XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un Modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en von Neumann

María Leticia **Rodríguez** González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx
Eugenio **Filloy** Yagüe
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
smmeef@aol.com
Bernardo **Gómez** Alonso
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia
España
bernardo.gomez@uv.es

Resumen

Este proyecto de investigación tiene como propósito diseñar un Modelo de Enseñanza, basado en la construcción de los números naturales de von Neumann. Los Modelos Teóricos Locales (MTLs) y sus cuatro componentes, son el referente teórico y metodológico para identificar y comprender las dificultades que tienen los alumnos de 6 a 9 años, con el uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) que se involucran; así como los procesos cognitivos que se promueven con este Modelo de Enseñanza. En este espacio de comunicación la atención se centra en el componente de Comunicación: la producción de sentido para la construcción de significado de las acciones derivadas de las actividades realizadas con los números naturales y sus operaciones. Se presentan los primeros acercamientos al análisis e interpretación de la experimentación, misma que servirá de diagnóstico, para hacer las modificaciones correspondientes al Modelo inicial.

Palabras clave: Modelo de Enseñanza, Modelo de Comunicación, Números Naturales.

Introducción

El aprendizaje de los números forma parte de los procesos de la vida cotidiana; también es una prioridad curricular en los primeros años de escolarización de los niños de nuestra nación. En este sentido, en México el modelo de enseñanza que propone el Plan de Estudios, precisa que "…el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición." (SEP 2011, p. 53) El libro de texto oficial para el alumno Desafíos Matemáticos (SEP, 2015), prioriza el tratamiento cardinal de los números como comparar e igualar conjuntos;

y sólo hay dos lecciones que hacen referencia al sentido ordinal, en la primera “Carrera de autos” se les pide que pinten de diferente color de acuerdo con el lugar de llegada a la meta; en la otra lección “Animales en orden” se les pide que coloquen figuras de acuerdo con el orden de selección: conejo – primero, vaca – segundo,…

La estrategia pedagógica propuesta para trabajar los “Desafíos Matemáticos” (SEP, 2015), sugiere que a los niños se les planteen como retos, organizando diferentes formas de interacción; sin embargo, lo que se observa es que los maestros los abordan como lecciones o ejercicios al estilo tradicional, de forma individual e incluso los dejan de tarea en casa, los calificándolos y asignándoles mediciones numéricas, rompiendo el sentido pedagógico de la evaluación como proceso de valoración y análisis para revisar y consensar los procedimientos más factibles y económicos e identificar las dificultades que tuvieron y cómo lo resolvieron. Cuando los profesores no siguen la secuencia gradual de los libros de texto “Desafíos Matemáticos”, rompen la progresión conceptual. Otra de las prácticas comunes que se observan es el abuso de mecanizaciones que van desde secuencias numéricas orales, escritas, ejercicios fotocopiados de libros de matemáticas que no tienen coherencia ni relación con el enfoque didáctico de la asignatura de matemáticas.

Por lo que, el interés de esta investigación está centrada en identificar las dificultades que tienen los niños, cuando se trabaja con ellos un modelo de enseñanza con la estructura formal de von Neumann y que pueda servir de base para la construcción del pensamiento aritmético. El único trabajo que se ha implementado en este sentido, es la propuesta que se viene explorando con niños preescolares con el trabajo de Maravilla (2011) y que ahora se pretende continuar en una nueva etapa con niños de los tres primeros grados de educación primaria. Se reitera, que un modelo de enseñanza con estas características nunca se ha puesto en práctica ni ha sido objeto de investigación. La estructura aritmética que se propone es la lógica de construcción de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales, sus propiedades y operaciones.

Con el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) y sus cuatro componentes este proyecto de investigación se ha estructurado de la siguiente manera: a) *Modelo Formal* de John von Neumann precisa una lógica de construcción de los números naturales a partir del orden, con los procesos de iteración y recursividad, ir construyendo el sucesor a partir del antecesor; b) *Modelo de Cognición* recupera las aportaciones de Piaget (1984) y su relación con la lógica en la construcción de número y las contribuciones de la psicología soviética representada por Galperín (1976) y Talizina (2001) con la Teoría de las Acciones; c) *Modelo de Comunicación* implica a los usuarios competentes para usar los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) involucrados en las nociones de número y; d) Diseñar un *Modelo de Enseñanza* que traslade el modelo formal a un modelo con el uso de material concreto y la recta numérica.

