XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Operaciones básicas con algoritmo gráfico[1] en la escuela primaria

Angel **Totolhua** Tlaque
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
atotolhua@cinvestav.mx
Marta **Valdemoros** Alvarez
Departamento de matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

Los obstáculos conceptuales y operatorios que presentan los alumnos de sexto año de primaria para realizar tareas en las que intervenga la adición, sustracción, así como la multiplicación y la división de números fraccionarios, son centrales en el presente trabajo de investigación. Las tareas presentadas son ejemplificadas por medio del algoritmo canónico y el algoritmo gráfico, para dar una idea de cómo resolver cada una de ellas, sin embargo, los alumnos presentan una serie de dificultades en ambos algoritmos, no obstante, los errores que cometen los alumnos son más claramente verificados al realizar el algoritmo gráfico, el cual nos da la oportunidad de tener más indicios de cómo enfrentar dichas dificultades tanto conceptuales como operatorias y alcanzar el aprendizaje significativo de la mayoría de los alumnos de sexto grado de primaria, lo cual es fundamental para el proceso de investigación al que sirve de preámbulo este artículo.

Palabras clave: Números fraccionarios, algoritmo canónico, algoritmo gráfico, obstáculos conceptuales y operatorios, aprendizaje.

Introducción

El análisis de las estrategias y las dificultades que los alumnos de sexto grado de primaria enfrentan para resolver problemas en los que es necesario aplicar la multiplicación y la división de números fraccionarios son fundamentales para explicar cómo en Educación Básica, el conocimiento de los números fraccionarios o racionales suele considerarse como una difícil problemática; sin embargo, como se explicará más adelante la multiplicación de fracciones y en especial la división de fracciones es una de las operaciones con números racionales más mecánica y menos comprendida por los alumnos tanto de la escuela primaria como de la escuela secundaria (Tirosh, 2000, Cengiz, 2011).

[1]Algoritmo gráfico, definido por Kieren (1983) como aquel algoritmo que se realiza por medio de figuras geométricas o expresiones gráficas.

En consecuencia, los resultados obtenidos por los alumnos son muy bajos como se demuestra en la prueba Planea aplicada a alumnos de sexto grado de primaria y la prueba Sisat aplicada a alumnos de la Escuela secundaria[2].

El tratamiento que se da a estos números en las escuelas de México es muy importante, ya que abarca una gran cantidad de tareas en el libro de texto para el alumno de sexto grado denominado *Desafíos Matemáticos* (SEP, 2017), en total se registraron 21 lecciones de un total de 85, es decir, el tema de fracciones abarcó casi un 25 % del total de lecciones.

La problemática planteada no se presenta como algo trivial que se resolverá sólo con el conocimiento de los números naturales, y sin tener conciencia de que el tratamiento de los números racionales debiera considerarse independientemente de dichos números naturales.

Marco teórico

El aprendizaje de las fracciones como lo señalan diversos autores son de una complejidad, como lo señala Kieren (1983) "la construcción del número racional es más amplia que la de los números naturales".

La enseñanza de las fracciones en México se inicia en la escuela primaria, se presta especial atención en los primeros años a la suma y resta de números fraccionarios, y en losdos últimos años la multiplicación y división, entonces surge naturalmente una pregunta: ¿por qué los alumnos que ingresan a la escuela secundaria no tienen un conocimiento sólido en cuanto a las cuatro operaciones básicas con el uso de números fraccionarios?

La suma y la resta de números fraccionarios se presentan en la escuela primaria como un referente similar al de los números naturales, ya que las 2 cantidades similares involucradas e identificados como sumandos producirán una tercera cantidad similar (Swartz, 1989), del mismo modo las cantidades similares involucradas en la resta producirán una tercera cantidad similar (Swartz et. al. 1989)

La multiplicación y especialmente la división de fracciones se presentan en la escuela primaria y en la escuela secundaria como las operaciones de mayor dificultad en cuanto a su aprendizaje se refiere, y los maestros tienen que recurrir a múltiples estrategias de enseñanza para que los estudiantes adquieran este aprendizaje; aunque cabe decir que algunos estudiantes se conforman con aprender algunos tipos de algoritmos que los lleve al resultado, pero que lamentablemente no entiendan los significados conceptuales de dicha operación.

Algunas propuestas de cómo resolver los algoritmos los encontramos incluso en redes sociales, las cuales poco aportan al aprendizaje de los estudiantes y si los confunden con respecto a lo que aprenden en la escuela.

