



Sobre el teorema de Pompeiu

Geovanni **Figueroa** Mata

Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

Costa Rica

gfigueroa@tec.ac.cr

Resumen

Se generaliza el teorema de Pompeiu a triángulos isósceles y escalenos. Se presenta la deducción de la desigualdad que describe la región \mathcal{R} del plano xy compuesta por los puntos P que satisfacen dicho teorema. Además, se caracteriza dicha región para triángulos isósceles y se presentan gráficas que ilustran los diferentes casos analizados. Para ello se usaron scripts implementados con las herramientas GeoGebra y/o Mathematica que permiten visualizar y validar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Teorema de Pompeiu, geometría plana, ley de cosenos, lugares geométricos, GeoGebra.

Introducción

En 1936 el matemático rumano Dimitrie Pompeiu (1873-1954) publicó su conocido teorema de la geometría plana (Pompeiu, 1936):

Teorema de Pompeiu

Dado un triángulo equilátero ABC y un punto P cualquiera del plano, si P no pertenece al círculo Γ circunscrito al triángulo ABC entonces con los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} se puede formar un triángulo.

La mayoría de los textos de geometría plana no incluyen este interesante resultado, pero existen muchas demostraciones y una gran cantidad de resultados se han propuesto alrededor de dicho teorema (Bényi y Casu, 2009; Sándor, 2005).

Observe que si el punto P pertenece al círculo Γ , entonces la medida de uno de los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} o \overline{CP} es igual a la suma de los otros dos. Sin embargo, para un triángulo que tenga al menos dos sus lados con longitudes diferentes, podemos escoger un punto P tal que las medidas de los Segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} no correspondan a las medidas de los lados de un triángulo. Para lograr esto basta elegir un punto P “tan cerca” como sea necesario del punto A de forma que $|\overline{CP}| > |\overline{AP}| + |\overline{BP}|$, como se muestra en la *Figura 1*.

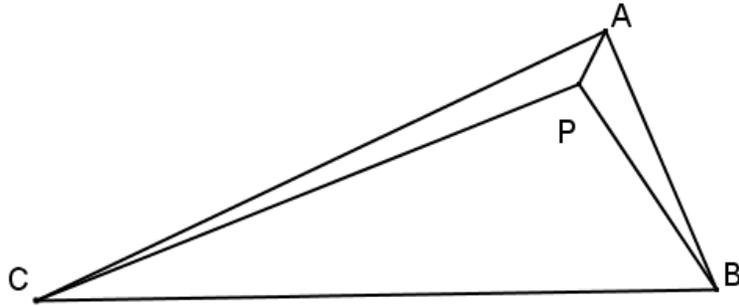


Figura 1. Punto P tal que los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} no forman un triángulo.

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Para cuáles puntos P del plano xy los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} forman un triángulo? Sea \mathcal{R} la región del plano xy que contiene a estos puntos y sea \mathcal{R}^c el complemento, es decir, el conjunto de puntos P para los cuales los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} no forman un triángulo.

En el presente trabajo deducimos una desigualdad que describe de forma general la región \mathcal{R} y caracterizamos dicha región para el caso de triángulos isósceles. El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2, se deduce la desigualdad que describe de forma general la región \mathcal{R} , en la sección 3 se deduce la desigualdad que describe la región \mathcal{R} para triángulos isósceles y en la sección 4 se caracteriza la región \mathcal{R}^c para este tipo de triángulos y por último, en la sección 5 se describe gráficamente algunos casos de la región \mathcal{R}^c para triángulos escalenos.

Caracterización de la región \mathcal{R}

Dado un triángulo CAB y un punto P cualquiera en el plano, como se muestra en la *Figura 2*, los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} forman un triángulo si y sólo si

$$|\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AP}| \tag{1}$$

$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| > |\overline{BP}| \tag{2}$$

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{CP}| \tag{3}$$

Por comodidad denotemos las longitudes de los lados del triángulo por: $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{AC}| = b$, $|\overline{BC}| = a$.

