# Um curso presencial sobre o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em Matemática

Rosemeire de Fátima **Batistela**
Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana
Brasil
rosebatistela@hotmail.com

**Resumo**

Nesta oportunidade apresentamos um curso que trata do teorema da incompletude de Gödel (TIG) direcionado para estudantes de licenciatura em Matemática. Consideramos que o conhecimento deste teorema é importante e significativo para professorandos e requer atenção da comunidade da Educação Matemática, dado que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática. Este teorema não é elencado entre os conteúdos a serem trabalhados neste curso de licenciatura, porém, ressaltamos a importância do conhecimento de aspectos deste resultado pela parte dos que se qualificam para o ensino de matemática na Educação Básica uma vez que ele explicita as limitações a que está sujeito o método axiomático com o qual a Matemática é produzida.

*Palavras chave*: teorema da incompletude, Kurt Gödel, ensino de matemática, forma/ação de profesores, profesores de matemática, licenciatura em matemática, educação matemática, proposta pedagógica, curso presencial.

## Apresentação

Em geral o TIG, que diz da incompletude de grande parte das teorias matemáticas, quais sejam, as que tenham na base os axiomas da aritmética dos números naturais de Giuseppe Peano (1858-1932)[1] em sua formalização, não é ensinado em cursos que qualificam professores para o ensino de Matemática na Escola Básica no Brasil.

[1] Também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano, pois Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano em 1889 publicou uma versão mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de axiomas no seu livro, "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*). Desde então, esse conjunto de axiomas vem sendo usado da forma

Em Batistela (2014) está exposta nossa argumentação a respeito da importância do ensino deste teorema para professores de matemática, pois, por meio dele é que a Matemática deu-se conta das limitações em seu modo de produção. Uma vez que a principal função de um professor de Matemática seja ensinar o estudante a pensar e a pensar de modo matemático é imprescindível que este aspecto da Matemática seja considerado e tratado em cursos de licenciatura.

Nosso arrazoado em Batistela (2014) é pela defesa de um trabalho matemático filosófico que trate junto a professores de matemática sobre essa dimensão da matemática que vai além da comumente considerada por professores da Escola Básica, que é a utilidade da matemática e a possibilidade de contextualização dos conteúdos matemáticos no cotidiano. Temos consciência que o trabalho que prioriza essa contextualização, somente, é realizado na maioria das vezes com a crença de que essa proposta poderá, entre todas as que conhece, ser a mais produtiva em termos de aprendizagem dos alunos. Porém, essa ocorrência parece predominar na Escola Básica e tem-se em cursos de licenciatura em Matemática estudantes que passaram vários anos na escola vivenciando esta prática e no momento da forma/ação[2] de professores precisam ser apresentados à outros aspectos da Matemática que não somente o da matemática que pode ser contextualizada no cotidiano e que virá a ser ensinada na Escola. Segue uma reflexão sobre a relevância de tangenciarmos em cursos de licenciatura resultados que mostrem a Matemática para além daquela que se ensina na Escola e que se utiliza nas práticas cotidianas:

> Um olhar pragmático e sem reservas permite-nos afirmar que de todos os assuntos ensinados na escola na disciplina Matemática, a usabilidade se dá nas quatro operações e algumas partes da geometria e somente agrimensores utilizarão diretamente a geometria aprendida na escola em seu ambiente de trabalho. As demais profissões, inclusive as da área de exatas, têm como objeto de ensino outros aspectos da Matemática, cuja relação com a Matemática ensinada na escola é um fio quase invisível. Batistela (2014, p. 8-9).

O conhecimento do teorema da incompletude de Gödel possibilita uma imersão na realidade do sistema formal da Matemática e no âmbito do ensino de Matemática isso pode afastar o mito cultural de que a Matemática tem resposta correta para tudo, e, também, enfraquecer a visão de que a Matemática tem as rédeas da situação de produção de verdade. Uma visão de Matemática desprovida do conhecimento dessa limitação do método axiomático carrega consigo a ideologia da superioridade desta disciplina entre as demais disciplinas escolares.