La metodología de la investigación es de corte cualitativo, que se desarrolla en dos momentos: a) observación experimental (diagnóstico con la participación de 3 grupos de 1º, 2º y 3º de tres escuelas primarias públicas de la Ciudad de México. Con el análisis de estos primeros acercamientos a la experiencia empírica, se pretende tener elementos para seleccionar a los niños que participarán en el estudio de casos y entrevista clínica. Lo que permitirá tener elementos a partir de la triangulación del reporte de la observación con la guía teórica y metodológica de los MTLs para continuar con lo que se propone en la segunda parte de la investigación: el rediseño del Modelo de Enseñanza. Para este texto, se presentan sólo algunos ejemplos de interpretación desde el modelo de comunicación en la producción de sentido para construir significados matemáticos.

Marco Teórico y Metodológico: Modelos Teórico Locales

Los MTLs son un marco teórico y metodológico que toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas cuando se plantean diferentes tipos de actividades que tienen que ver con la producción de sentido de mensajes matemáticos y su decodificación; su interés está en la observación en materia educativa. La observación empírica es la principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. Lo local profundiza en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitivo, enseñanza y de comunicación. Los diseños experimentales tienen la intención de analizar la información que permita comprender las dificultades a las que se enfrentan los actores en situaciones problemáticas para observar las interacciones y contraposiciones de las competencias (cogniciones) que se ponen en juego en el espacio textual; cómo se van construyendo los intertextos a través del modelo de enseñanza específico con un soporte en el modelo formal y qué competencias comunicativas usan para decodificar y codificar los mensajes, así como las dificultades o posibilidades tienen para realizar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática. La pregunta que guía esta investigación es:

¿Qué dificultades tienen los niños en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales como base el modelo formal de von Neumann?

Para este propósito se han diseñado los siguientes objetivos:

- Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.
- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de educación primaria, en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursividad; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

Estructura de este MTL para la construcción de los números naturales

Modelo de Competencia Formal. En este componente se requiere de un referente matemático abstracto, que permita describir "...las situaciones observadas por medio de un SMS más abstracto que permita decodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso de los SMS utilizados..." (Filloy, 1999, pág. 7). Para este trabajo se retoma la construcción de los números naturales propuesta por J. von Neumann, desarrollado por Hamilton & Landin (1961) como la base teórica - conceptual para diseñar un modelo concreto, con el agregado de la recta numérica como un recurso didáctico en la construcción de los números a partir del orden, retomada de la aportación que hace Maravilla (2011) para darle sentido al orden de construcción de los números naturales, así como el uso de bolsas como contenedores de los conjuntos de elementos.

Modelo de Cognición. Se pretende comprender el desarrollo de los procesos cognitivos de la percepción, atención y la memoria a corto, mediano y largo plazo, para desarrollar los procesos conceptuales que realizan los niños en la construcción de los números naturales y las nociones de la estructura aritmética.

Modelo de Enseñanza. Es una colección de textos, en que la secuencia de actividades constituye espacios textuales (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 129), para generar y modelar situaciones, el lenguaje va de concreto a abstracto, con códigos intermedios, que les permite gradualmente desarrollar habilidades matemáticas para resolver distintas situaciones o problemas. Estas habilidades matemáticas van desde los conocimientos intuitivos que ya poseen, sintácticas y semánticas que la experiencia escolar y cognitiva les va aportando. Las primeras y las segundas en nuestro caso hacen uso de la operatividad aritmética y mientras que en las últimas van acompañadas del sentido y uso en diversas situaciones problemáticas y escolares, como de la vida cotidiana. El diseño de las actividades del Modelo de Enseñanza, se realizó de acuerdo con la estructura del capítulo dos, presente en Hamilton & Landin (1961, págs. 74 – 115), quienes desarrollan el modelo formal de la construcción de los números naturales de von Neumann. La secuencia se organizó en tres etapas:

1ª Construcción de los primeros números naturales. a) el Modelo Formal se fundamenta en las definiciones de los números naturales del cero al nueve; sucesor; número natural y las relaciones de orden. b) Modelo de enseñanza – actividades concretas: construcción de los números naturales empezando por cero usando bolsas como contenedores (conjuntos), cubos, cuadrados, puntos, el cambio (construcción de la nueva unidad 10) y la recta numérica.

