



Construcción y deducción de la fórmula del plano tangente a una superficie apoyado en GeoGebra 3D

Reiman **Acuña** Chacón
Instituto Tecnológico de Costa Rica y Universidad de Costa Rica
Costa Rica
reiacuna@itcr.ac.cr,
Bolívar **Ramírez** Santamaría
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

Resumen

La obra aquí consignada detalla la elaboración de un taller en el que se utiliza el software GeoGebra 3D para la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas). La propuesta del trabajo se desarrolla por medio de una guía impresa o digital a dos columnas, en la cual los participantes postularán paso a paso el diseño de diferentes ejercicios junto con la ayuda de los facilitadores. Se concluye haciendo un análisis constructivo del trabajo realizado y la ponderación de limitaciones o recomendaciones por parte del público participante.

Palabras clave: GeoGebra 3D, planos tangentes, tecnología, recurso didáctico, superficies.

Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática es bien conocido el paquete computacional GeoGebra que, desde su lanzamiento, ha tenido un enorme auge como un recurso didáctico al combinar elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística. Más recientemente, este software ha ofrecido una vista geométrica en tres dimensiones, la cual puede estar sujeta a experiencias pedagógicas provechosas y de gran valor en la enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, Madrid (2015) indica que las diversas ventajas de GeoGebra "... han motivado su utilización durante los últimos años en numerosas experiencias en el aula en distintos niveles educativos para favorecer la comprensión de distintos contenidos..." (p. 32). Aunado a ello, los profesores concuerdan que el software desde su interfaz en 3D facilita el

aprendizaje sobre objetos tridimensionales, permitiendo un mayor éxito en el proceso de generar nuevas estructuras cognitivas en los educandos (Baltaci y Yildiz, 2015).

En fin, este software de geometría dinámica permite manipular de forma virtual superficies en tres dimensiones, lo que favorece el razonamiento matemático por medio de los modelos visuales, beneficiando el aprendizaje significativo.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, si se revisan textos y cursos universitarios que estudian temas relacionados al cálculo diferencial en varias variables, es casi una constante que se toquen contenidos a fines a planos tangentes a superficies, pero desde una perspectiva algebraica y simbólica, dejando de lado la parte visual.

Por lo anterior, este taller tiene como objetivo la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas) apoyado en la visualización por medio del software GeoGebra en tres dimensiones.

Aspectos Teóricos

Una adecuada práctica visual en el proceso de enseñanza y aprendizaje para ciertos contenidos de Matemática puede contribuir a mejorar la comprensión de estos, además que permite indagar y profundizar más lo estudiado (Rojas y Esteban, 2012). Bajo esta premisa, no simplemente se trata de ver, sino que la persona quien aprende, sea capaz de representar, modelar, transformar, razonar, documentar y comunicar la información visual en su pensamiento y lenguaje.

De hecho, desde hace más de 20 años existen especialistas en Educación Matemática que han insistido en una buena visualización en aquellos contenidos que lo ameriten. Así lo menciona Hitt (1998), al escribir que “Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de nuevas tecnologías que permitan dar significado concreto a las nociones matemáticas” (p. 42).

Abonado a ello, el uso correcto de la visualización por medio de algún paquete computacional, además de estimular el razonamiento matemático, posee un carácter motivador, ya que promueve el interés hacia los temas estudiados y es un mecanismo efectivo para salir del aprendizaje memorístico y repetitivo (Rojas y Esteban, 2012).

Dado lo anterior, es necesario facilitar la comprensión de un concepto matemático con ayuda de una imagen visual, que puede ser aportada por alguna herramienta informática, y que a su vez permita hacer relaciones y conversiones entre la parte gráfica y la parte algebraica, insistiendo que “El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas” (Gatica y Ares, 2012, p. 105).

Dado lo anterior es imperativo buscar “... herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorece actividades de manipulación” (Gatica y Ares, 2012, p. 93), siendo el uso de GeoGebra 3D un excelente insumo para este fin, ya que brinda a los educandos una visualización más clara y por ende permite una mejor comprensión (Mora, 2018).

De la página oficial de GeoGebra¹, se lee explícitamente

¹ Consultar en <https://www.geogebra.org/about>

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

En este punto, y como se escribió brevemente en la introducción, el uso adecuado de GeoGebra es sumamente beneficioso en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, principalmente en los procesos de visualización, por lo que enfatizar más en ello es reiterativo. Lo novedoso es su interfaz en tres dimensiones, la cual es un instrumento que se puede explotar pedagógicamente aún más.