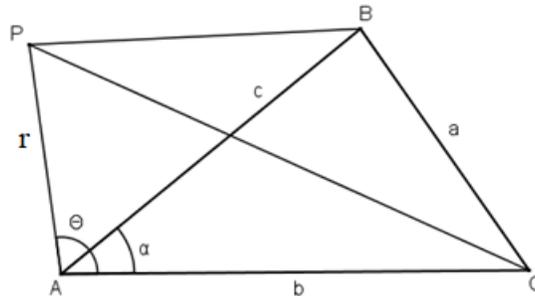


Figura 2. Los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} forman un triángulo.

Sean $\sphericalangle ACB = \alpha$, $\sphericalangle PCB = \theta$ y $|\overline{CP}| = r$ (como se muestra en la *Figura 2*), al aplicar la ley de cosenos al triángulo CPB obtenemos

$$|BP|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CB}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CB}|\cos(\theta) = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)$$

De igual forma, al aplicar la ley de cosenos, pero al triángulo CPA obtenemos

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CA}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CA}|\cos(\theta - \alpha) = r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha)$$

Con lo cual las desigualdades (1), (2) y (3) se transforman respectivamente en

$$r + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)} > \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha)} \quad (4)$$

$$r + \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha)} > \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)} \quad (5)$$

$$\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha)} + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)} > r \quad (6)$$

Se puede comprobar que cada una de estas desigualdades, al eliminar los radicales, conducen a la desigualdad (7). A manera de ejemplo, tomando cuadrados a ambos lados de la desigualdad (5) obtenemos

$$r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta - \alpha) > r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta) - 2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)} + r^2$$

Simplificando

$$2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)} > r^2 + a^2 - b^2 + 2br \cos(\theta - \alpha) - 2ar \cos(\theta)$$

Tomando de nuevo cuadrados a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b \cos(\theta - \alpha) - a \cos(\theta)) + 4r^2(b \cos(\theta - \alpha) - a \cos(\theta))^2 \quad (7)$$

Así, la región \mathcal{R} queda determinada por los puntos $P = (r, \theta)$ que satisfacen la desigualdad (7).

Región \mathcal{R}^c para triángulos isósceles

Si el triángulo CAB es isósceles, $|BC| = a = |AC| = b$ la ecuación (7) se transforma en

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)) > r^4 + 4r^3a(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta)) + 4r^2a^2(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2$$

Que simplificando obtenemos

$$r^2(3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1)) > 0 \quad (8)$$

Por lo tanto, para que la desigualdad (8) se satisfaga es suficiente que

$$3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1) > 0 \quad (9)$$

Con lo cual la región \mathcal{R} para triángulos isósceles queda determinada por los puntos $P = (r, \theta)$ que satisfacen la desigualdad (9).

El caso de igualdad en (9) corresponde a una ecuación cuadrática que podemos resolver para determinar la frontera de la región \mathcal{R} . Calculando el discriminante de dicha ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= 16a^2(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta))^2 + 16a^2 \cdot 3((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1) \\
&= 16a^2 \left(\cos^2(\theta - \alpha) + 2\cos(\theta - \alpha)\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + 3\cos^2(\theta - \alpha) \right. \\
&\quad \left. - 6\cos(\theta - \alpha)\cos(\theta) + 3\cos^2(\theta) - 3 \right) \\
&= 16a^2(4\cos^2(\theta - \alpha) - 4\cos(\theta - \alpha)\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta) - 3) \\
&\quad = 64a^2(\cos^2(\theta - \alpha) - \cos(\theta - \alpha)\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - 3/4) \\
&= 64a^2 \left(\cos^2(\theta - \alpha) - \cos(\theta - \alpha)\cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{4} + \frac{3\cos^2(\theta)}{4} - 3/4 \right) \\
&\quad = 64a^2 \left(\left(\cos(\theta - \alpha) - \frac{\cos(\theta)}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}\cos^2(\theta) - \frac{3}{4} \right) \\
&\quad = 64a^2 \left(\left(\cos(\theta - \alpha) - \frac{\cos(\theta)}{2} \right)^2 - \frac{3}{4}\text{sen}^2(\theta) \right) \\
&= 64a^2 \left(\cos(\theta - \alpha) - \frac{\cos(\theta)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\theta) \right) \left(\cos(\theta - \alpha) - \frac{\cos(\theta)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\theta) \right) \\
&\quad = 64a^2 \left(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\pi/3 - \theta) \right) \left(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\pi/3 + \theta) \right) \\
&= 64a^2 \left[-2\text{sen} \left(\frac{\theta - \alpha + \pi/3 - \theta}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta - \alpha - \pi/3 + \theta}{2} \right) \cdot -2\text{sen} \left(\frac{\theta - \alpha + \pi/3 + \theta}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta - \alpha - \pi/3 - \theta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

