XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Constitución comprensiva del objeto mental "límite matemático" realizada por estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones

Oscar Javier **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arevalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
camiloarevaloul@gmail.com

Resumen

En el presente artículo, se aborda la problemática asociada a la construcción comprensiva de conceptos matemáticos en los estudiantes; quienes fundamentan sus prácticas en la trivialización de la matemática, como su aprendizaje por imitación, repetición o memorización. Ante esta problemática, se hace necesario dar a conocer nuevas formas de llevar al aula los conceptos matemáticos, donde se privilegien prácticas significativas, como la propuesta por Freudenthal (1983), la *constitución de objetos mentales*. Desde esta perspectiva, se identifica la necesidad de mostrar mediante datos empíricos que a partir de la matematización de situaciones es posible la constitución del objeto mental *"límite"* en estudiantes de educación media. En el abordaje de esta situación, se pudo evidenciar progresivos avances en la comprensión del objeto mental por parte de los estudiantes, demostrando que es posible promover en ellos prácticas matemáticas significativas centradas en la matematización y a su vez la construcción de un concepto matemático.

Palabras clave: Resolución de problemas, objetos mentales, matematización, Educación matemática realista, Fenomenología didáctica, modelo matemático, conceptos matemáticos.

Planteamiento del problema

La comprensión significativa de conceptos matemáticos debería ser una preocupación esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Sin embargo, las prácticas actuales de los estudiantes se centran en la memorización y repetición de algoritmos, que en muchas ocasiones logran desarrollar de forma correcta, pero sin la abstracción correcta del concepto que involucra sus procedimientos, lo que implica que el estudiante haga matemáticas, pero sin comprenderlas. Respecto a esto, Balacheff (1987) señala que son cada vez más frecuentes los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos fundamentados en la "imitación", donde existe la tendencia por parte del estudiante a permanecer atentos a los distintos momentos de los que el docente dispone al solucionar un problema, encontrando la mayor necesidad o preocupación, en realizar la reconstrucción de una buena imitación, en la que el estudiante crea la falsa idea de que lo importante no es comprender, validar o justificar, sino copiar bien y repetir algorítmicamente lo que el profesor dice y hace. Esto pone en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan al relacionar el concepto matemático involucrado en una situación problema con el procedimiento que realiza al momento de darle solución.

Uno de los factores que inciden en dicha dificultad, es precisamente que las situaciones problemas que los docentes proponen a sus estudiantes para desarrollar sus habilidades en la comprensión de un concepto carecen de sentido para éste, ya sea por estar muy ligados a la misma matemática o por no ser suficientemente comprensible siquiera en su enunciación; lo que irremediablemente lleva a abandonar la esencia del concepto reemplazándola por el procedimiento, con las nefastas consecuencias que esto trae en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se hace indispensable entonces encontrar situaciones problemas que motiven la actividad autónoma por construir el concepto por parte de los estudiantes, a partir de contextos realísticos; esto es, situaciones capaces de ser imaginables y comprensibles, donde la "realidad" no se restringe exclusivamente a problemas contextualizados o ligados a la vida real del estudiante, sino a aquellas situaciones que son claras, perceptibles y accesibles para él, quien debe aprender matemáticas desarrollando y aplicando herramientas matemáticas en situaciones que tengan sentido para quien los resuelve. En este sentido, lo que se debe buscar al interior del aula, es la resolución de problemas como práctica matemática cuya actividad característica es la *matematización* (Freudenthal, 1983). Esta postura es fundamental en el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista (EMR), pues propone trabajar la matemática inicialmente como actividad humana y solo después como cuerpo cerrado de teoremas y axiomas formales. Dicha actividad es la de resolver y buscar problemas que ayuden a organizar la realidad o la matemática misma; o como lo señala su fundador Freudenthal (1983),

> *Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1983, p.7)*

Freudenthal se refería a la matematización de la realidad como la marera de organizar la matemática a partir de los fenómenos, a lo que llamo el *análisis fenomenológico*, que tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Para Freudenthal la *"Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica," (1985, p. 9).*

