Enseñar en Telebachillerato el método gráfico para el sistema de ecuaciones lineales 2x2

David Alfonso **Páez**
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
dapaez@correo.uaa,mx
Teresa de Jesús **Cañedo** Ortiz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
tjcanedo@correo.uaa.mx
Daniel **Eudave** Muñoz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
deudave@correo.uaa.mx

Resumen

El estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor de Telebachillerato tiene para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método gráfico. Como marco referencial se tomó la discusión sobre el concepto de conocimiento matemático. Se reporta a un profesor como estudio de caso a profundidad, centrado en la enseñanza de la representación gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El docente fue videograbado en dos sesiones de clases con el propósito de generar una reflexión sobre su práctica docente. Los resultados muestran que este actor educativo posee un conocimiento básico para trabajar este tipo de métodos, el cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $x, y \neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Palabras clave: conocimiento, resolución de problemas, sistema de ecuaciones, análisis y reflexión sobre la enseñanza, pensamiento matemático.

Antecedentes

Uno de los problemas que interesa a la comunidad de investigadores en educación matemática, en torno a la formación y desarrollo de los profesores, es el conocimiento requerido para enseñar matemáticas (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008), por ejemplo, en álgebra. Al respecto, Doerr (2004) menciona lo siguiente:

> La investigación sobre el aprendizaje del álgebra ha tendido a enfocarse en la naturaleza algebraica de las tareas matemáticas, el desarrollo de ideas de los alumnos y, en algunos casos, en la influencia de la tecnología, pero raramente los profesores, y la naturaleza y el desarrollo de su conocimiento y práctica docente, son objetos de estudio. (p. 270)

En el presente estudio se aborda el conocimiento del profesor de Telebachillerato (TB, México) para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método gráfico, pues aunque su perfil en ocasiones es ajeno a las matemáticas tiene la responsabilidad de enseñar esta asignatura (INEE, 2015) y ello le exige tener conocimientos disciplinares necesarios (NCTM, 2014; SEMS, 2015).

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos incógnitas ha sido abordada por diversos investigadores en educación matemática (Schoenfeld, Smith & Arcavi; 1993; Sierpinska, 2000, entre otros), y se ha reportado que los estudiantes de secundaria y de Educación Media Superior (EMS) tienen dificultades para comprender y resolver este tipo de sistemas. Autores como Trigueros (2012) afirman que la mayoría de las dificultades de los estudiantes son producto de memorizar procedimientos o algoritmos sin comprender su significado; por su parte, Mora (2001, citado en Arellano & Oktaç 2009) considera que los estudiantes suelen tener dificultades para representar gráficamente sistemas de ecuaciones líneas con dos incógnitas. Para Arellano y Oktaç (2009), en los cursos de álgebra de EMS se le da más importancia a los procedimientos y algoritmos de tipo algebraico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales, dejando en menor medida las representaciones gráficas como procedimientos de solución, lo cual genera que el estudiante tenga “dificultades de interpretación al enfrentarse en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos” (p. 357).

Las dificultades relacionadas con el método gráfico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales están relacionadas con la falta de separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético (Sierpinska, 2000). Ante las dificultades que tiene los estudiantes en relación con el sistema de ecuaciones, se recomienda que el profesor debe propiciar espacios adecuados para que el alumno desarrolle este tipo de pensamientos de modo que pueda transitar de uno al otro, así como enseñar y generar reflexión sobre los diferentes métodos matemáticos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que se le dé importancia al método gráfico.

Algunas dificultades son producto de cómo se enseñan las matemáticas. Doerr (2004) asegura que existe:

> Una ineficacia del aprendizaje del álgebra como procedimiento desconectado del significado y del propósito; la mayor parte del álgebra de la escuela todavía es enseñada con tales procedimientos desconectados. […] Uno de los principales impedimentos para el cambio en cómo el álgebra es enseñada en las escuelas parece ser la falta de un cuerpo substancial de investigación acerca del conocimiento y la práctica de los profesores en la enseñanza del álgebra. (pp. 267-268)

De acuerdo con lo anterior, el presente estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor, en contextos vulnerables, como lo es en TB, tiene para resolver este tipo de sistemas mediante representaciones gráficas.