Entre las dificultades más sobresalientes de la multiplicación y división de fracciones se observa que los números fraccionarios al parecer operan de manera contraria a los números naturales, es decir, al realizar la multiplicación de números naturales partimos de la idea de que las cantidades multiplicadas inicialmente darán como resultado un número mayor (Swartz, 1989, Vergnaud, 1983), mientras que si las cantidades multiplicadas son números fraccionarios entonces el resultado final será menor que las cantidades iniciales; en cambio al realizar la división de números naturales, el cociente de dichos números dará una cantidad menor,

[2] Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea),y Sistema de alerta temprana (Sisat), son evaluaciones aplicadas a los alumnos de sexto de primaria y secundaria en México.

mientras que en la división de números racionales el cociente será mayor, por lo que los estudiantes dudan de cualquiera de estos resultados, ya que no se apegan a lo aprendido en cuanto a los números naturales[2].

Otra dificultad en el aprendizaje de los números racionales se refiere a la relación que existe entre la situación problemática y la operación apropiada para resolverla (Jensen, 2015, Fishbein, 1985) ya que pensamos que no sólo es importante llegar al resultado correcto, sino tener la certeza de que el alumno utilizó la o las operaciones adecuadas para llegar al resultado final, pues no es recomendable confiar solo en la intuición de los estudiantes ante este tipo de dificultades.

En cuanto a los campos conceptuales enunciados por Vergnaud como "un conjunto de situaciones, cuyo dominio requiere el dominio de varios conceptos de diferentes naturalezas", podemos decir que el campo conceptual utilizado en este trabajo sólo se referirá a los conocimientos que tengan que ver con las expresiones gráficas (Kieren, 1985), y todas aquellas ideasque los alumnos tengan en cuanto a representar gráficamente las situaciones problemáticas que tiene que ver con los números fraccionarios.

En este trabajo se pretende rastrear los conocimientos más primitivos de los niños en cuanto a las operaciones básicas en las que se involucra el uso de los números fraccionarios.

Teoremas en acción

El teorema en acción[3] es fundamental en este trabajo de investigación ya que a través de él pretendemos analizar las dificultades que tiene los estudiantes para resolver una situación problemática, pero que en muchas ocasiones no las pueden expresar verbalmente, sólo realizan las operaciones que consideran necesarias para resolver el problema, pero no se detienen a analizar cuál o cuáles caminos siguieron para obtener la respuesta.

A través de los teoremas en acción se pretende valorar cada una de las estrategias intuitivas utilizadas por los estudiantes para transformar el conocimiento intuitivo en conocimiento explícito, así como conocer que tanto saben o no saben nuestros alumnos, para ayudarlos en la consolidación de su conocimiento.

La intención de este trabajo de investigación es dar a los alumnos las herramientas necesarias para que conozcan cómo funciona la suma y resta de fracciones a través del "algoritmo gráfico" (Kieren, et. al. 1985), para que de manera autónoma puedan intuir también por qué funciona la multiplicación y la división en los números fraccionarios.

Metodología

Muestra

Se aplicó un cuestionario a 33 alumnos de sexto grado de una escuela primaria ubicada en la periferia de la capital del Estado de Puebla, la institución fue seleccionada porque es una de las que mejor desempeño ha tenido en la prueba Enlace y Planea de los últimos años, por otra parte, la maestra titular del grupo muestra una gran disposición para el trabajo de los números fraccionarios.

[3] Teoremas en acción definidos por Vergnaud como las relaciones matemáticas que los estudiantes toman en cuenta cuando eligen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema.

Tareas

Las tareas asignadas a los alumnos fueran las mismas, y se diseñaron en el marco de la presente investigación, el tiempo para realizarlas fue libre y cada alumno entregó su trabajo cuando había terminado, se pidió a todos los alumnos que contestarán sin presión alguna y anotaran todas sus operaciones,y aunque algunas de ellas las considerarán como incorrectas las dejaran plasmadas en el cuestionario, sólo con una pequeña nota que ellos considerarán pertinente.

Se presentó como primera y segunda tarea la suma y resta de fracciones, para conocer hasta qué punto tienen los alumnos un conocimiento sólido en cuanto a lo conceptual y lo operatorio, y saber si cuentan con los conocimientos necesarios para realizar la multiplicación y división de números fraccionarios.