2ª Adición y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras. a) Modelo Formal: definiciones de las relaciones de orden, conteo (correspondencia uno a uno) y las operaciones de suma, resta y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras de suma y multiplicación. b) Modelo de Enseñanza: Secuencias numéricas, uso de la calculadora, saltos de la rana "adelante" y "atrás" en la recta numérica, construcción de las tablas de Pitágoras, contamos en diferente orden una colección.

3ª Relaciones de orden, adición, multiplicación y propiedades de las operaciones. a) Modelo Formal: definiciones de relaciones de orden, conteo, multiplicación como suma iterada, como producto cartesiano y reparto. b) Modelo de Enseñanza: Tiro al blanco, el Boliche, El artesano (operaciones de resta), los payasos (multiplicación).

Modelo de Comunicación. De acuerdo con Filloy, Puig y Rojano (2008, págs. 4 - 6) la matemática educativa se ocupa de comprender y entender cómo son los procesos de significación y comunicación que se generan en los espacios educativos, en nuestro caso, actividades relacionadas con la construcción de los números naturales. El referente que se retoma es la conceptualización del Sistema Matemático de Signos, así como la construcción de conceptos semióticos provenientes de Peirce y su relación triádica, para identificar y comprender la lógica de uso que siguen los niños en la construcción del SMS involucrados en la construcción de los números naturales, para producir sentido y significación, que les permita llegar a la abstracción.

Lógica de construcción del significado. Para fundamentar esta conceptualización los Modelos Teórico Locales (Filloy, Rojano y Puig 2008) se apoyan en la semiótica de Peirce, quien identifica en el signo y su doble y triple dimensión: acto como acción y representación; así como su relación tríadica (signo, objeto e interpretante) en la cual el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, para construir procesos de significación. Se trata de un

"...*Interpretante Dinámico*, pensamiento-signo u hombre-signo. Sólo este sujeto-significante completa una explicativa tríada genuina y permite un enfoque no dicotómico del tipo <<significado-significante>>" (Peirce 1987, pág. 11)

Signo y Símbolo. Para Peirce los procesos de significación que realiza el interpretante le lleva a generar tres premisas: el signo es una relación tríadica con la actuación del interpretante; está relacionado con la cognición "Es que la palabra o signo que el hombre usa es el hombre mismo." (Peirce, 1987, p. 8); la relación tríadica del signo no es arbitraria, es la relación entre el signo (representamen), el objeto y el interpretante. El representamen es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al signo, son los interpretantes quienes construyen el sentido y la significación a partir de la tríada signo – objeto – interpretante.

La semiótica se articula con las condiciones de verdad, "…como una teoría de la referencia y una teoría de la significación." (Peirce, 1987, pág. 9). Este proceso de significación se posibilita con la participación del interpretante. Entonces podemos afirmar que un signo y la cosa significada, son producto de la cognición producida en la mente. Siguiendo esta lógica de construcción, Peirce refiere como relación triádica: el signo como ícono es la relación del signo y la cosa.

Abducción, inducción, deducción. - En este planteamiento Peirce, conlleva a identificar otra tricotomía: los procesos de *inducción, abducción y deducción*; en el primero la *inducción* permite comprender los hechos homogéneos para clasificar, pero no explicar, busca los hechos empíricos para demostrar, prueba experimentalmente sus hipótesis, que a su vez le sugiere otras hipótesis, opera desde lo simbólico y su aproximación a lo real es a través de la verificación de sus resultados. "Una Inducción es (…) una verificación experimental de una predicción general,… " (Peirce 1987, pág. 259); mientras que con la *abducción* se desarrolla la inferencia hipotética, a partir de la consideración de los hechos construye hipótesis, establece un puente de lo real a lo simbólico; es decir, es una transcripción de las palabras en signos, símbolos, este razonamiento permite discriminar premisas verdaderas o falsas, es la base del razonamiento analítico, para formular hipótesis y conjeturas explicativas, con la finalidad de establecer su *falsabilidad,* es decir, como posibilidad de que una proposición que puede ser negada, entonces una

> … Abducción es un método para formar una predicción general sin ninguna seguridad positiva de que tendrá éxito, tanto en el caso especial como de manera usual, y su justificación es que es la única esperanza posible de regular nuestra conducta futura de manera racional,… (Pieice 1987, 259);

y la tercera la *deducción,* consolida la habilidad para razonar de lo general a lo particular.

