



Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria

María Dolores **Torres** González

Universidad de Granada

España

mtorresg@ugr.es

María C. **Cañadas** Santiago

Universidad de Granada

España

mconsu@ugr.es

Antonio **Moreno** Verdejo

Universidad de Granada

España

amorenoverdejo@gmail.com

Pedro **Gómez** Guzmán

Universidad de los Andes

Colombia

argeifontes@gmail.com

Resumen

En este estudio, caracterizamos el pensamiento funcional que evidencian alumnos de 2º de Educación Primaria (7-8 años). Ponemos de manifiesto la capacidad de los alumnos para identificar estructuras y generalizar en el contexto funcional del early algebra. Para ello, planteamos una tarea contextualizada que involucra la función lineal $y=x+4$, en sus formas directa e inversa durante entrevistas que realizamos tras un experimento de enseñanza. Describimos las estructuras evidenciadas en ambas formas de la función y el tipo de generalización que emplean los estudiantes. Destacamos que todos los estudiantes identificaron una estructura adecuada de la forma directa de la función, mientras que, en la forma inversa, hubo más dificultades. La mayoría de las generalizaciones se producen al preguntarles explícitamente por la generalización, tanto en la forma directa como la inversa de la función.

Palabras clave: pensamiento funcional, forma directa de una función, forma inversa de una función, estructura, generalización.

Antecedentes y marco teórico

Existe un interés por el estudio del pensamiento funcional que promueve en las aulas el estudio de regularidades, relaciones y propiedades matemáticas para permitir a los alumnos de edades tempranas explorar, predecir, modelizar, discutir y argumentar (Molina, 2009). La

función es el contenido matemático clave del pensamiento funcional siendo una regla que establece la relación entre dos variables que covarían (Thompson, 1994). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades. La regularidad es lo que se repite y el reconocimiento de regularidades es esencial para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca una regularidad que sea válida para más casos (Polya, 1966). A través de la identificación de la regularidad entre valores concretos de ambas variables, se puede llegar a generalizar. Existen investigaciones que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales (e.g., Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017a) pero son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de dicho nivel educativo perciben y generalizan la forma inversa de una función en edades tempranas. Ambas formas de una función tienen relación con los roles que tiene cada una de las variables implicadas en situaciones matemáticas. Una misma variable asume el rol de variable independiente para la forma directa y el de variable dependiente para la forma inversa, y viceversa. El estudio sobre como interpretan los estudiantes ambas formas de la función aporta también información sobre el desarrollo del pensamiento funcional. En este estudio proponemos una tarea que involucra la función $y = x + 4$. Se trata de una función lineal, que es recomendada para trabajar con estudiantes de Educación Primaria (Carraher y Schliemann, 2016). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que expresan la generalización (Pinto y Cañadas, 2017a). Las estructuras pueden ser equivalentes desde el punto de vista semántico cuando representan la misma situación, aunque se expresen de forma diferente (English y Warren, 1998). Por ejemplo, $x + 4$, $x + 2 + 2$ y $x + 1 + 1 + 1 + 1$ son expresiones semánticamente equivalentes.

Entre los investigadores que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales, Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio centrado en las estructuras de la forma directa de una función y la generalización, analizaron las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucraba la función lineal $y = x + 3$. Los resultados muestran una variedad de estructuras identificadas por los estudiantes durante los casos particulares, 4 tipos de estructuras diferentes. Los 6 estudiantes de 2º de Educación Primaria de nuestro estudio, generalizaron verbalmente la relación involucrada. La mayoría generalizan la estructura correcta y emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general; observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes de 2º curso para identificar regularidades entre variables y generalizar. Sin embargo, las estructuras que se corresponden con cada una de las formas (directa e inversa de una función) son diferentes ya que la manera de expresarlas es distinta. Pinto y Cañadas (2017a) describen cómo 24 estudiantes de quinto de Educación de Primaria (10-11 años) perciben la forma inversa al trabajar con un problema que involucra una función. Concluyen que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizaron esta forma de la función. Son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de Educación Primaria perciben y generalizan las formas inversas de las funciones y cómo lo hacen en comparación con su forma directa.

Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas y permiten caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes. Para generalizar, se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y

en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Para fomentar esta abstracción seguimos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Partimos de situaciones que involucran casos particulares y, observando regularidades, es decir, identificando la estructura, se pretende llegar a la generalización. Diferentes autores distinguen entre distintos tipos de generalización. Asumimos la tipología identificada por Pinto y Cañadas (2017b), quienes distinguen entre generalización espontánea cuando la generalización se produce sin preguntar explícitamente por ella y generalización inducida cuando se produce al preguntar por el caso general. El diseño de las tareas o cuestionarios esperan su presencia en un momento más tardío dándose así una generalización espontánea (Pinto y Cañadas, 2017a). Nos centramos tanto en la forma directa como en la forma inversa de una función pues se considera que genera más dificultades que la directa y nos ayuda a indagar en el desarrollo del pensamiento funcional (MacGregor y Stacey, 1995). Nuestro objetivo general de investigación es describir cómo los estudiantes de 2° de Educación Primaria perciben la forma directa e inversa de una función al trabajar con un problema que involucra una relación lineal en el contexto funcional del early algebra. Nos centramos en 2° de primaria debido a que existen estudios previos que abordan la función directa e inversa en edades cercanas pero no en este nivel de Educación Primaria. Abordamos dos objetivos específicos: (a) identificar las estructuras que evidencian los estudiantes al generalizar la forma directa e indirecta de una función y (b) describir la generalización con base en esas estructuras.