En las cuatro primeras tareas propuestas se presentan el ejemplo de cómo resolverla, en la última tarea se pide que de manera libre se resuelva con los propios medios de los alumnos, enseguida se pide alos alumnos resuelvan otra tarea similar a la presentada. Se solicitó a cada uno de los alumnos utilizará la figura del rectángulo para resolver cada tarea y/o en su caso manejará cualquier otro procedimiento.

El análisis de cada ítem se realizó tomando como base lo propuesto por Vergnaud, como *teorema en acción* para analizar cada una de las estrategias utilizadas por los alumnos, y de este modo tratar de definir su conocimiento en cuanto a la suma, resta, multiplicación y división de números fraccionarios a través del algoritmo gráfico, propuesto en este trabajo de investigación.

El cuestionario consta de 5 reactivos, los cuales se presentan a continuación:

Reactivo 1. Presenta una suma de fracciones.

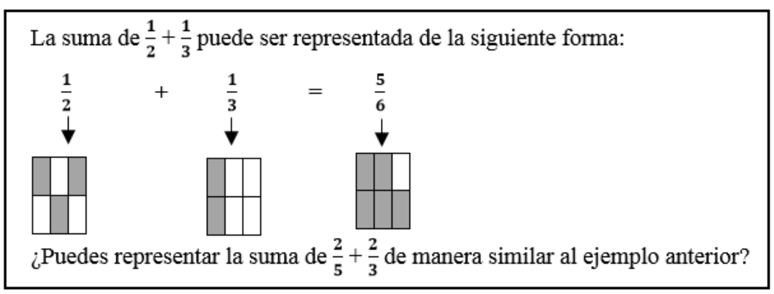


*Figura 1.*Reactivo 1.

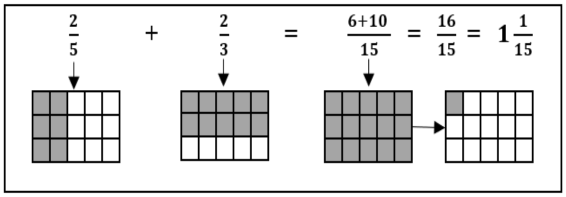
Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la suma de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan la suma de fracciones de manera correcta, además realizan la suma de fracciones con Algoritmo Grafico como se muestra en la figura 2.

[4] Algoritmo canónico, definido como la operación matemática de mayor uso y realizada de manera universal.

Se observa que estos alumnos tienen un concepto sólido en lo que se refiere a la suma de fracciones tanto en el algoritmo canónico[4] como en el "algoritmo gráfico" (Kieren, et. al. 1985).



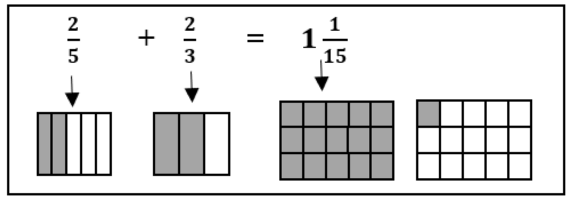


Figura 2. Preservación del todo. *Figura 3.* Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Seis alumnos realizan la operación de manera correcta. El resultado del algoritmo gráfico también es correcto, sin embargo, las dos figuras que representan los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser sumadas, tanto por su tamaño diferente, como por su equidivisión. Figura 3.

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

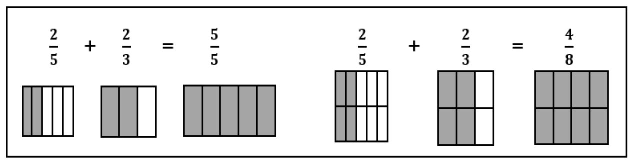


Figura 4. Algoritmo canónico. *Figura 5*. Constancia de números naturales

Estrategia 3, algoritmo canónico. Catorce alumnos realizan el algoritmo de manera correcta (fig. 4), sin tomar en cuenta el ejemplo y la indicación propuesta en el cuestionario, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero ninguno lo realiza correctamente.

Realizan de manera libre el algoritmo gráfico, pero no logran obtener la respuesta que obtuvieron en la operación, intentan de diversas maneras obtener el mismo resultado tanto en el algoritmo canónico como en el algoritmo gráfico, sin lograrlo.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Seis alumnosresuelven la tarea como si se tratara de números naturales, realizan la partición de cada una de las figuras de manera correcta, pero no pueden operar ambas cantidades fraccionarias, trazan cada figuracomo ajena e independiente y ajustan los resultados, como se muestra en la figura 5.