Em Batistela (2017) apresentamos uma possibilidade de trabalho com o TIG em um curso de licenciatura de forma que aspectos deste resultado sejam abordados em conexão com outros que constam nas ementas de algumas componentes curriculares. Durante a análise para a elaboração da proposta pudemos compreender que há níveis distintos de possíveis compreensões e de ensino do TIG e a compreensão de uma demonstração dele requer conhecimento e trato com determinado ferramental dessa ciência. A demonstração original de Gödel não se entrega facilmente a um leitor sem familiaridade com lógica matemática. Porém, há várias

---

como foram criados. Os termos indefinidos são três: ‘número’, ‘zero’ e ‘sucessor imediato de’ e os axiomas são cinco: i) zero é um número; ii) o sucessor imediato de um número é um número; iii) zero não é sucessor imediato de um número; iv) não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato; e v) (que formula o princípio da indução matemática) qualquer propriedade pertencente a zero e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade pertence, a todos os números.

[2] Pode-se ver mais sobre forma/ação do profesor de matemática em Bicudo (2013). Aqui “forma/ação está sendo compreendida como um processo contínuo e ininterrupto de devir em que *forma* e *ação* estão sempre em mudança, em transformação e estão implicados mutuamente, em marcha, em movimento de acontecer junto à matéria, de ir sendo, de mover-se continuamente...”, conforme Batistela (2017, p. 3).

demonstrações realizadas posteriormente e entre elas as que se valem de recursos e de uma cultura matemática mais atual, as quais acreditamos que sejam mais acessíveis, é o caso da demonstração explicitada em Shoenfield (1967) no capítulo que trata de incompletude e indecidibilidade de teorias. No âmbito das várias demonstrações do TIG, que objetivam ser acessíveis aos não especialistas no ferramental lógico matemático, a ilustração da demonstração original de Gödel realizada por Nagel e Newman (1973) se destaca pela possibilidade de imersão nas ideias da demonstração original de Gödel que o estudo proporciona.

O curso que aqui apresentamos é dirigido à estudantes de licenciatura em Matemática no horizonte de possibilidades da Educação Matemática e por assim ser considera que esteja dialogando com pessoas que apresentam familiaridade com o ferramental matemático, pois este campo de conhecimento pressupõe o conhecimento da Matemática.

A palavra *horizonte* diz respeito àquilo que é visível em um campo aberto à compreensão, desde onde se está até o alcance de nossa mirada perceptiva, aqui entendida como "espiritual", ou seja, da clareza do nosso entendimento. Desse modo, *horizonte de possibilidades* revela o campo de possibilidades do que pode ser compreendido, pois não se pode determinar como e o que será compreendido pelos sujeitos cognoscentes. Neste trabalho, o *horizonte* da Educação Matemática expõe possibilidades de compreensões do teorema como dado, focando sua demonstração, sua inserção histórica no âmbito da Matemática, a importância da axiomatização na produção matemática e outras compreensões que a questão da incompletude dispara.

## Das ideias que compõem o curso para o ensino do TIG

No âmbito de nossa compreensão, de que há vários níveis possíveis de se trabalhar com o TIG com alunos de graduação em Matemática, desde uma discussão do enunciado, sem entrar nos detalhes da prova, até, por exemplo, uma discussão que abranja uma demonstração formal e a discussão das ideias utilizadas nela, apreendemos que o trabalho com a demonstração do TIG abordando todos os detalhes deste teorema demandaria muita maturidade e por isso optamos por trabalhar com a ilustração da demonstração do TIG realizada por Gödel trazida em Nagel e Newman (1973).

Distinguimos que a formação cultural matemática de um professor solicita que estes professores em forma/ação tomem contato com o TIG, o qual diz das possibilidades de ser da própria Matemática e da distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática.

