XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I

Lilian **Nasser**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com

Angela **Biazutti**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
biazuttiac@gmail.com

Marcelo **Torraca**
SEEDUC-RJ, Colégio Santa Mônica- RJ
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
torraca@gmail.com

Jeanne **Barros**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
jeanne@ime.uerj.br

Resumo

Tem-se observado nos últimos anos um alto índice de reprovaçãona disciplina Cálculo I, ministrada para calouros de cursos na área de Ciências Exatas, tanto em universidades públicas como particulares. O presente trabalho relata os caminhos para desenhar um roteiro a ser usado nessa disciplina, na fase inicial de aulas, que possa auxiliar os alunos que apresentam lacunas de aprendizagem, oriundas da Escola Básica. Pretende-se ainda utilizar este material para produzir um guia destinado a professores de Matemática deste nível, sugerindo abordagens para os conteúdos de modo a preparar melhor os futuros alunos de cursos de graduação na área de Ciências Exatas. Foi elaborado um teste diagnóstico para investigar a natureza das dificuldades, aplicado a 237 alunos de duas universidades do estado do Rio de Janeiro.

Palavras-chave: evasão e reprovação em Cálculo I; teste diagnóstico; atividades virtuais.

Introdução

Nos cursos de nível superior da área de Ciências Exatas, como Ciência da Computação, Matemática, Engenharias, dentre outras, nas universidades brasileiras, a disciplina inicial que aborda os fundamentos do cálculo diferencial e integral tem apresentado historicamente índices de aprovação insatisfatórios. A situação parece estar se agravando, visto que, no último semestre, foi observado um índice superior a 50% de reprovação em turmas de duas universidades públicas do Rio de Janeiro, sendo uma federal e outra estadual. É necessário, portanto, procurar as causas para estes resultados e sugerir soluções que possam ser utilizadas, tanto na sala de aula quanto fora dela, para reverter esta situação que pode, também, implicar em aumento dos índices de evasão.

Professores em outras universidades, que já se depararam com este problema, concluíram que a causa principal é um déficit na aprendizagem dos conteúdos da Escola Básica, conteúdos estes necessários para a compreensão dos tópicos estudados na disciplina Cálculo I. Para resolver o problema, incluíram na grade curricular uma disciplina denominada Pré-Cálculo, assim denominada pois contém as ferramentas básicas, em nível do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, para os alunos que iniciam os estudos de cálculo diferencial e integral. Foi verificado, entretanto, que o problema simplesmente mudou de lugar (Diefenthäler, 2017). Os altos índices de reprovação passaram a ocorrer nesta disciplina básica. A explicação parece ser que os alunos ficam desmotivados para estudar um conteúdo que já conhecem, segundo a opinião deles.

Em sua pesquisa, Gonçalves (2007) procurou evitar uma disciplina extra de pré-Cálculo, e propôs uma estratégia para a disciplina de Cálculo I, em que os professores fizeram alterações em suas disciplinas, implantaram mais trabalhos e provas em períodos mais curtos, para que os alunos pudessem assimilar melhor os conteúdos. “Tal iniciativa tem indicado resultados mais satisfatórios, pois as notas das primeiras avaliações melhoraram, apesar de a evasão manter-se semelhante à de outros semestres”. (p. 49)

De modo semelhante, este trabalho sugere uma forma para tentar suavizar a transição dos alunos entre o Ensino Médio e o Superior, a partir de uma abordagem inicial da disciplina de Cálculo I, usando aplicações para motivar os alunos e cobrir lacunas de aprendizagem. O nosso objetivo é elaborar um roteiro contendo problemas a serem abordados em sala e material a ser disponibilizado em plataforma digital, complementando cada aula. Os problemas estudados envolvem, em geral, máximos e mínimos ou taxas de variação média de funções, contextualizados e contemplando interdisciplinaridade, exigindo modelagem matemática das situações-problema. A princípio podem ser resolvidos utilizando somenteconteúdosda Escola Básica. O material complementar, disponível on-line, tem*links* para diversas atividades envolvendo tópicos de Matemática desse nível.Desta forma, os alunos que tiverem dificuldades com conteúdos anteriores, poderão cobrir estas lacunas, com auxílio dos monitores da disciplina de Cálculo I.