Marco conceptual

La enseñanza de las matemáticas requiere de profesores que tengan un conocimiento matemático y didáctico cuya finalidad es desarrollar un aprendizaje en los estudiantes de acuerdo con los objetivos curriculares (Ball et al., 2008; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; NCTM, 2014; Shulman, 1986). La noción de conocimiento matemático para la enseñanza hace referencia al "conocimiento […] que el profesor utiliza en clase para producir enseñanza y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374). Diversos investigadores consideran que el conocimiento matemático está relacionado con los estándares curriculares de modo que le permita al profesor identificar errores matemáticos (procedimentales, algorítmicos o conceptuales), ya sea en los alumnos o en el libro de texto, así como para usar términos o nociones relacionadas con las matemáticas, o determinar la validez de un argumento matemático y seleccionar representaciones matemáticas adecuadas (Ball et al., 2001; Carrillo, Clements, Contreras & Muñoz, 2013). Para Shulman (1986), "éste se refiere a la cantidad y la organización del conocimiento [disciplinar] per se en la mente del profesor. […] Va más allá del conocimiento de los factores o los conceptos de un dominio. […] El profesor necesita no sólo entender que algo es así; el profesor debe entender por qué es así" (p. 99).

Además, el conocimiento matemático va más allá de los estándares curriculares. Ball et al. (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas demanda un conocimiento especializado de matemática en el profesor: "Las exigencias de la labor de enseñanza de las matemáticas crean la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza" (p. 11). Por su parte, en coincidencia con Ball et al., Carrillo et al. (2013) afirman que el conocimiento matemático del profesor abarca tres dominios: a) del tema, el cual hace referencia a los significados, definiciones, ejemplos que caracterizan el tema que se aborda en la clase, b) de la estructura matemáticas, definido como el sistema integrado de conexiones que le permite al profesor comprender y desarrollar conceptos matemáticos; c) y de la práctica matemática, que se refiere a las formas de conocer, crear o producir matemáticas, en otras palabras, es la comunicación, el razonamiento y la prueba.

Metodología

El estudio aquí reportado es de carácter exploratorio sobre la práctica docente en matemáticas. Se reporta la práctica de un profesor de TB como un estudio a profundidad; sin embargo, conviene mencionar que estos datos pertenecen a un proyecto de investigación más amplio y centrado en la reflexión sobre la práctica de enseñanza, en el cual participan varios docentes. Como parte de la metodología del proyecto, el profesor, a quien hemos llamado Juan (seudónimo), fue videograbado impartiendo matemáticas en dos sesiones de clases de primer semestre de TB; para ello, el profesor determinó los contenidos matemáticos a trabajar en cada sesión (Método gráfico para resolver sistema de ecuaciones con dos incógnitas y Teorema de Pitágoras), así como las fechas de observación. El propósito de las observaciones fue tener una aproximación puntual de la actividad que ocurre en el salón de clases en contextos desfavorables, como lo es el subsistema TB en México[1]. Las videograbaciones se llevaron a cabo tratando de afectar en lo más mínimo el escenario y el contexto natural donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Stake, 1999). El análisis está centrado en identificar y describir

[1] Los TB atienden a jóvenes entre los 15 y 18 años de edad, en comunidades rurales de pocos habitantes, que por lo general tienen condiciones económicas y sociales precarias. Su plantilla docente está conformada, principalmente, por profesionales que poco o nula experiencia en docencia (INEE, 2015).

el conocimiento que el profesor implementa en cada actividad desarrollada en las sesiones de clase observadas.