Desde esta perspectiva, la enseñanza clásica de las matemáticas se ha constituido en un proceso de enseñanza-aprendizaje inicial de los objetos del pensamiento, para después llegar a los fenómenos que son organizados por ellos, esto es, primero los conceptos y después las aplicaciones. La propuesta de Freudenthal, sugiere la *constitución de objetos mentales*[1] a partir de la organización de los fenómenos para los cuales ha sido creado. En este sentido, la constitución de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, que se logra solo si se alcanza una organización de los fenómenos que son medios descritos por el objeto mental en cuestión. Por lo tanto, para poder adquirir los conceptos matemáticos a través de fenómenos, es necesario un paso intermedio, la constitución de objetos mentales. En estos objetos mentales se recogen todos los significados de todos los fenómenos que están en relación con los conceptos implicados, y, de este modo se pude llegar hasta el significado del concepto. Así el objetivo principal de la enseñanza es, según Freudenthal, la constitución de objetos mentales.

Diseño y metodología de investigación

Desde el enfoque de la EMR, se manifiesta la necesidad de diseñar tareas por parte del docente en un contexto realista, entendiendo esto como situaciones problemáticas imaginables y comprensibles para los estudiantes, para lo cual pueda generarse una *actividad de matematización*; es decir, organizar o estructurar la realidad, a partir de los fenómenos en torno a un objeto mental que permitan acceder a conocimientos matemáticos formales. En este sentido, se busca una metodología de tipo cualitativo/interpretativo llamada *fenomenología didáctica* donde las situaciones deben ser seleccionadas de modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que los estudiantes deben constituir y se relacionan directamente con la finalidad del *diseño didáctico*, donde se asumen algunos elementos metodológicos y técnicos que configuran la acción de diseñar las situaciones problemas realísticas por parte del docente, a lo que desde el enfoque se le llama didáctizar.
El diseño metodológico de la propuesta se centra en la aplicación de una situación problema realístico a matematizar llamada *"el terreno óptimo*", que generen fenómenos matematizables y que sean organizados por el objeto mental de "límite matemático", y que se enuncia de la siguiente manera:

Un agricultor ha comprado un terreno y quiere usar una parte de éste para su pequeño cultivo de tomate de árbol, para cercarlo dispone de 100 metros de alambre y suficientes postes; sin embargo, desea que su producción sea la máxima posible con los recursos disponibles. Ustedes han sido contratados para diseñar el modelo óptimo para los fines del agricultor.

A esta situación se diseñan unas tareas que buscan que los estudiantes promuevan actividades de matematización, en este caso se estudiarán las primeras dos tareas que se llevaron al aula, direccionadas a constituir el objeto mental de límite matemático; de la siguiente manera:

Tarea 1: En grupos de tres estudiantes, diseñen la representación de un terreno (1cm::1m) con una lámina de icopor, tome 100 cm de lana que representarán el alambre para cercar el terreno cultivable y chinches para los postes. Use el material para hacer una representación de sus sugerencias al agricultor y diseñe el terreno cercado que a su consideración es el óptimo para mayor producción de tomates.

---

[1] Lo que Freudenthal llama *objetos mentales* es lo que Fichsbein denomina *intuiciones* y Piaget *representaciones*

Tarea 2: Realizar una exposición a manera de debate en el que se dé a conocer el diseño construido por cada grupo, justificando el porqué de su creación y atendiendo a la pregunta: ¿Por qué su diseño es el óptimo para garantizar que el agricultor obtendrá la mayor producción de tomates?