Para obter informações mais claras sobre as dificuldades principais dos alunos,foi elaborado um teste-diagnóstico, contemplando exemplos de problemas a serem propostos no roteiro e seguindo as ideias do referencial teórico adotado neste trabalho. Este teste foi aplicado a 237 alunos, de turmas de vários cursos na área de Exatas (Engenharia, Computação, Física, Meteorologia, Matemática, Estatística, Atuária), na primeira semana de aula da disciplina inicial de Cálculo I. A análise dos resultados dos testes é apresentada e comentada, e são indicados os próximos passos do estudo para atingir o objetivo final.

Referencial Teórico

O alto índice de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo não é recente, e tem sido investigado por diversos pesquisadores como Even (1990), Robert e Schwarzenberger(1991), Rezende (2003), Gonçalves (2007), Nasser (2009) e Nasser, Sousa e Torraca (2012). Esses trabalhos investigam as principais causas para as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Superior, que se refletem nas dificuldades na disciplina de Cálculo I. Mais recentemente, Masola e Allevato (2016) apresentaram um trabalho que "retratao que algumaspesquisas discutem com relação às dificuldades de aprendizagem de alunos ingressantes no Ensino Superior." Esses pesquisadores apontam alguns caminhos para minimizar essas dificuldades: "a avaliação diagnóstica, o trabalho com grupos colaborativos, a análise de erros, o trabalho com Matemática articulada ao cotidiano profissional, e as contribuições dos recursos tecnológicos e dos livros textos". (Masola e Allevato, 2016, p. 64)

A pesquisa deNasser, Sousa e Torraca (2012), desenvolvida num ambiente de grupo colaborativo, recomenda que "as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria" (p. 1).

Observa-se que a maioria dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre os elementos da figura.

De acordo com Duval, uma das causas das dificuldades em Cálculo é a falta depercepção da relação entre os objetos matemáticos e as diversas formas de registro de suarepresentação. Duval (2009) afirma que

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (p. 15)

Duval (2009) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Por outro lado, a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro. De acordo com Duval (2003),"há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato" (p. 31).

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2009) aponta a necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros. Uma das causas das dificuldades deve-se à passagem da expressão analítica da função para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, o que acarreta problemas na passagem inversa. A prática sistemática dessa abordagem não favorece a interpretação global, que é, em geral,deixada de lado,uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Isso ajuda a compreender porque a maioria dos alunos apresenta dificuldades na utilização correta das representações gráficas, mesmo no Ensino Superior.

Por outro lado, Sierpinska (1992) afirma que há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que "*o gráfico de uma função não precisa ser exato*". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I de traçar gráficos de funções simples. Outro obstáculo, apontado também por Sierpinska, é a concepção de que "*apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções"*. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças, tão úteis na representação de problemas reais.

As teorias de Duval e Sierpinska nortearam nossa pesquisa, sendo decisivas, inclusive, na escolha das questões do teste diagnóstico.

Metodologia

O teste diagnóstico, composto de três questões, foi aplicado a 237 alunos de vários cursos de graduação, em duas universidades públicas do Rio de Janeiro, com o objetivo de detectar as principais dificuldades dos alunos ingressantes ao lidar com funções na resolução de problemas, e fornecer subsídios aos pesquisadores para o desenvolvimento do roteiro para as primeiras aulas do curso. O teste foi aplicado no início das aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, com aproximadamente 1h30m de duração.

Análise das respostas à 1ª questão

A primeira das questões (Figura 1), a mais simples, de resolução imediata, foi escolhida com o objetivo de verificar se o aluno consegue identificarseu domínio e imagem, além devalores e zeros de uma função. Optamos por fornecer a representação gráfica da função.

Questão 1: Considere o gráfico da função f da figura abaixo e responda:

a) O valor de f (-1) é:________________.

b) O valor de f (3) é: _________________.

c) Os valores de x tais que f (x) = 2 são: _____ e ______.

d) Marque na figura os valores de x tais que f (x) = 0.

e) O domínio da função f é____________ e a imagem da função f é _______________.

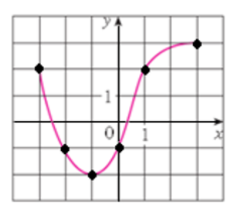


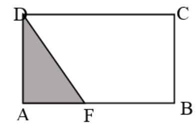
*Figura 1.*Primeira questão: Análise da representação gráfica.