Em Batistela (2017) apresentamos que tratando-se de um resultado que é provado no âmbito da *aritmética de Peano*, poderia ser referenciado nos momentos em que este assunto estiver sendo focado. Da mesma forma, a ideia de resultado que anuncia impossibilidades (e possibilidades também) conecta-se até certo ponto com *os problemas clássicos da Antiguidade* (a quadratura do círculo, trissecção de um ângulo qualquer, duplicação do cubo), com o teorema de Abel sobre a impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais, entre outros. O TIG, que anuncia a impossibilidade da solução positiva do segundo problema de Hilbert o qual solicitava a demonstração, na própria aritmética, da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Este fato que repercute na impossibilidade da realização do seu programa original, pode ser apresentado junto aos demais teoremas de impossibilidade e, ao mesmo tempo, diferenciando-o, por ser um resultado de impossibilidade da metamatemática.

O TIG aparece num momento histórico em que a Matemática vinha passando por tentativas de fundamentação em diferentes bases. As escolas intuicionistas e logicistas, cada uma pelo seu motivo, tinham fracassado na realização completa do objetivo idealizado. Os formalistas seguiam em pé, mas o resultado de Gödel de 1931 dá a última palavra que decreta a impossibilidade do intento originalmente concebido por essa escola. Esse assunto, *as correntes filosóficas que buscaram fundamentar a Matemática*, costuma ser tratado em cursos de Licenciatura e vislumbramos que este seria também uma ocasião de apresentação do TIG, pois ele aponta a impossibilidade de se fundamentar a Matemática completamente sob a base da aritmética, que era o objetivo dos formalistas. Este resultado reverbera também sob as ambições e expectativas de a Matemática ser uma ciência absoluta que produz e prova, simultaneamente, todas as suas verdades.

Outra ocasião oportuna julgamos que seja em situações de ensino em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas. Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

O tema da criação das *geometrias não-euclidianas*, por ser um resultado que diz sobre a relatividade de verdades matemáticas em relação aos axiomas do sistema, também mostra que tais verdades são restritas aos axiomas da teoria. Isso desmente a concepção de que a Matemática é uma estrutura única e totalizante, assemelhando-se à mensagem do TIG, quando afirma que haverá verdades matemáticas que não são deduzidas dos axiomas da base da teoria e que não podem ser provadas naquela teoria.

Entendemos que cabe fazer dessas conexões temáticas percebidas uma oportunidade de abordagem e discussão das ideias do TIG para professores em forma/ação.

A fenomenologia considera imprescindível que os estudantes em forma/ação em cursos de licenciatura em Matemática vivenciem experiências com o objeto matemático as quais ofereçam oportunidade que os conduzam ao pensar matematicamente, trabalhando com intuições[3] e, também, com o método axiomático dedutivo, além de compreenderem as aplicações dessa ciência e situações contextualizadas no mundo sociocultural em que a Matemática é importante. Desse modo, o curso proposto arquiteta experiências estruturadas

## Do curso em si

A partir do afirmado acima a proposta prevê a abordagem do TIG conectando-o com os seguintes temas: teorema fundamental da aritmética (que garante o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel realizada por Gödel em sua demonstração do TIG); Geometrias não euclidianas; Problemas clássicos da Antiguidade; e, problema 2 de Hilbert.

Este tratamento é elaborado para ser realizado de forma intelectualmente honesta no sentido de oportunizar ao graduando conhecê-lo, vivenciando o resultado em sua dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração, em

[3] A intuição revela-se para nós como uma fonte originária de doação de conhecimento. Fontana (2007, p. 168) afirma que "a fenomenologia husserliana recoloca a intuição como conhecimento evidente e racional plenamente capaz de alcançar o plano ontológico fundador de todo fenômeno". Intuições aqui significam tanto as sensoriais como as essenciais.

diferentes aspectos durante o curso avançando em complexidade e culminando no trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel.