De donde

$$\Delta = -256a^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi/3 - \alpha}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi/3 + \alpha}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2\theta - \alpha - \pi/3}{2} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2\theta - \alpha + \pi/3}{2} \right)$$

Con lo cual las soluciones de dicha ecuación cuadrática están dadas por:

$$\begin{aligned}
r_1(\theta) &= \frac{2a(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) + 8a\sqrt{T(\theta)}}{3} \\
r_2(\theta) &= \frac{2a(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 8a\sqrt{T(\theta)}}{3}
\end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$T(\theta) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/3 - \alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/3 + \alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\theta - \alpha - \pi/3}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\theta - \alpha + \pi/3}{2}\right) \quad (11)$$

Cuando el triángulo CAB es equilátero se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, con lo cual $T(\theta) = 0$, por lo que la ecuación cuadrática asociada a la desigualdad (9) sólo tiene una solución, dada por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2a}{3} (\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) \\ r_1 &= \frac{4a}{3} \cdot \cos(\theta - \pi/6) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$r_1 = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\theta - \pi/6)$$

Observe que la expresión (12) es la ecuación de un círculo de radio $\frac{a}{\sqrt{3}}$ que pasa por el origen con centro en $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6})$, el cual corresponde al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB . Por otro lado, dado que la desigualdad (9) en este caso se reduce a $(r - r_1)^2 > 0$, todo punto $P = (r, \theta)$ del plano que no esté en Γ satisface dicha desigualdad (Figura 3), tal y como lo afirma el teorema de Pompeiu.

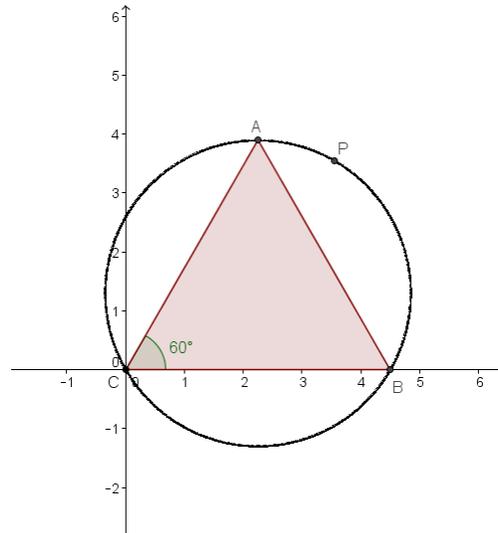


Figura 3. Región $\mathcal{R}^c = \Gamma$ para triángulos equiláteros, $\alpha = \pi/3$.

Caracterización de la región \mathcal{R}^c para triángulos isósceles

Las ecuaciones en (10) describen la frontera de la región \mathcal{R} , lo cual nos permite obtener su representación gráfica. Para esto, observe que $T(\theta)$ puede reescribirse de la siguiente forma:

$$T(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \cos(\alpha) \right) \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta - \alpha) \right)$$

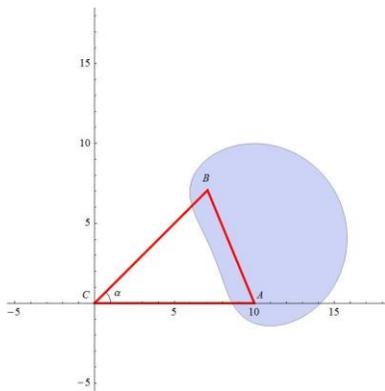
Con lo cual el signo de $T(\theta)$ queda determinado por la expresión $\frac{1}{2} - \cos(2\theta - \alpha)$ ya que

- Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, entonces $\frac{1}{2} - \cos(\alpha) < 0$
- Si $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, entonces $\frac{1}{2} - \cos(\alpha) > 0$

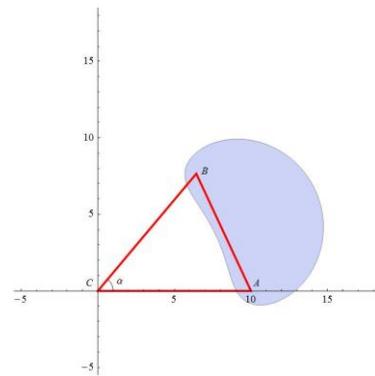
Esto no permite determinar para un valor dado de α , el dominio de $T(\theta)$ y así poder graficar la frontera de la región \mathcal{R} usando las ecuaciones dadas en (10). Esto nos lleva a distinguir dos tipos de regiones, según sea el valor del ángulo α .

Regiones \mathcal{R}^c , con $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$

La *Figura 4*, muestran la región \mathcal{R}^c para los casos $\alpha = 45^\circ$ y $\alpha = 55^\circ$ y $a = 10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma semejante a la de un “riñón”.



(a) $a = 10$ y $\alpha = 45^\circ$.

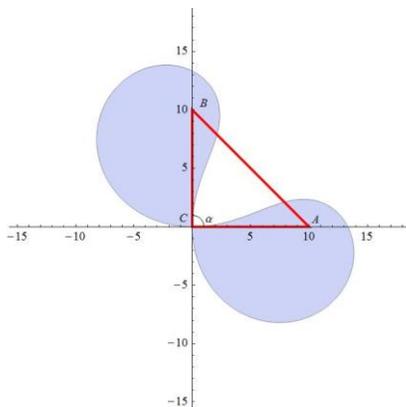


(b) $a = 10$ y $\alpha = 55^\circ$.

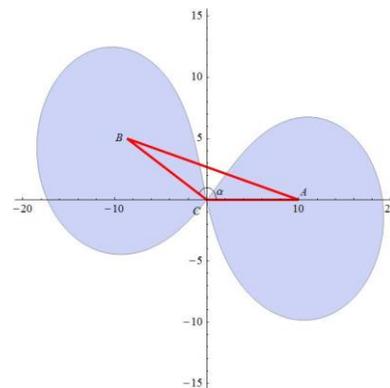
Figura 4. Región \mathcal{R}^c tipo “riñón”, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$.

Regiones \mathcal{R}^c , con $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$

La *Figura 5*, muestran la región \mathcal{R}^c para los casos $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 150^\circ$ y $a = 10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma similar a una “lemniscata”.



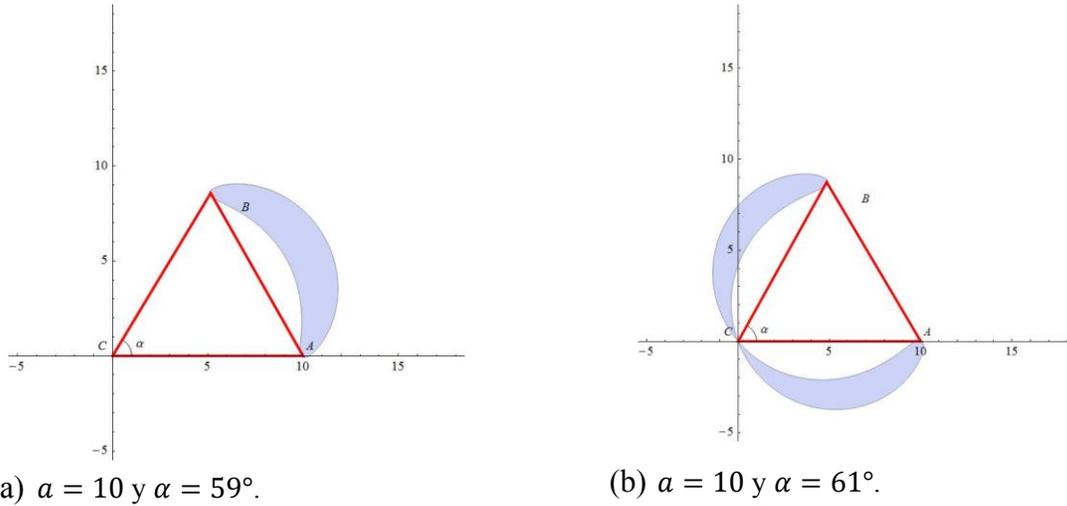
(a) $a = 10$ y $\alpha = 90^\circ$.