Constatamos uma alta porcentagem de acertos nos itens (a), (b) e (c), ultrapassando os 70%. Houve dificuldade em mostrar no gráfico os zeros da função (item d), com apenas 54% de acertos.Em alguns casos, houve troca da ordenada pela abscissa, ou seja, os alunos marcaram o valor de *f (0)* em vez de assinalar os valores de *x* tais que *f (x) = 0*. Vários alunos consideraram o domínio e imagem como conjuntos discretos. Menos da metade da amostra acertou o item (e), em que se registrou 46% de respostas corretas para o domínio e 42% para a imagem da função exibida no gráfico.Essa dificuldade pode estar associada ao fato de que, na Escola Básica, os alunos trabalham quase que exclusivamente com funções polinomiais ou trigonométricas, considerando como domínio o conjunto dos números reais. Ou então trabalham com funções definidas num domínio discreto, associando cada ponto à sua imagem.

Análise das respostas à 2ª questão

As questões 2 e 3 foram selecionadas/escolhidas para verificar se os estudantes seriam capazes de articular a transição entre as representações verbal, analítica e gráfica. O quesito da linguagem se mostrou um bloqueio para realizar essa transição, visto que o item dessas questões que alcançou o melhor resultado foi o item (a) da 2ª questão, com 51% de acertos, talvez porque apresentava uma figura representando a situação (veja a figura 2). Um dos alunos, inclusive, afirmou que não conseguiu ver a diferença entre os itens (a), (b) e (c) da Questão 2.

Questão 2: Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm, chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.



a) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado AB, Como mostra a figura ao lado, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

b) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado BC, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

c) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado CD, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

d) Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno.

e) Esboce o gráfico da função obtida no item d.

*Figura 2.*Segunda questão: adaptada da OBMEP 2014 (2ª fase, questão 2, nível 3).

No item (b), a maioria dos alunos não percebeu que a área não dependia de *x*, gerando uma função constante. O índice de acertos nesse item foi de apenas 21%, sendo que 30% deixaram em branco. O índice de acertos do item (c) foi ainda menor, de apenas 11%. Mas o item que apresentou o menor número de acertos foi o (d): apenas 8% conseguiram escrever a expressão da função área, que era uma função de várias sentenças. Esse resultado comprova o obstáculo prescrito por *Sierpinska*, de que os estudantes têm a crença de que uma função deve ser definida por uma única expressão analítica. O item (e), que pedia o gráfico da função da variável *x* que dava a área do triângulo, teve o maior índice de respostas em branco (54%) e apenas 14% de acertos. Entretanto, nota-se uma curiosa discrepância nos resultados: apesar de 14% dos alunos acertarem o gráfico,apenas 8% conseguiram escrever corretamente a expressão analítica da função definida por várias sentenças, como a resposta mostrada na figura 3.

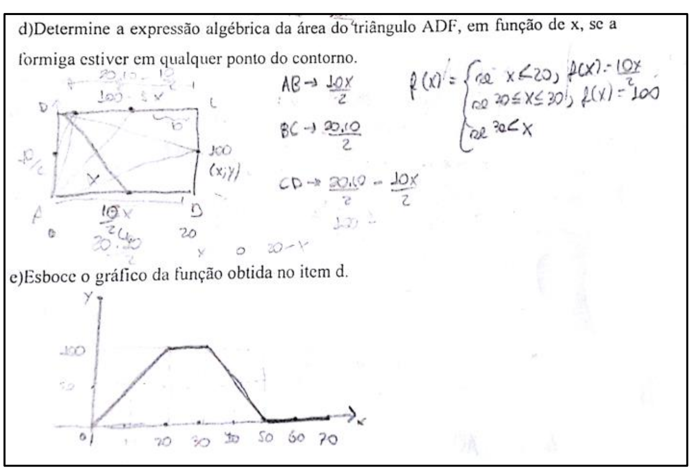


Figura 3. Tentativa incorreta de exprimir a função, e seu gráfico.

Análise das respostas à 3ª questão

A terceira questão apresentava um problema muito explorado nadisciplinade Cálculo I, com a diferença de que o papelão tem forma quadrada. Para resolvê-la, os alunos deveriam interpretar o enunciado e fazer uma figura que permitisse visualizar a situação, para então determinar a expressão algébrica da função (item (a)) do volume da caixa em função do lado dos quadrados recortados dos cantos do papelão e depois identificar seu gráfico no item (b).Assim, era preciso fazer a conversão do registro verbal para o analítico, usando uma figura para compreender a variação do parâmetro e encontrar a expressão analítica da função.