> Una *Deducción* es un argumento cuyo Interpretante representa que éste pertenece a una clase general de posibles argumentos precisamente análogos, que son tales que a la larga, dentro de la experiencia, la mayor parte de aquellos cuyas premisas son verdaderas tendrán conclusiones verdaderas. Las Deducciones son o *Necesarias* o *Probables*. (Peirce 1987, pág. 258)

El proceso de *abducción* implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y sus reglas convencionales, artefactos lingüísticos que se emplean en una comunidad matemática. Pero también los sujetos usan metacódigos que constituyen "… una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente que dan cuenta de la <masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo (formal y rigoroso) de presentar las matemáticas>." (Filloy, 1999, p. 63) Entonces el interés se centra en la semiótica, como el estudio de los signos en su relación triádica y el papel del interpretante, que es el sujeto de la cognición para producir sentido y significación. "Para Peirce los pensamientos son signos, la mente es un signo (…) el hombre mismo es un signo" (Peirce 1987, pág. 8).

Con estos referentes, se pretende comprender la complejidad que implica la estructura lógica de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales, los procesos intermedios que usan los niños para la producción de sentido y significación a las actividades y acciones que se les están proponiendo.

Texto e intertexto matemático. Los textos matemáticos se conforman por un sistema de signos con una estructura formal, que son interpretados por los sujetos que los usan y conceptualizan, a partir de ciertos códigos para comprenderlos. Filloy (1999, pág. 63) recupera la aportación de Javier Lorenzo "la caracterización del texto matemático (...) va a estar en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior". Argumenta que en matemática educativa una semiótica de las matemáticas implica centrarse en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido, porque lo que se va a "...calificar de <matemático> no es sólo un tipo particular de signos, sino determinados sistemas de signos." (Filloy 1999, págs. 63 y 64). En el aula, los alumnos y maestros producen textos cuando se está realizando la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, interactúan a través del sentido y como producto del proceso de significación; dichos textos no son producto del lenguaje matemático (filloy 1999, pág. 64), "...sino el resultado de procesos de lectura/transformación hecho sobre un expacio textual..."

Lógica de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en construcción de los Números Naturales. Nuestro interés para comprender el uso de la lógica de los SMS está centrado en la realización de actividades sobre los números naturales, apoyándonos en el uso de algoritmos y de los SMS que usan los niños para poder observar lo que llevan a cabo en los procesos de construcción de los mismos. Es común que en la enseñanza se proponga una manera de construir y operar con los números usando los algoritmos convencionales, para lo cual los alumnos usan sus dedos, objetos o calculadoras. Sin embargo, en este punto es necesario precisar que nuestro interés es comprender los modos de significación, pues lo matemático está en los sistemas no en los signos (Filloy 1999, p. 63). Así los SMS se constituyen "…como una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos" (Filloy 1999, p. 63), cuando están construyendo los números naturales con los procesos de iteración y recursividad, para operarlos usando los algoritmos correspondientes, para dar sentido a lo que están haciendo y como los están usando, en situaciones de enseñanza. Cuando los

> …Sistemas Matemáticos de Signos y su código correspondiente, cuando existe una posibilidad convencionalizada socialmente de generar la función de signo (mediante el uso de un functor (…) incluso cuando las correlacionales funcionales se han establecido en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza con la intención de que sean momentáneos. Pero también se deben considerar los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los alumnos producen para dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque pueden estar guiados por un sistema que no ha sido socialmente establecido" (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pág. 7).

Primeros acercamientos de interpretación de la experiencia empírica con el Modelo de Enseñanza

En los fragmentos de la experiencia empírica que presentamos a continuación se pretende interpretar a la luz del modelo de comunicación los procesos de producción de sentido y significación que van desarrollando los niños a partir de las actividades que se les presentan.