Estrategia 2, libre. Cuatro alumnos representan los números fraccionarios de manera libre y al parecer en relación directa a los números naturales, trazan figuras para realizar el algoritmo grafico también de manera libre, se nota que tiene un conocimiento limitado en cuanto a los números fraccionarios, pero funcional acerca de los números naturales.

El presente ítem obtuvo un total de 23 respuestas correctas y 10 incorrectas, lo cual muestra un manejo aceptable en cuanto a la suma de fracciones, los alumnos que contestaron incorrectamente muestran un anclaje persistente enfocado al manejo de los números naturales.

Reactivo 2. Presenta una resta de fracciones.

Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la resta de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

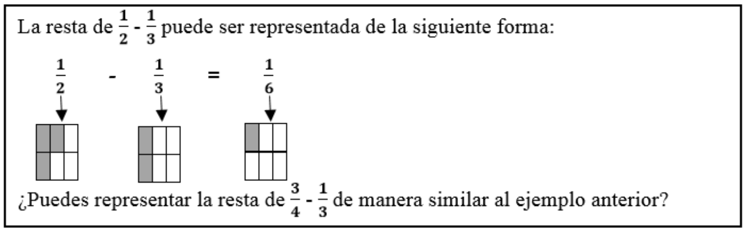
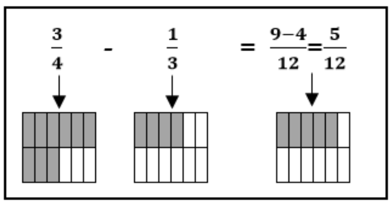


Figura 6. Resta de fracciones.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan el algoritmo de manera correcta, también realizan correctamente el algoritmo gráfico con figuras rectangulares, como se muestra en la figura 7.



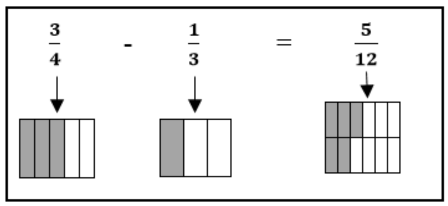


Figura 7. Preservación del todo   Figura 8. Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Ocho alumnos realizan la operación de manera correcta, también realizan correctamente el resultado del algoritmo gráfico, pero los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras independientes, que no podrían ser restadas tanto por su diferente tamaño como por su equidivisión, como se presenta en la figura 8.

Estrategia 3, algoritmo canónico. Cuatro alumnos realizan la operación de manera correcta con el algoritmo canónico, pero no realizan el algoritmo gráfico a través de las figuras propuestas en la tarea.

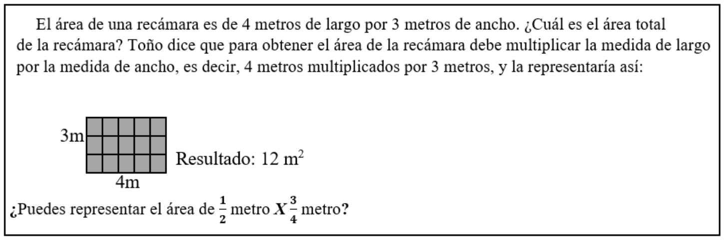
Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Ocho alumnos tratan de realizar la operación con el algoritmo canónico, pero tienen un conocimiento muy limitado de cómo realizar la operación y por lo tanto las respuestas son muy variadas e incorrectas, también intentan realizar el algoritmo gráfico y trazan de manera correcta tanto el minuendo como el sustraendo con figuras que están representadas de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser restadas, se observa un manejo fijo hacia los números naturales.

Estrategia 2, libre. Diez alumnos solo realizan el algoritmo canónico, pero de manera incorrecta, no realizan algún intento por resolver a través del algoritmo gráfico, al parecer tienen un conocimiento limitado de como operar los números racionales.

El presente reactivo obtuvo un total de 15 respuestas correctas y 18 incorrectas, lo cual muestra una clara diferencia en cuanto al reactivo anterior y muestra un manejo incorrecto tanto en lo conceptual como en lo operatorio.

Reactivo 3. Multiplicación de fracciones.



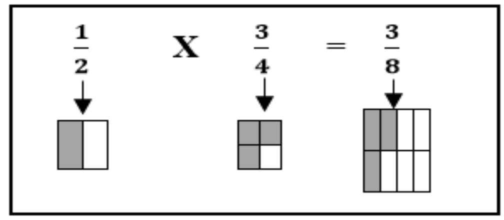


Figura 9. Multiplicación de fracciones. *Figura 10.*Conservación de figuras independientes.