Análisis de datos

En primer semestre de TB se tiene el objetivo de que los alumnos recurran a la representación gráfica como un método matemático para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que tengan la habilidad para identificar gráficamente si el sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones (SEMS, 2017, 2013). Para ello, el profesor tiene el libro de texto como un recurso principal, el cual le proporciona información para mostrar cómo funciona tal método (Cfr. Garrido, Llamas & Sánchez, 2015, pp. 290-295), o por lo menos tiene que echar mano de su conocimiento matemático para “comunicar conceptos y métodos con claridad para la solución del sistema de ecuaciones […] y ofrecer ejemplos pertinentes a la vida de los estudiantes” (SEMS, 2013, p. 39). Una muestra de esto es el profesor Juan, quien se apoya en su conocimiento para enseñar este método matemático a los estudiantes de TB.

La práctica de Juan está encaminada a enseñar el método gráfico sólo para el sistema de ecuaciones lineales (2 por 2) que tiene una solución y cuyas graficas en el plano de coordenadas cartesianas XY contengan los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, tal que $x, y \neq 0$. De modo que, de acuerdo con el desarrollo de la clase, el objetivo es obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas y las cuales satisfacen al sistema de ecuaciones, lo que para Juan es encontrar los valores x, y en el cruce de las dos gráficas:

> Profesor: *Cuando tengo dos ecuaciones de primer grado, que ya las tengo graficadas, uno de los objetivos es encontrar ¿qué?*
>
> Alumnos: *El valor de cada incógnita…*
>
> Profesor: *El valor de x, y. Entonces esos valores de x, y, cuando ya están graficadas las ecuaciones, ¿es donde se cruzan o no se cruzan?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan…, donde se cruzan para saber qué valor es.*
>
> Profesor: *¡Muy bien! Es para saber qué valor es.*

Es importante menciona que en ningún momento de la clase Juan explícita los términos *punto de intersección* o *coordenadas del punto de intersección*, sólo hace referencia a x, y como valores desconocidos o incógnitas, las cuales los define a partir de la intersección (cruce) de ambas gráficas; tal vez, eso se debe a que el interés principal de Juan es obtener los valores numéricos que satisfagan al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo, les dice a los estudiantes: “Lo que quiero es encontrar los valores de x, y. […] ¿Y esos valores que desconozco qué me representan? Los valores de x, y son los valores donde se cruzan [ambas gráficas]”.

El conocimiento matemático que muestra Juan para trabajar el método gráfico, con ecuaciones lineales, abarca dos dimensiones que interactúan entre sí: ubicar la gráfica de cada ecuación en el plano de coordenadas cartesianas y obtener las coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas.

Representación gráfica de las ecuaciones con dos incógnitas

Juan muestra que tiene un dominio acerca de la ubicación de rectas en el plano cartesiano. De acuerdo con su conocimiento, la representación gráfica de cada ecuación lineal inmersa en el sistema a solucionar se obtiene dados dos puntos sobre el plano; sin embargo, Juan considera que tales puntos son $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde las coordenadas $x, y \neq 0$, de modo que da por hecho que estos pertenecen y ubican, en el plano, la gráfica de cada ecuación. Para determinar las coordenadas x, y, Juan acude al procedimiento de igualar a cero cada incógnita de ambas ecuaciones con la finalidad de obtener, por separado, el valor de la otra incógnita (véase Figura 1); por ejemplo, para el sistema $2x + 3y = 8$ y $3x + y = 5$, Juan plantea lo siguiente:

> Profesor: *Vamos a empezar con la ecuación uno [$2x + 3y = 8$], igualar a cero el valor de x. Entonces, para cuando la x vale cero, ¿cuánto vale y [señala en el pizarrón $y = 2\,\frac{2}{3}$ (véase Figura 1)]?*
>
> Alumnos: *Dos enteros dos tercios.*
>
> Profesor: *Ya saque para x igual a cero. ¿Cuál me falta?*
>
> Alumnos: *Para y igual a cero […].*
>
> Profesor: *Ahora hay que hacer lo mismo con la ecuación dos [$3x + y = 5$]…*

Figura 1. Proceso de igualación para obtener los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$que corresponden a la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 8$.

