años ya saben muchas matemáticas, pero he podido comprobarlo y disfrutarlo sin caer en el bloqueo iniciado por Sócrates cuando dijo que todos ya habíamos aprendido las ideas matemáticas fundamentales en pretendidos viajes “hiperuránicos” (“más allá de los cielos”) antes de haber nacido o en sucesivas reencarnaciones. El diálogo socrático parte de ese supuesto innecesario y estorbo, y con preguntas muy “cargadas” o “capciosas” va sacándole “con tirabuzón” al estudiante una solución a un problema que coincida con la del maestro, sin caer en la cuenta de que con esa técnica va a fijar la atención en una sola solución, ocultando muchas otras posibles, y va a impedir el cuestionamiento del problema o de la pregunta misma que podría llevar a un florecimiento de la creatividad matemática del estudiante hasta llegar a superar a su mismo maestro.

Trato de reconstruir yo mismo las ciencias que Federici llamaba “formales y fácticas pre-antrópicas” —o por lo menos las abióticas— no solamente desde el acumulado escrito producido en los siglos XVII al XX, sino desde su reinterpretación interna en los modelos mentales que fabrica esa “loca de casa”, que llamaría Santa Teresa, mi imaginación personal y privada, mi “máquina de sueños”. Lo que me da la ilusión de avanzar en este programa (que ahora sí se ve claramente que es sin duda megalomaniaco) es mi Teoría de la Mente: a partir de ella confío en que cada niño o niña, adolescente o persona adulta neurológicamente sana tiene una máquina de sueños igual o mejor que la mía. No creo poder enseñarle nada a ninguno de ellos y ellas, pero sí he aprendido a hacerles preguntas que los lleven a poner en ejercicio su propia máquina de sueños y a disfrutar esa gimnasia mental que es francamente adictiva. El Programa Cronotopía propone nada menos que esa adicción es la más apropiada para evitar o superar cualquier otra adicción, pues lo impulsa a una a seguir aprendiendo más y más de todas las ciencias.

Corolario 8: En la aritmética digital antigua y moderna no está bien definido cuál es la mitad de un número par.

Este corolario me lo enseñó una niña de seis años, cuando le pregunté cuál es la mitad de diez. Miró sus dos manos un largo rato, moviendo los dedos (para mí, esa es la aritmética digital antigua y moderna: la de los diez dedos). De pronto dijo: “No puede ser cinco, porque el cinco está a este lado”. Pensó otro rato y se preguntó “¿Será cinco y medio?” ¿Ustedes qué dicen?

Así he tratado en estos últimos 20 años de reconstruir en poco tiempo las largas cuatro fases por las que supongo que va pasando toda ciencia del pasado o del futuro: la acumulación de logías y grafías, como serían la Cronología y la Cronografía para la vivencia del tiempo y la Topología y la Topografía para la vivencia del espacio, para avanzar luego en el desarrollo de las métricas o las metrías, para refinar la Cronometría y la Topometría. Esas tres etapas nos permitirían establecer las regularidades, patrones, esquemas, leyes o nomías, que configurarían, en nuestro caso, la Crononomía y la Toponomía. Así se avanzaría en una Cronotoponomía del futuro.

Mi conjetura actual y mi apuesta de vida en los pocos años que me queden, es que en ese esfuerzo de el avance de la tercera a la cuarta fase del Programa Cronotopía, que consiste en ir

perfeccionando las metrías para pasar a la síntesis de las nomías con la ayuda de las tres Teorías Generales —la de Procesos y Sistemas, la de Modelos y Teorías y la de Representaciones e Interpretaciones— podrían sistematizarse todas las ramas de lo que ahora llamamos las matemáticas, la lógica, la teoría de la información y las físicas matemáticas, tanto las clásicas como las relativistas y las cuánticas, incluyendo en ellas la cosmología o astrofísica.

Pero no es tanto el resultado esperado, tal vez inalcanzable, sino es el proceso mismo de aprender y disfrutar de las matemáticas el que me ha venido enseñando cada vez más a mi, y me ha llevado a enseñar cada vez menos a los niños y a las niñas.

Esa actitud de no enseñar sino diseñar y guiar actividades o situaciones didácticas que lleven a que los estudiantes pasen al momento adidáctico en donde se apropian del control y el disfrute de la actividad de aprender me ha permitido disfrutar y aprender muchísimo con los niños y las niñas y los maestros y maestras del proyecto de fracciones de la Universidad del Norte con el patrocinio de la empresa *Promigas*. Los niños y las niñas nos sorprendieron a maestros y maestras —y a mí como su guía turístico— señalándonos dos tipos de animales de un zoológico mental entretenidísimo: los números gordos y los números flacos, y luego otros dos tipos: los números quietos y los números monstruos, de los cuales también hay varias especies, como los monstruos achicadores y agrandadores que yo ya conocía, y los monstruos empujadores que yo no conocía. Para mi sorpresa, los niños y niñas de Barranquilla me devolvieron inopinadamente a la distinción pitagórica sobre los números en reposo y los números en movimiento y me señalaron una nueva especie de números monstruos equivalentes a los enteros Z tomados como operadores activos que empujan trenes de cubitos sobre una línea recta graduada dibujada en una mesa. Sobre estos cuatro tipos de animales mentales estoy terminando mi primer libro que puede llamarse *product* de esta investigación del Programa Cronotopía: se titula “El Zoológico Numérico”.

Pero prefiero terminar aquí la conferencia, dejándoles la expectativa de comenzar cada uno de ustedes su propio Programa Cronotopía, por ejemplo, visitando cada uno, ojalá con algunos niños y niñas clarividentes, su propio Zoológico Numérico mental, como si nunca hubieran sabido la variedad de monstruos maravillosos que nos habíamos perdido, y explorando con confianza y admiración sus propias creaciones mentales cronotópicas.

¡Que las disfruten!

Carlos E. Vasco