(b) $a = 10$ y $\alpha = 150^\circ$.

Figura 5. Regiones \mathcal{R}^c tipo “lemniscata”, para $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$.

Es interesante analizar el comportamiento de la región \mathcal{R}^c para valores frontera de α , es decir, valores cercanos a $0, \frac{\pi}{3}$ y π . Por ejemplo, cuando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}^-$ las regiones son similares a una lúnula, como se muestra en la *Figura 6a*. Cuando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}^+$ las regiones se asemejan a un par de lúnulas como se muestra en la *Figura 6b*. Estas regiones conforme $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$ convergen al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB .

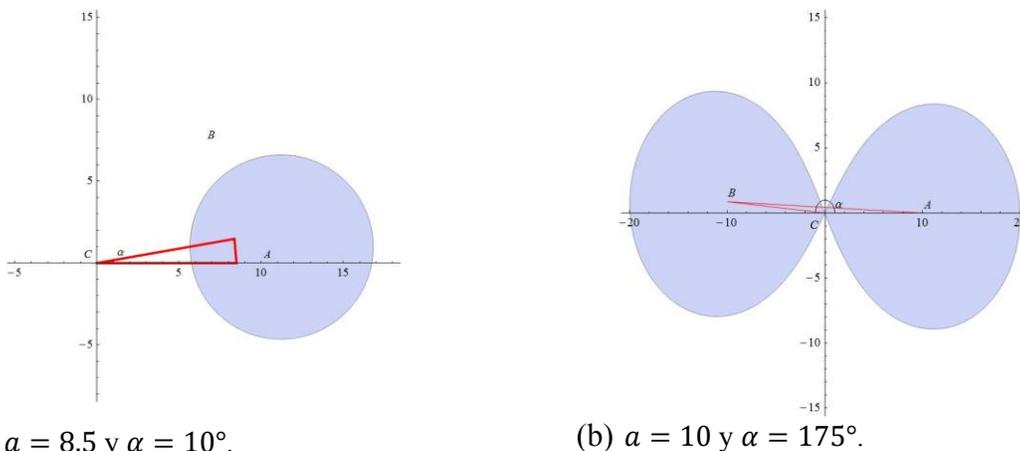


(a) $a = 10$ y $\alpha = 59^\circ$.

(b) $a = 10$ y $\alpha = 61^\circ$.

Figura 6. Regiones \mathcal{R}^c cuando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$.

Por otro lado, cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ las regiones son casi circulares como se muestra en la *Figura 7a* y cuando $\alpha \rightarrow \pi^-$ la región \mathcal{R}^c es “casi” una lemniscata como se observa en la *Figura 7b*.



(a) $a = 8.5$ y $\alpha = 10^\circ$.

(b) $a = 10$ y $\alpha = 175^\circ$.

Figura 7. Regiones \mathcal{R}^c cuando $\alpha \rightarrow \pi$.

Representación gráfica de la región \mathcal{R}^c para triángulos escalenos

Caracterizar la región \mathcal{R}^c para el caso de triángulos escalenos resulta mucho más complejo que para el caso de triángulos isósceles, pues la desigualdad (7)

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b \cos(\theta - \alpha) - a \cos(\theta)) + 4r^2(b \cos(\theta - \alpha) - a \cos(\theta))^2$$

que describe dicha región depende de un parámetro más, a saber b , la longitud del lado $|\overline{BC}|$. Pero, aun así, podemos describir gráficamente algunos casos que nos permiten tener una idea de la posible forma de la región \mathcal{R}^c , como se muestra en la *Figura 8*. Pareciera que en este caso la región \mathcal{R}^c siempre es disconexa, pero es parte de las cosas que queda por investigar.