Este tipo de conocimiento de Juan es especializado (Ball et al., 2001), pero básico para la construcción de rectas relacionadas a partir de la ecuación. Su conocimiento muestra posibles limitantes a presentarse y generar obstáculos epistemológicos, pues toda gráfica lineal se puede ubicar en el sistema de coordenadas cartesianas dados dos puntos cualesquiera [$P_1(x, y)$ y $P_2(x, y)$] (Cuevas, Mejía, Pluvinage & Zubieta, 2005); además, al trabajar sólo con gráficas que pasan por $(x, 0)$ y $(0, y)$, deja de lado la familia de gráficas lineales que intersecan en el origen del plano cartesiano [(0,0)] o que tienen pendiente cero o indefinida.

El tener las coordenadas de cada par de puntos y ubicar estos en el plano cartesiano le permite a Juan mostrar gráficamente a las ecuaciones del sistema y la intersección de éstas (véase Figura 2). Así, para el sistema de ecuaciones $2x + 3y = 8$ y $3x + y = 5$, desde su representación gráfica, el punto de intersección es (1,2).

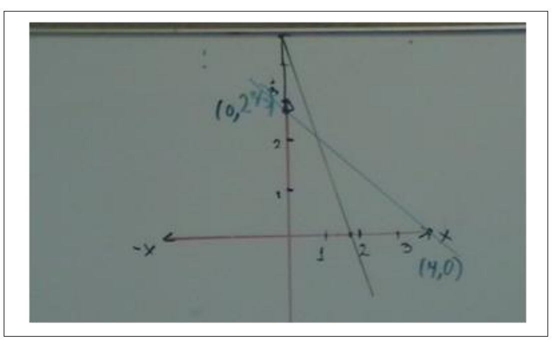

Figura 2. Representación gráfica del sistema $2x + 3y = 8$ y $3x + y = 5$ en el plano cartesiano.

En contraste con este procedimiento matemático de Juan, el libro de texto de TB plantea la *tabulación* como la estrategia para graficar este tipo ecuaciones en un determinado intervalo de valores en la variable *x*: “Para realizar el gráfico de cada una de las ecuaciones del sistema, es necesario: 1. Despejar a *y* de ambas ecuaciones; 2. Hacer una tabla para ambas ecuaciones con los mismo valores de *x*; 3. Graficar ambas rectas […] [en] el mismo plano” (Garrido et al., 2015, p. 290).

Coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas

Para obtener los valores que satisfacen al sistema de ecuaciones en la representación gráfica, Juan recurre a segmentos de rectas paralelos a los ejes del plano cartesiano (véase Figura 3). Este recurso le permite visualmente obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas, pues cada segmento de recta va del eje que le corresponde al cruce de las dos gráficas. El uso de tal recurso muestra que Juan parte del hecho de que en el eje de las abscisas y de las ordenas se encuentran las coordenadas $x = 1, y = 2$, respectivamente, y que los segmentos de recta concurren en el punto $(1,2)$, el cual hace referencia al cruce de las gráficas y, por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema:

> Profesor: *¿Qué es lo que tenemos que hacer para encontrar la horizontal, que vienen siendo el valor de la horizontal?*
>
> Alumna: *En el valor de x o y.*
>
> Profesor: *¡Muy bien!, en el valor de x, ¿pero cuál punto voy a tomar?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan [las gráficas]…*
>
> Profesor: *Este punto [*$(1,2)$*]. ¡Muy bien! Ustedes con su regla, ¿si alcanzan a visualizar que este 1 [del eje de las abscisas] viene siendo la x? ¿Cuánto vale entonces x? […] x es igual a 1, y es igual a 2. Esos serían los valores.*

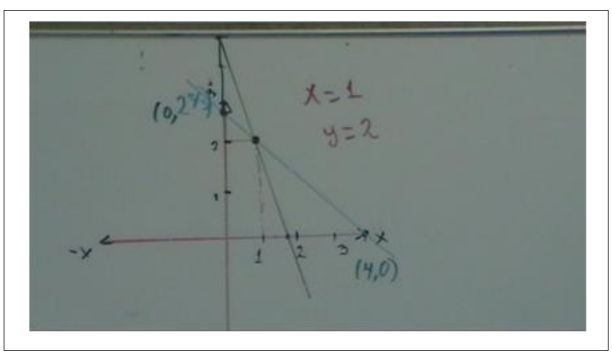

*Figura 3.*Segmento de recta como recurso para obtener los valores de las ecuaciones.