Por otro lado, y por la naturaleza de este taller y para efectos del mismo, es un menester tener claro las definiciones de los conceptos matemáticos que se van a manipular:

- Las cuádricas son superficies cuadráticas, de las cuales se usarán las más elementales y con ecuaciones sin términos mixtos, es decir, que representan superficies no rotadas. Entre ellas: el elipsoide, el paraboloides hiperbólico, el hiperboloides de una hoja, el hiperboloides de dos hojas y el cono.
- Se llama plano tangente a una superficie S en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P .
- Al punto $P \in S$, definido anteriormente, se le llama punto de tangencia.

Metodología del taller

Para el abordaje de este taller es necesario que el participante tenga los siguientes conocimientos previos:

- Nociones de cálculo diferencial e integral en varias variables, específicamente, que pueda calcular el gradiente para una superficie dada.
- Nociones de álgebra lineal, específicamente, geometría vectorial, donde pueda calcular la norma de un vector, el producto punto y sepa definir un plano vectorialmente.

Para efectos del taller, las nociones anteriores se pueden consultar en Pita (1995) y Mora (2017). Por otro lado, es importante advertir que la naturaleza del taller consistirá en generar un conocimiento didáctico a docentes como a estudiantes en el área de la Educación Matemática, por medio de la herramienta tecnológica descrita, con el fin de realizar clases amenas y comprensibles. De igual forma, cualquier interesado en el área puede proveerse de ideas para esta actividad.

Con esto, el modelo de este taller es pedagógico. De acuerdo con Alfaro y Badilla (2009), el taller pedagógico se considera como una modalidad didáctica que permite compartir diferentes experiencias académicas, intercambiar criterios, conocimientos e ideas entre los participantes. Dentro de éste se permite realizar diversos ejercicios y actividades, que permitan un proceso de enseñanza y aprendizaje, y que deben ser previamente planificadas, de tal forma que los participantes “aprendan haciendo” y construyan sus propios significados, lo cual conlleva a la validación de sus procesos cognitivos.

Así, el taller estará caracterizado por momentos (o etapas) que permitan abordar la importancia del tema. De esta manera, se desarrollarán tres momentos en el mismo.

El primero consiste en hacer una breve explicación del GeoGebra 3D; esto es, el uso de las herramientas básicas y la construcción de algunas superficies y planos, como se muestra en la Figura 1.

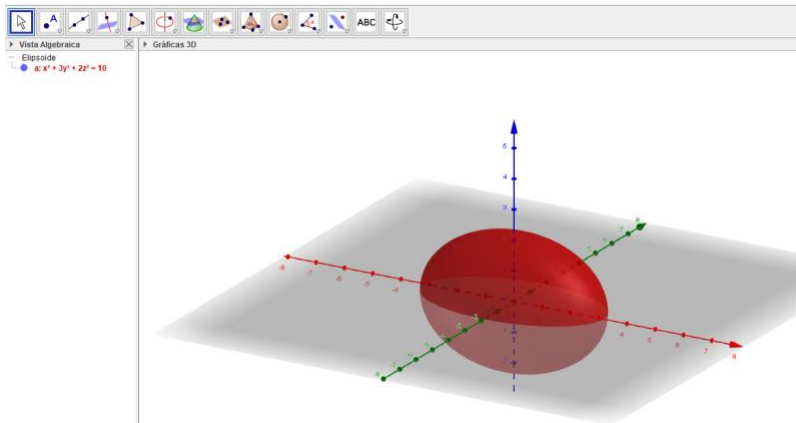


Figura 1. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

El segundo momento de este taller consiste en el uso de una guía. Esta guía contiene una serie de ejercicios en los cuales, para cada uno, existen dos columnas. La primera columna debe llenarse con las instrucciones algebraicas para la deducción del plano tangente y la segunda columna se llena con imágenes recortadas del GeoGebra 3D de su visualización. Ver Figura 2.

1. Determinar el plano tangente a la curva $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 10$

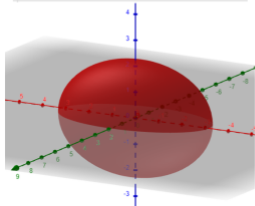
<p>Paso#1:</p> <p>Dibujamos la superficie</p>	<p>a: $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 10$</p> 
<p>Paso#2:</p> <p>Definimos la función $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 10$</p>	<p>$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 10$</p>
<p>Paso#3:</p> <p>Determinamos el gradiente de la función F</p>	

Figura 2. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

En tal caso, habrán tantos recortes como pasos necesarios para lograr la deducción. Realizado esto, se usará el GeoGebra 3D para animar mediante un botón la aparición del texto y, simultáneamente, la aparición del plano tangente a la superficie dada. La Figura 3 muestra la idea final de lo que se desea hacer.