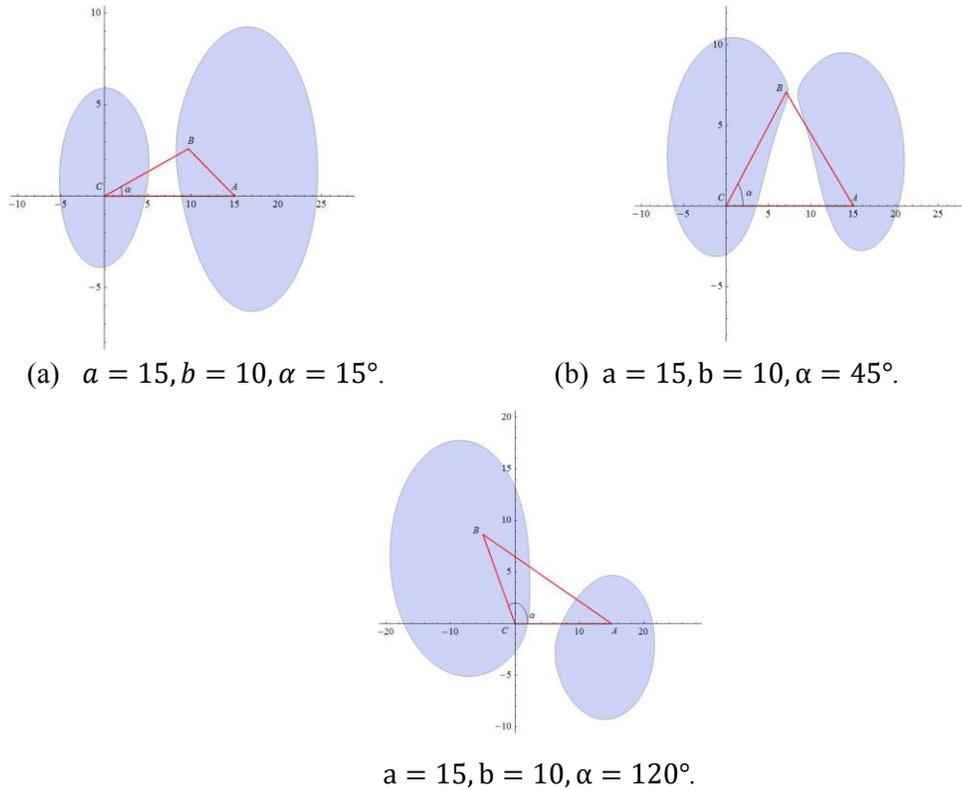


Figura 8. Región \mathcal{R}^c para triángulos escalenos.

Conclusiones

Se obtuvo una desigualdad que describe de forma general la región \mathcal{R} compuesta por los puntos P del plano xy para los cuales las longitudes de los segmentos \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} corresponden a las medidas de los lados de un triángulo, en este sentido se generaliza el teorema de Pompeiu para cualquier tipo de triángulo. En particular se logra caracterizar la región para triángulos isósceles y se presentan algunas gráficas que ilustran la región para el caso de triángulos escalenos. En el desarrollo de esta investigación ha sido fundamental el uso de herramientas como GeoGebra, Octave y/o Mathematica que permitieron visualizar y validar los resultados obtenidos, esto reafirma la importancia de incorporar este tipo de herramientas en el quehacer académico.

Referencias

- Bényi, Á., Casu, I. (2009). Pompeiu's theorem revisited. *College Mathematics Journal*, 40(4), 252-258.
- Pompeiu, D. (1936). Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire. *Bull. Math. Phys. École Polytechnique Bucarest* 6, 6-7.
- Sándor, J. (2005). On the Geometry of Equilateral Triangles. *Forum Geometricorum*, 107-117.