Respuestas correctas:

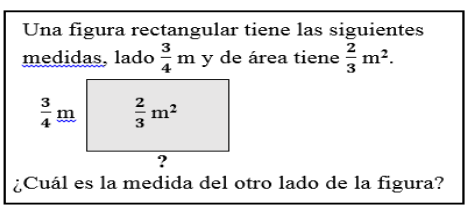
Estrategia 1, conservación de figuras independientes. Siete alumnos realizan la operación con algoritmo canónico de manera correcta, y también el algoritmo gráfico es correcto, aunque siguen manteniendo a cada una de las figuras como independientes y ajustando las figuras que representa a cada número fraccionario con el resultado correcto, como se muestra en la figura 10.

Estrategia 2, algoritmo canónico. Diecisiete alumnos realizan la operación de manera correcta y luego registran el mismo resultado en una figura rectangular de 8 partes, no realizan el algoritmo gráfico solo trazan la figura rectangular de ocho partes para anotar el resultado.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, libre. Nueve alumnos realizan diferentes operaciones de manera libre e incorrecta, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero también lo realizan de manera errónea, al parecer no tiene claro cómo realizar la operación de multiplicación de fracciones. El presente reactivo obtuvo un total de 24 respuestas correctas y 9 incorrectas, lo cual muestra nuevamente un manejo aceptable en cuanto la multiplicación de fracciones.

Reactivo 4. División de fracciones. Reactivo 5 División de fracciones.



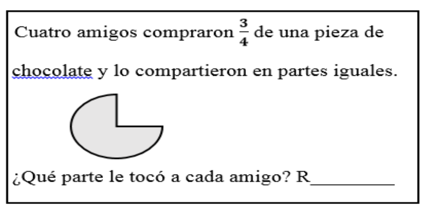


Figura 11. *Figura 12.*

Únicamente el alumno Cristian contesto correctamente las dos tareas propuestas, realizó la operación de división de fracciones de manera adecuada, todos los demás alumnos contestaron de manera libre e incorrecta.

Conclusiones

La suma de números fraccionarios representó un poco dificultad, ya que 23 alumnos de los 33 contestaron correctamente, sin embargo, la resta de fracciones representó una mayor dificultad ya sólo 15 de los 33 alumnos contestó correctamente, en cuanto a la multiplicación de fracciones el porcentaje de alumnos nuevamente se incrementó ya que 24 de los 33 alumnos contesto correctamente, incluso supero el número de estudiantes con respecto a la suma de fracciones, pero la división de fracciones representó una mayor dificultad, pues solamente un alumno contestó correctamente cada una de las dos tareas propuestas.

La intención de trabajar con expresiones gráficas como se muestra en las cuatro primeras tareas es dar mayor importancia al algoritmo gráfico, el cuál además nos permite saber hasta qué nivel se encuentra el conocimiento de los alumnos de sexto grado de primaria en cuanto a los números fraccionarios, y tratar de que los demás alumnos accedan a este conocimiento por este medio.

La división de fracciones se presenta como el mayor reto por aprender en la escuela primaria, en este trabajo de investigación solamente se presentan el modelo partitivo y el inverso del producto de medidas, como dos ejemplos muy claros para ser aprendidos en la escuela primaria, y que serán abordados posteriormente en el proceso de investigación.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (1990). 'Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.

Berenson, S., Vidakovic, D., (1995) Rural Students' Informal knowledge of division. Paper presented at the Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (17th PME-NA, Columbus, OH, October21-24, 1995).

Cengiz, N., Rathouz, M. (2011). 'Take a bite out of fraction division'.*Mathematics Teaching in the Middle School, 17(3),* 146-153.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., Sciolis, M. (1985). The Role of Implicit in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Jensen, A., Hohensee, C., (2015). Examining and elaborating upon the natureof elementary prospective teachers' conceptionsof partitive division with fractions.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education.*(pp. 506-525).

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Schwartz, J.: 1988, 'Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 41-52. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 125-147.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G.: 1988, 'Multiplicative structures', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 141-161. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Hare! & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2018) Libro de Texto Gratuito. *Desafíos matemáticos. Libro para el Alumno Sexto Grado*. Educación básica. Primaria. México D.F.