Questão 3: Com um retângulo de papelão de 8cm de comprimento por 5cm de largura, deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa. Para isto de cada ponta do papelão é cortado um quadrado de x cm de lado, com um dos vértices de cada quadrado sendo um dos vértices do retângulo de papelão.

a) Determine a expressão algébrica da função que fornece o volume da caixa, em função do lado x do quadrado.

Figura 4. Enunciado da questão 3 com o item (a).

O item (a) da terceira questão alcançou 43% de acertos, o que indica que possivelmente alguns alunos já tivessem tido contato com esse problema anteriormente, ainda que no caso do papelão de forma quadrada, o que dá origem a uma caixa com base quadrada. Neste problema, a exploração dos valores possíveis para x e os formatos correspondentes da caixa obtida, na atividade virtual, ajuda muito na compreensão do enunciado, e na transição da representação verbal para a analítica, que corresponde à identificação da função que expressa o volume da caixa em termos de *x*. A figura 5 mostra as alternativas dadas no item (b) para o gráfico da função volume do item (a).

b) Dentre os gráficos abaixo escolha o que melhor representa geometricamente o gráfico da função obtida no item a. Justifique o porquê de sua escolha.

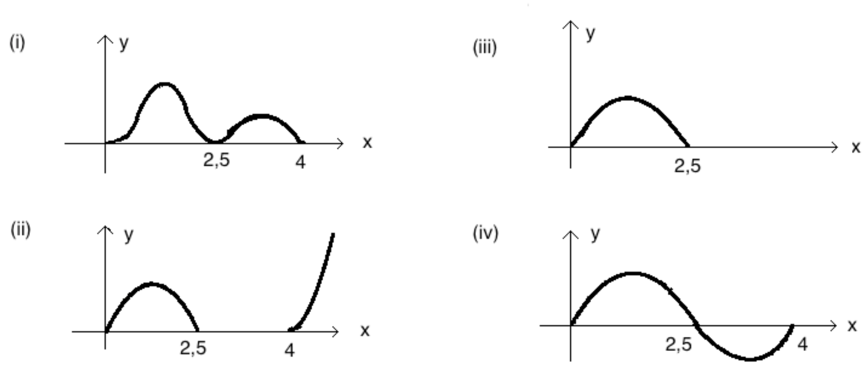


Figura 5. Item (b) da terceira questão: transição do registro analítico para o gráfico.

Apesar de o índice de acertos da expressão algébrica ter alcançado 43%,somente 26% dos alunos escolheram o gráfico correto (iii) no item (b), mostrado na figura 5, o que indica uma dificuldade maior na conversão do registro analítico para o registro gráfico. Uma razão possível para este resultado remete à análise das respostas da questão 1, que mostra a dificuldade dos alunos no que se refere à compreensão dos conceitosde domínio e imagem. Cerca de 20% dos alunos escolheu o gráfico (iv), não observando que os valores de *x* deveriam ser menores que 2,5. Esse foi o comportamento do aluno cuja resposta está reproduzida na figura 6.