Resultados

Tarea 1:

Los estudiantes en sus respectivos grupos realizaron el diseño de un terreno cercado usando la lana (alambre) y los chinches (postes) dentro del terreno total (icopor). Cada grupo elaboró un diseño concertado y que en su opinión era el terreno óptimo para cultivar, entendiendo lo "optimo" como dependiente del área, por lo que el problema fundamental para los estudiantes era buscar un diseño de terreno que contemplara el área máxima que se podía construir con un perímetro de 100 cm, atendiendo a la pregunta, ¿Qué forma y características debe tener el terreno para que la producción de tomates sea máxima? La construcción del terreno atendía a las siguientes especificaciones:

- El terreno debe ser totalmente cerrado
- El terreno cercado debe estar dentro del terreno mayor.
- Debe usarse el total de alambre (lana) proporcionado.
- La cantidad de postes (chinches) será elección de cada grupo.
- La forma del terreno puede ser rectilínea o curvilínea.




Figura 1. Algunos diseños de terreno construidos por los estudiantes

Como se ve en los diseños de cultivo elaborados por cada grupo (Figura 1), se evidencia que los estudiantes se preocupan por obtener una superficie amplia con los recursos disponibles; es decir, su preocupación principal está en diseñar un terreno con la mayor superficie posible, con la restricción de tener un perímetro de 100 cm. Aquí surgen figuras rectilíneas y un intento por figuras curvilíneas; diseños que se entraron a discutir a manera de debate en la tarea número 2.

Tarea 2

La situación problema propuesta ofrece una variedad de estrategias de solución. Permite que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. En este caso, abre la posibilidad de discutir el grado de eficacia de las destrezas usadas. A continuación, se presenta una de las muchas discusiones entre los estudiantes a la hora de defender sus diseños. Se eligen tres casos específicos, el diseño del círculo, el del octágono regular y la figura mixta (rectilínea y curvilínea), donde se tenía por objetivo que argumentaran a favor de sus propios diseños y en contra de los demás, usando razones lógicas y convincentes para poder validar que su propuesta era la más asequible para los cometidos del agricultor:

Grupo 1: Octágono regular
Grupo 2: Circulo

Conversación

Grupo 1: Nuestro diseño es un octágono regular (mostrando su diseño) y consideramos que es el que tiene mayor área porque las esquinas forman ángulos amplios lo que asegura que se aprovecha el terreno; al contrario de lo que pasa con un triángulo o un cuadrado, donde las esquinas son demasiado cerradas. En el caso del cuadrado de 90º; tendríamos ángulos pequeños lo que implicaría una reducción del terreno y una pérdida de superficie.

Figura 2. Grupo 1 mostrando que el octágono regular tiene ángulos obtusos y que el diseño del triángulo desaprovecha superficie por tener ángulos agudos

Grupo 2: pues no creo que el octágono sea el de mayor área; porque nosotros hicimos el círculo precisamente porque creemos que entre menos lados rectos tenga la figura más superficie vamos a tener; porque lo que hacen los ángulos, sea cual sea la amplitud, es reducir el espacio del terreno.

Figura 3. Grupo 2 mostrando su diseño circular usando la mayor cantidad de postes

Grupo 1: Pues para mí entre más ángulos amplios tenga el terreno; es decir, entre más lados tenga, vamos a asegurar que los ángulos sean obtusos y por lo tanto su abertura encerrará mayor cantidad de terreno.
Grupo 1: Pero una figura que tenga solo líneas rectas y además con ángulos obtusos será un terreno que encierre mayor área.
Grupo 2: Pero en el caso del círculo no tengo lados, y por tanto no tengo ángulos, lo que asegura que estoy encerrando la totalidad de terreno que se puede cercar con 100 m de alambre.
Grupo 1: Pero ustedes en realidad no tiene un círculo, porque para obtener un círculo usted necesitaría de muchos postes y por lo que veo su cultivo tiene una cantidad de postes fija, espere y cuento 1, 2, 3, 4,…, 49, 50 (realizando el conteo de chinches del diseño circular) son como 50 chinches lo que generaría una figura de cincuenta lados.