No que se refere ao trabalho com uma demonstração do TIG, Ferreira e Santos (2015) constatam que o trabalho com provas e demonstrações, de modo geral, em sala de aula contribui para o desenvolvimento de uma forma de pensamento que aprofunda o entendimento matemático e, além disso, aprimora a argumentação natural do homem. Dessa forma e por nossa experiência pessoal com a demonstração do TIG compreendemos que o trabalho com uma demonstração do TIG pode aprofundar o entendimento dos estudantes sobre a incompletude da Matemática.

Trazendo em mais detalhes, o curso tratará de alguns aspectos que podem ser antevistos, quais sejam:

Apresentar o cenário matemático presente à época do surgimento deste teorema, expondo-o como a resposta negativa para o projeto do Formalismo que objetivava formalizar toda a Matemática a partir da aritmética de Peano,Batistela, Bicudo e Lazari (2017). Além disso, trazer no contexto, as outras duas correntes filosóficas, Logicismo e Intuicionismo, e os motivos que impossibilitaram o completamento de seus projetos, que semelhantemente ao Formalismo buscaram fundamentar a Matemática sob outras bases, a saber, a Lógica e os constructos finitistas, respectivamente. Trabalhar o aspecto de que teorema da incompletude de Gödel aparece oferecendo resposta negativa à questão da consistência da aritmética, que era um problema para a Matemática na época, estabelecendo uma barreira intransponível para a demonstração dessa consistência, da qual dependia o sucesso do Formalismo e, consequentemente, a fundamentação completa da Matemática no ideal dos formalistas.

Focar na demonstração deste teorema expondo-a por meio da obra de Nagel e Newman (1973) e conduzir o leitor pelos meandros da prova desenvolvida por Gödel em 1931, ilustrando-a, bem como, as ideias utilizadas nela, aclarando a sua compreensão. Possibilitar a experiência dos estudantes com a numeração de Gödel com a qual ele realiza a aritmetização da metamatemática que viabiliza a construção da proposição indecidível.

Trabalhar uma discussão focada na proposta de Bourbaki (1950) para a Matemática, por compreendermos que a atitude desse grupo revela a forma como o TIG foi acolhido nessa ciência e como ela continuou após este resultado. Nessa exposição aparecerá que o grupo Bourbaki assume que o teorema da incompletude não impossibilita que a Matemática prossiga em sua atividade, ele apenas sinaliza que o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável.

Trabalhar algumas ideias do TIG explicando e discutindo sua mensagem, bem como os desdobramentos do TIG uma vez que entendemos que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática.

Em síntese, a proposta do curso no todo deverá apresentar que à época do aparecimento do TIG reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*[4], Hilbert

[4] Em Hilbert (2003, p. 11) pode-se ler: "O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? [...] Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (*Aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na Matemática não existe "ignoremos"!*)".

(2003), isto é, de que não haveria problema bem colocado que com o devido empenho dos matemáticos não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com o indecidível em seu TIG confere a esta ciência uma visão de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal.

Assim, posteriormente ao TIG, compreende-se que as teorias que incluem números naturais em sua formalização são constituídas por proposições demonstradas (teoremas), proposições não demonstrados (conjecturas) e proposições indemonstráveis (indecidíveis), ou seja, proposições verdadeiras que não podem ser provadas como tal (ou como não verdadeira) na teoria, ultrapassando a ideia do *ignorabimus*, vigente até então.

No bojo da proposta, focando outras decorrências do TIG, trataremos de apresentar pontos relevantes que se desdobram do resultado, destacando, a distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática bem como, a relatividade de uma verdade matemática que é restrita aos axiomas da teoria em que ela pode ser formulada. Por outro viés, a dimensão de impossibilidade (e possibilidade) que ele anuncia para o problema da prova da consistência da aritmética e a resposta final que ele, o TIG, dá às escolas filosóficas que buscavam fundamentar a Matemática sob bases firmes. Também, priorizaremos apresentar a Matemática após o TIG e como ela segue sendo construída após este revés em seu autoconhecimento.

## Considerações finais

O curso proposto visa oportunizar ao licenciando em Matemática conhecer o TIG, vivenciando este resultado e a dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração pasando pelo trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel. Este curso já foi realizado uma vez por ano na Universidade em que lecionamos.