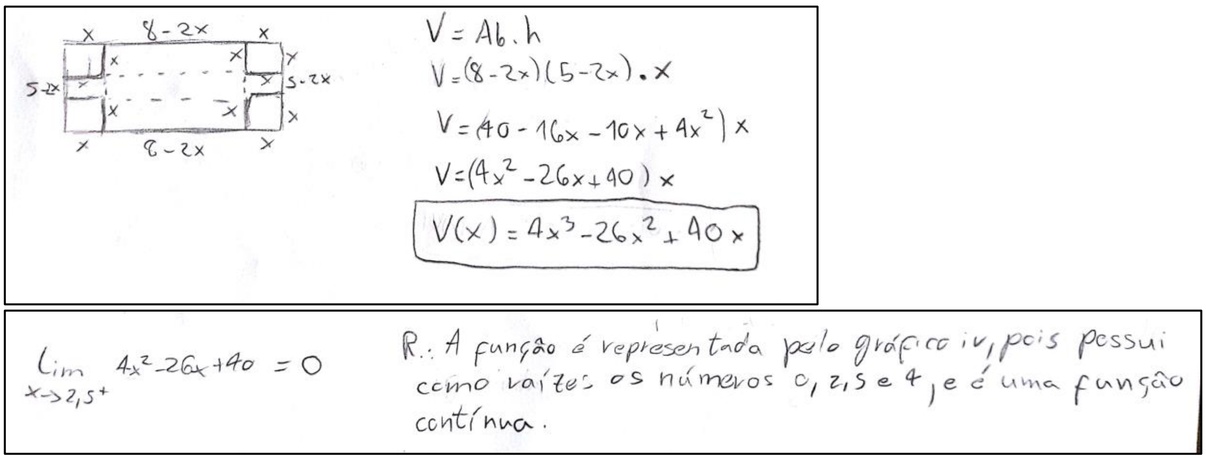


*Figura 6.*Resposta dada à terceira questão: registro analítico correto, mas escolhaincorreta do gráfico.

Ainda na terceira questão, um aluno apenas esboçou a figura do retângulo com os quadradinhos marcados nos cantos e escreveu: “Tenho muita dificuldade em questões com funções, não tive esta matéria de forma aprofundada no ensino médio, logo, não saberia responder corretamente as questões. Estou estudando todas as matérias do ensino médio em casa, para conseguir uma base para estudar Cálculo I”. Esse depoimento indica a necessidade de rever as estratégias usadas no Ensino Médio, corroborando osobjetivos da nossa pesquisa.

Próximos passos

Analisando os resultados do teste diagnóstico à luz dos referenciais teóricos de Duval e Sierpinska, é possível identificar as dificuldades dos alunos ingressantes em Cálculo I, no conteúdo de funções e suas representações. As principais dificuldades observadas foram a leitura e interpretação de enunciados de problemas, e a modelagem desses problemas, envolvendo a conversão da representação verbal para a analítica, em termos de funções afim, polinomiais e de várias sentenças. Em alguns casos foi observada também a dificuldade com o trato algébrico, que foi causa de erros nessa transição.

A partir dessas observações, é possível identificar diretrizes para um roteiro que será desenvolvido para orientar os docentes, utilizando algumas atividades virtuais criadas pela professora Ângela Rocha, e já disponibilizadas na página do Instituto de Matemática da UFRJ (IM/UFRJ).Por exemplo, é preciso conscientizar professores do Ensino Médio de que o conteúdo de funções deve ser explorado de forma mais abrangente, como sugerido por Duval (2003, 2009). Outro ponto a observar é que os exemplos trabalhados na disciplina de Cálculo devem refletir situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais. Essa estratégia possibilita a exploração de situações do cotidiano, como a variação dos valores cobrados de Imposto de Renda, em função do salário mensal recebido. Recomendamos propor situações representadas por funções definidas por mais de uma sentença, funções descontínuas, e explorar seus gráficos. Também é preciso reforçar as noções de domínio e imagem de uma função, ultrapassando obstáculos, como os sugeridos por Sierpinska (1992).

Portanto, os próximos passos deste trabalho são o exame das atividades virtuais disponibilizadas na página do IM/UFRJ e a coleta de problemas contextualizados que levem à superação das dificuldades apontadas por Duval e Sierpinska. Este roteiro, com certeza, será muito útil, tanto para professores do Ensino Médio quanto para docentes de Cálculo I.

Referências

Diefenthäler, A. T. (2017. DisciplinaPré-Cálculo: umolhar a partir do desempenho dos acadêmicos.Disponível em: http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andressa%20Tais%20Diefenthäler.pdf?sequence=1

Duval, R.(2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p.11-33.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Gonçalves, C. F. (2007). Dificuldades em matemática ao ingressar no Ensino Superior. Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário La Salle, Canoas, RS.

Masola, W. J &Allevato, N. S. G (2016). Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. Revista Brasileira de Ensino Superior, 2(1): 64-74.

Nasser, L.(2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. &Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58.

Nasser, L., Souza, G. &Torraca, M.A. (2012). Transição do EnsinoMédio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação *Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.

Rocha, A., Material para ensino de Pré-Cálculo, página: http://www.im.ufrj.br/precalculo, acessada em 24/09/2018

Sierpinska, A. (1992).*On understanding the notion of function*. In: Dubinsky, E; Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, p.25-58.