Figura 5. Estudiante del grupo 1 haciendo el conteo de postes del diseño del grupo 2

Grupo 1: Yo creo que independientemente de la forma del terreno, todos estamos usando la misma cantidad de alambre por lo tanto tendríamos figuras de la misma área.
Profesor: Lo que usted asegura entonces, es que, dado que todas las figuras tienen el mismo perímetro de 100 m, esto implica que ¿todos tendrán la misma área?
Grupo 1: No, eso es mentira, porque por ejemplo yo hice esta operación (sacando una hoja con cálculos matemáticos) en un cuadrado de 100 cm de perímetro tenemos un área de 625 cm^2 y si tenemos otra figura como por ejemplo un rectángulo de 40 cm x 10 cm también tenemos una forma de perímetro 100 cm, pero de área 400 cm^2
Grupo 2: Si es verdad, el perímetro es independiente del área; por eso el problema está en buscar la forma que encierre la mayor área con un perímetro fijo de 100 metros.
Profesor: Como en eso estamos de acuerdo, volvamos al problema del círculo, mi pregunta es ¿Efectivamente es un círculo?
Grupo 2: pues no, pero se acerca mucho a serlo; de hecho, si tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se encierra mayor cantidad de espacio.
Grupo 1: Entonces para hacer un terreno circular necesitaríamos de infinitos postes lo cual es imposible, la forma debe ser obligatoriamente rectilínea.
Grupo 2: Pues sí, pero sin embargo el octágono no es el de área mayor, porque en ese caso podríamos hablar del eneágono o el decágono de lados iguales…
Profesor: Regular
Grupo 2: eso, el dodecágono regular tendría mayor área que su octágono.
Grupo 1: Si. En conclusión, para asegurar que el terreno encierre la mayor área posible se deben usar la mayor cantidad de postes, acercándonos a la construcción de un terreno circular.

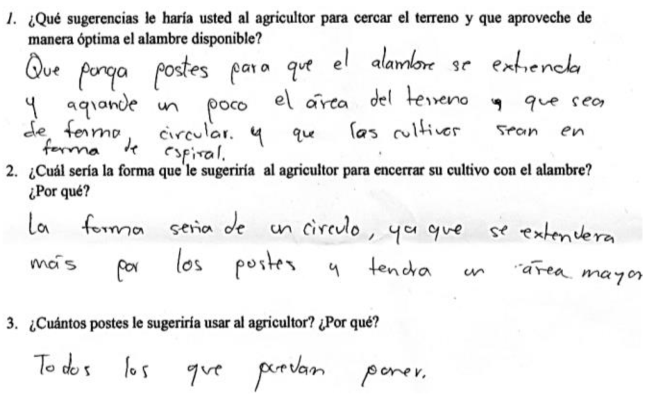
Análisis de los resultados

Como podemos ver, uno de los aspectos más relevantes es que los estudiantes logran transformar el problema inicial enmarcado en el contexto de la agricultura, en un problema matemático de optimización y maximización de áreas. En la conversación, las afirmaciones que se realizan son bastante importantes para lograr la constitución de objetos mentales y posterior abstracción significativa de un concepto matemático; por ejemplo, la conclusión a la que llega uno de los grupos <*Sí tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se acerque al área de un círculo*>, podría suponer una ayuda inicial y bastante empírica para crear modelos mucho más complejos, como el del límite matemático, donde los estudiantes reconocen que al aumentar indefinidamente los vértices o lados de un polígono regular, éste va adoptando la forma y el área de un círculo del mismo perímetro; que dicho en términos matemáticos con el uso del concepto de límite, sería equivalente a decir: .

$$\lim_{\substack{\text{Cantidad de} \\ \text{vértices}} \to \infty} \text{Área de un polígono regular} = \text{Área de un círculo}$$

<El área de polígonos regulares cuando la cantidad de vértices tienden al infinito es igual al área de un círculo de igual perímetro al polígono regular>

Este modelo que los estudiantes no enuncian de manera formal pero que al parecer por las acciones que realizan (como la de ir aumentando cada vez más la cantidad de chinches en los polígonos regulares que van construyendo hasta volverlos un círculo) y las afirmaciones que enuncian en los cuestionarios que contestan los estudiantes (ver figura 5), podrían suscitar la emergencia más comprensible de la idea de límite matemático.