Alumnos de 6 – 7 años (1º grado). En este fragmento, los niños usan la *inducción* para producir sentido a las actividades de recursividad en la construcción de los primeros números naturales, llamándole “construído” a la construcción e inclusión de todos los números antecesores, usando su *memoria* operativa.

M: (...) ¿Quién más le falta al tres? (...)
Ns: El dos, el dos.
M: El dos. Pero el dos ¿Cómo debe de estar?
Ns: Construido.
M: Con el uno y el cero. (...) Pero ¿Qué le falta aquí al dos? (...)
E: El uno.
M: No, al dos ¿Qué le falta?
Ns: El cero.

Alumnos de 7 – 8 años (2º grado). Los niños pudieron usar su *inferencia analítica* para describir el tamaño de la bolsa (contenedora – conjunto) correspondiente al número 10.

M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?
Ns: Nooo! ¡Está bien gordo! – otro alumno expresa con asombro*:*
N_1: y va ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?
N_2: Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien.

Alumnos de 8 – 9 años (3º grado). Los niños de este grado escolar ya tienen mayor experiencia cognitiva y académica, implementaron un *recurso intermedio* (palabra “pasajero”) para dar cuenta del proceso de recursividad; lo que les permitió producir procesos de sentido y significación a todo el proceso:

M: Para que yo le pueda poner el uno ¿qué debe tener?, ¿cómo está? (se les muestra una bolsa de hule transparente vacía)
Ns: Vacía.
M: No puede ser el uno. Es el uno hasta que yo lo meta.
N: Lo meto (el niño introduce la bolsa del cero en la bolsa contenedora del uno).
M: Ahora si es el uno.
N: ¡Hasta que entre el pasajero!
M: ¡Hasta que entre el pasajero! ¡Muy bien!

Discusión final y continuidad en la investigación

El diseño experimental y el análisis efectuado ha permitido identificar que la dificultad se tuvo en un principio con el proceso recursivo, constituyó una fortaleza cuando un alumno encontró una manera de nombrar el proceso: “pasajero”. Los niños estaban atentos y usaron su memoria a corto plazo, centrando su atención en la construcción y no en la secuencia oral o el numeral. Le dieron sentido a la iteración $n + 1$; usaron procesos *abducctivos* para transcribir con sus palabras el sentido recursivo en la construcción de cada número. Logrando con ello un uso correcto de la lógica de los SMS, lo que permitió la construcción de los siguientes números, pues estaban atentos para no omitir algo cada proceso recursivo para el siguiente número, auxiliándose en todo momento de la simbolización que hicieron al usar la palabra “pasajero” y en el caso de los niños de grados inferiores usaron la palabra “construido”. La *inducción* y *deducción* les permitió explicar y comprobar sus hipótesis durante el proceso de la construcción, con lo que fueron consolidando argumentos para asegurar que el proceso se está realizando correctamente. Para ello, la atención estuvo presente al activar los receptores para seleccionar la información que ya tenían en la construcción subsecuente. La memoria operativa les permitió pasar a una memoria a largo plazo.

Esta es la primera fase de la investigación experimental, en donde el análisis que se está realizando de la observación, constituye las bases del diagnóstico para seleccionar a los niños que participarán en la entrevista clínica como estudio de casos, para poder confrontar los resultados con la observación experimental y tener elementos para poder rediseñar el modelo de enseñanza.

Referencias y bibliografía

Filloy Yagüe, E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy Yagüe, E. Rojano Ceballos, T. & Puig Espinosa, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.

Galperín Yakovlevich, P. (1976). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico*. España: Pablo del Río Editor.

Hamilton, N. & Landin, N. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston, Usa: Allyn and Bacon, Inc.

Maravilla Cruz, A. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Piaget Fritz, J. & Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño*. España: Morata.

Peirce Sanders, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

S.E.P. (2011). *Plan de Estudios*. México: Secretaría de Educación Pública.

S.E.P. (2015). *Desafíos Matemáticos*. México: Secretaría de Educación Pública.

Talizina Fiódorovna, N. Comp. (2001). *La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.