Los segmentos de recta, al ser paralelos a los ejes, le proporciona a Juan la pareja ordenada de los valores a obtener. Para ello, el argumento de usar este recurso está centrado en el diseño o trazo del plano cartesiano, donde los valores numéricos de los ejes deben estar a la misma distancia entre sí, pues como dice Juan: “¿dónde está el margen de error? En que cuando hagan la gráfica, lo hagan lo más exacto que puedan. Si están manejando la libreta de cuadritos, pues en los cuadritos que sean los números. Entre más amplio lo dejen o más grade, mejor”. Sin embargo, este argumento difiere con lo que sucede en el salón de clases, pues en algunos otros sistemas de ecuaciones Juan traza al tanteo el plano cartesiano y las gráficas correspondientes.

Conclusiones

El profesor de TB, al estar frente a grupo, y al igual que cualquier otro docente en matemáticas, se le exige poseer un conocimiento disciplinar que le permita enseñar y argumentar la matemática de acuerdo con los objetivos curriculares; sin embargo, la realidad muestra que en muchas ocasiones este conocimiento es insuficiente o difiere con lo que se espera que los estudiantes deben aprender en el salón de clases. La práctica de Juan da evidencia de que este actor educativo posee un conocimiento especializado que le permite usar y mostrar la relevancia del método gráfico para encontrar los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales; sin embargo, este conocimiento es básico en términos de cómo determinar y ubicar las gráficas en el plano de coordenadas cartesianas, lo cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $x, y \neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Aunque Juan tiene el interés de que los estudiantes vean la relevancia del método grafico como un procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones, existe una falta de conocimiento sobre la relevancia de este procedimiento gráfico, así como determinar y mostrar si el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene uno, más o ninguna solución, así como una argumentación y demostración de si $(x, 0)$ y $(0, y)$ pertenecen a las gráficas de las ecuaciones con dos incógnitas. Los resultados muestran que el profesor Juan, al igual que otros profesores de TB, requiere de una formación constante sobre el conocimiento matemático que enseñan en este subsistema de México, de modo que contribuyan a la calidad de educación.

Referencias y bibliografía

Arellano, F. & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En L. Patricia (Ed.*), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 357-365). DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Cuevas, C. A., Mejía, H. R., Pluvinage, F. C. B. & Zubieta, G. (2005). *Geometría analítica dinámica*. USA: Oxford University Press.

Doerr, H. M. (2004). Knowledge and the teaching of algebra. En S. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 267-290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Garrido, M., Llamas, L. C. & Sánchez, I. (2015). *Matemáticas I*. DF: SEP. Disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/1-semestre-2016/Matematicas-I.pdf

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. C. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge:

conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (INEE). (2015). *Los docentes en México. Informe 2015.* México, DF: INEE. Disponible en publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/I/240/P1I240.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Estado Unidos de América: NCTM.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). These who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15/29. 4-14. doi: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sierpinska, A. (2000).On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier. (Ed.), *On the teaching of linear algebra in Question* (Cap. 7, pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.doi: dOI: https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). (2013). *Matemáticas I. Serie: Programas de estudio.* Distrito Federal: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2015). *Documento base. Telebachillerato Comunitario*. México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2017). *Matemáticas I. Programa de estudio primer semestre*. Distrito Federal: SEMS.

Trigueros, M. (2012). Sistema de ecuaciones: ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje? En U. Malaspina (Coord*.), Resúmenes del VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las matemáticas* (pp. 6-7). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/02/Resumen_coloquio_2012-1.pdf

Agradecimientos

La presente investigación se realizado dentro del Programa de Investigaciones Educativas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, PIE 17-7. Agradecemos la colaboración de la doctora Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón, de la Coordinación de Telebachilleratos en Aguascalientes, de los profesores que participan en el proyecto, y de las asistentes Martha Cinthia García Gaytán y María Guadalupe Capetillo Plascencia.