1. **¿Qué sugerencias le haría usted al agricultor para cercar el terreno y que aproveche de manera óptima el alambre disponible?**

Que ponga postes para que el alambre se extienda y agrande un poco el área del terreno y que sea de forma circular. y que las cultivos sean en forma de espiral.

2. **¿Cuál sería la forma que le sugeriría al agricultor para encerrar su cultivo con el alambre? ¿Por qué?**

La forma sería de un circulo, ya que se extendera más por los postes y tendra un área mayor

3. **¿Cuántos postes le sugeriría usar al agricultor? ¿Por qué?**

Todos los que puedan poner.

Figura 5: Cuestionario diligenciado por el grupo N° 2

En este caso, podría suponerse que la situación problema enmarcada en el contexto de la agricultura brindó una variedad de fenómenos que fueron organizados por el objeto mental que los estudiantes poseen sobre límite matemático, en el que el contexto sirvió como excusa para la emergencia de un modelo más formal en los estudiantes, o como lo diría Freudenthal, el contexto usado como *"intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal." (Freudenthal, 1991, p. 34)*

Conclusiones y reflexiones

Como se puede evidenciar, los procesos de matematización que se dan en la situación problema, garantizan el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, que intenta en este caso, constituir el objeto mental de límite. Este acercamiento intuitivo del estudiante hacía el concepto formal es de gran importancia para la EMR, ya que son fundamento para garantizar que los estudiantes están reemplazando prácticas que trivializan la matemática, siendo sustituidas por prácticas más significativas. Estos procesos en los que la matemática es redescubierta o reinventada son los que tienen realmente un valor en los estudiantes, que desde la propuesta de Freudenthal sería una forma de reinvención guiada, en la que se usa el sentido común, el lenguaje cotidiano y las prácticas empíricas para redescubrirlas y comprenderlas.

> *"Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas que se transforman de nuevo en sentido común, pero en un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, como en la constitución de un objeto mental que en procesos más avanzados de abstracción llegarán a convertirse en conceptos matemáticos formales" (Freudenthal, 1991. Pág. 9)*

Aquí el docente es agente fundamental para mediar entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina. De esta manera, podemos concluir que los estudiantes presentan descriptores propios de una matematización, donde el problema es abordado desde un contexto puramente matemático, trasponiendo los resultados obtenidos en este contexto al problema del agricultor; mientras que reconocen los alcances y límites de sus descubrimientos en las implicaciones del problema original. En este proceso de matematización se hace evidente un proceso de *exploración* de diferentes modelos que posibilitan la solución del problema, abordados desde la reflexión, y finalmente se presentan procesos de formalización cuando concluyen proposiciones dentro de la matemática, aplicables a la situación misma.

En este caso, ciertos anunciamientos concluyentes que hacen los estudiantes en su discurso argumentativo cuando resuelven la situación problema, podrían considerarse aspectos que formalizan y muestran un acercamiento subjetivo al concepto de límite matemático; por ejemplo, cuando refieren que *"dos figuras diferentes con el mismo perímetro no tienen la misma área"* o *"Cuando la cantidad de vértices en un polígono regular tiende al infinito, su área se acerca a la de un círculo con el mismo perímetro del polígono regular, la cual a su vez es el área máxima que se pude construir";* son proposiciones que logran descubrir y generalizar dentro de la matemática pero que han sido suscitadas por la situación problema misma cuando trabajan en procesos de matemátización de la misma.

Referencias y bibliografía

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperado de: *http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf*

Freudenthal, H. (1983).Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. *Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001*

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular.

Narvaez, D. (2009). "Sobre la relación entre estrategias utilizadas por estudiantes de matemáticas en la resolución de problemas asociados a teoría de números y los procesos de matematización desarrollados en un ambiente de aprendizaje constructivista". *Tesis Maestría en educación, Universidad de los Andes, Centro de Investigaciones y Formación en Educación (CIFE)*

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8