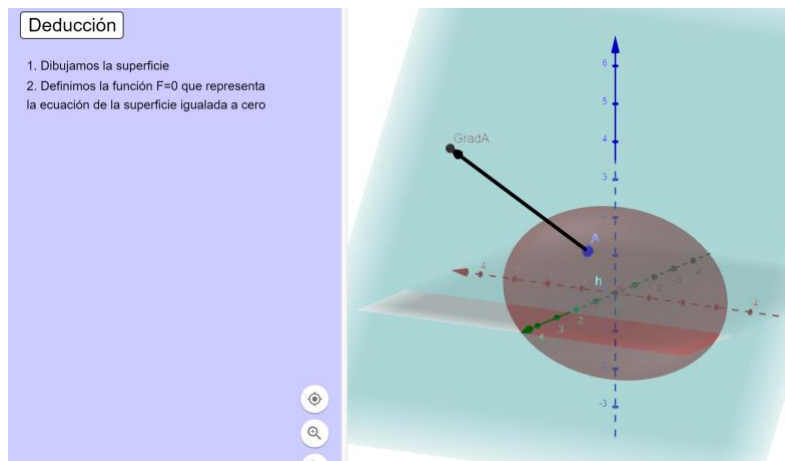


Figura 3. Deducción del plano tangente en GeoGebra 3D. Paso a paso.

Para el tercer momento de este taller los participantes junto a los facilitadores realizarán un análisis del trabajo documentado mediante un cuestionario, el cual será brindado por los autores del taller. Con esto, se da término a la actividad en el tiempo dispuesto para dicha sesión.

Es importante considerar que “ la implementación de tecnologías que permitan a los estudiantes ser diseñadores activos mediante el uso de programas, aplicaciones y demás, facilita que desarrollen mejor las habilidades de comprensión en todos los campos del conocimiento al que se expongan” (Caro, 2015, p. 739) por lo que la vinculación de la tecnología al taller pedagógico exhorta un control y flexibilidad sobre los tiempos en relación al alcance de las deducciones que se produzcan.

Conclusiones

El desarrollo de este taller permite reflexionar a los partícipes sobre la implementación de actividades didácticas, donde se utiliza GeoGebra en tres dimensiones, y sus bondades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos donde la visualización es un componente pedagógico significativo.

Asimismo, la experiencia de abordar el taller es una forma de exhortar a la comunidad docente en Matemática para buscar nuevos tratamientos metodológicos en temas que así lo requieran, donde se haga un uso reflexivo y adecuado de las tecnologías de información y comunicación, como es en este caso, GeoGebra 3D.

Referencias y bibliografía

- Alfaro, A. & Badilla, M. (2009). *El taller pedagógico, una herramienta didáctica para abordar temas alusivos a la Educación Ciudadana*. Proyecto de investigación: Conceptualización y percepción de la Educación Cívica por parte de los docentes de Estudios Sociales y los y las estudiantes de décimo y undécimo años de la Enseñanza Media. San José, Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.
- Baltaci, S. & Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 10(1), 12-17.
- Caro, A. (2015). Introducción a la Geometría 3D con GeoGebra 5.0. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 738-742.

- Gatica, S. & Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Matemática y TIC*, 1(2), 88-107.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, 10(02), 23-45 .
- Madrid, M. (2015). Enseñando geometría: GeoGebra en 3D en la formación de maestros. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, 32(2), 31-38.
- Mora, L. (2018). Parametrizaciones de curvas y superficies: Construcción de sólidos con GeoGebra 3D. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 19(1), 1-18. doi: <https://doi.org/10.18845/rdmei.v19i1.3852>
- Mora, W. (2017). *Cálculo en varias variables. Visualización interactiva*. (1er. Ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado de <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/CalculoEnVariasVariables/CDF2017-Internet-WMora-ITCR-CalculoVariasVariables.pdf>
- Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. (1er. Ed.). Juárez: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.
- Rojas, L. & Esteban, V. (2012). Geogebra y Applets Aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Simposio Ibero americano de aplicaciones y tecnologías de la información y comunicación.