A incompletude de uma teoria é uma consequência de seu sistema axiomático. Uma teoria consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas, os quais são derivados do conjunto de axiomas da base da teoria por meio do método axiomático. Uma vez que há um indecidível em uma teoria, sendo o indecidível uma declaração verdadeira, deduzida por um argumento metamatemático, o que fica evidente é que aquela teoria possui verdades e que ela própria não tem possibilidade de provar. Disso entendemos que, na prática, não é toda prova que pode ser reduzida aos axiomas da base do sistema, ou seja, tem-se que aqueles axiomas que estão na base do sistema formal daquela teoria não são uma coleção que dá conta de provar todas as verdades daquela teoria. Isso também evidencia que não se tem clareza sobre a coleção de axiomas que tal indecidível necessitaria para ser provado. Por exemplo, pode-se ter uma sentença verdadeira da teoria dos números expressa na linguagem da aritmética, ou seja, derivada dos axiomas de Peano, cuja prova poderia necessitar de algum axioma da topologia ou da análise complexa, isto é, pode ser que a prova da sentença necessite de algum(s) outro(s) axioma(s) de alguma(s) outra(s) teoria(s).

Gödel institui que os axiomas de Peano apenas descrevem parcialmente a teoria dos números naturais. Logo, não é todo corpo consistente de proposições que pode ser descrito por uma coleção de axiomas. O TIG diz que o corpo da teoria dos números naturais é um corpo consistente de proposições sem axiomatização recursiva. Uma vez computadas as instruções, um computador pode reconhecer axiomas e regras básicas para derivar teoremas e reconhecer se uma prova é válida. Contudo, não pode determinar se a prova para uma afirmação existe, pois, para saber isso, deve-se esperar e ver se a prova ou a negação dela é gerada. Disso, resulta que não se saberá por este método quais proposições são teoremas. Daí procede a afirmação de que o método axiomático possui uma limitação técnica.

O TIG confirma a existência de uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer Matemática, e nossa visão é que por isso ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo como se compreende Matemática e por conseguinte, à que ensinamos.

Dada a importância desse teorema, conforme pode-se ver mais em Batistela e Bicudo (2018), principalmente no que se refere à sua relevância cultural para a Matemática, entendemos que a apresentação do resultado do fenômeno gödeliano é uma informação imprescindível que deve estar presente entre os conteúdos elencados para serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática.

## Referências

Batistela, R. F. (2014, novembro). O teorema da incompletude de Gödel e os professores de Matemática. Anais do *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática,* Recife, PE, Brasil, 18. Recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD11/batistela11.pdf

Batistela, R. F. (2017). *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática* (Tese de doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3

Batistela, R. F., Bicudo, M. A.V. B., & Lazari, H. (2017). Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. 10 (3). 198-207. Recuperado de file:///C:/Users/Home/Downloads/4749-18324-1-PB%20(3).pdf. doi: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634

Batistela, R. F., & Bicudo, M. A. V. (2018). The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 33, 1-13. Recuperado de http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome33/index.html

Bicudo, M. A. V. (2013). O professor de matemática em forma/ação. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, PR, Brasil, 11.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly.* 57(4), 221-232.

Ferreira, F. A., Santos, C. A. B. (2015). Uma análise hermenêutica de pesquisas apresentadas no ICME no período de 2003 a 2013 sobre práticas e saberes docentes em atividades de provas e demonstrações matemáticas. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 6, 12-21. Recuperado de http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1030/727

Hilbert, D. (2003). Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Tradução de S. Nobre. 3, (5), 5-12. Recuperado de http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-

%20vol.3,%20no5,%20abril%20(2003)/Discurso%20Hilbert%20-%20RBHM,%20Vol.%203,%20no%205,%20p.%205%20-%2012,%202003.pdf

Nagel, E., Newman, J. R. (1973). *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. London: Publishing Company.