Método

Llevamos a cabo un estudio de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. Dentro del panorama de la investigación de diseño desarrollamos un experimento de enseñanza con sesiones de trabajo y entrevistas individuales (Steffe y Thompson, 2000). En este trabajo nos centramos en la información proveniente de una entrevista realizada a seis estudiantes al final de las sesiones del experimento de enseñanza. Para alcanzar nuestros objetivos de investigación, describimos las diferencias observadas en cuanto a las estructuras identificadas tanto en la forma directa como inversa de la función como también las generalizaciones expresadas atendiendo a si son espontáneas o inducidas.

Participantes

Los sujetos de este estudio son seis estudiantes de segundo de Educación Primaria (7-8 años) en España a los que realizamos una entrevista individual semiestructurada. Sus conocimientos previos son: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. Seleccionamos a estos estudiantes de un grupo de 24 al que aplicamos un cuestionario inicial con preguntas donde se involucraba la función $y=x+3$ en una tarea de generalización contextualizada. Según las respuestas de los alumnos, seleccionamos a seis de ellos, teniendo en cuenta las recomendaciones de la profesora y según hubiera avanzado en el proceso de generalización.

Instrumento de recogida de información

Cinco sesiones de trabajo constituyeron el experimento de enseñanza y fueron videograbadas. Además hemos realizado unas entrevistas semiestructuradas individuales a los seis estudiantes al finalizar las sesiones.

Sesiones de clase

En cada sesión planteamos una tarea de generalización con contextos diferentes y funciones lineales distintas, como presentamos en la Tabla 1.

Tabla 1

Características de la sesiones de clase

Contexto	Función
Sesión 1: máquina de bolas	$y = x+3$
Sesión 2: parque de atracciones 1°	
Sesión 3: parque de atracciones 2°	$y = 2x+1$
Sesión 4: cumpleaños	$y = 2x$
Sesión 5: paradas de tren	

Las funciones siguen una estructura aditiva y/o multiplicativa. Iniciamos la tarea preguntando por casos particulares del problema y, pasando por nuevos casos particulares, llegábamos a preguntar por la generalización. Algunas tareas tienen contextos novedosos y otras provienen de estudios previos que incluimos en nuestros antecedentes. En todas las sesiones del experimento usamos la misma dinámica, a saber; en primer lugar exponemos la tarea en gran grupo, después aplicamos los cuestionarios específicos de cada sesión y, por último, una puesta en común. Cada cuestionario consta de preguntas sobre una tarea de generalización diferente dada por los contextos que aparecen en la Tabla 1. Los estudiantes no recibieron realimentación sobre sus respuestas. Al aula entraron tres miembros del equipo de investigación: la profesora- investigadora, una investigadora de apoyo y otro investigador que grabó con la videocámara.

Entrevistas

Analizamos la información proveniente de una entrevista semiestructurada realizada tras el trabajo de las cinco sesiones. En la entrevista planteamos tareas que involucran una función lineal de tipo aditivo, usamos como contexto la edad de dos superhéroes cuya diferencia son 4 años (función $y = x+4$). Un miembro del equipo de investigación fue el entrevistador, quien comenzó introduciendo el contexto de la tarea. A continuación les mostró casos particulares (no consecutivos para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes) de la tarea y avanzamos inductivamente hacia la generalización. En la Figura 1 presentamos una síntesis del protocolo de actuación de la entrevista.

FORMA DIRECTA**1° Casos particulares**

- Identificar relación funcional.
 - Aplicar regla funcional en casos particulares diferente
1. Casos particulares dados
 Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9 Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11
 2. Casos particulares propuestos por el estudiante.
 Dime una edad para Iron Man (\square). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple el Capitán América?

2° Generalización

- Expresar la generalización
 ¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?
- Razonar con la generalización
 Un niño de la clase dice que “Cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años
 ¿Estás de acuerdo con él?

FORMA INVERSA**1° Casos particulares**

- Identificar relación funcional.
 - Aplicar regla funcional en casos particulares diferente
1. Casos particulares dados
 Cuando el Capitán América cumplió 5 años ¿cuántos cumplió Iron Man? Cuando el Capitán América cumplió 8 años ¿cuántos cumplió Iron Man?
 2. Casos particulares propuestos por el estudiante.
 Dime una edad para el Capitán América (\square). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple Iron Man?

2° Generalización

- Expresar la generalización
 ¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad de Iron Man?
- Razonar con la generalización
 Un niño de la clase dice que “Cuando el Capitán América tiene XX años, Iron Man tiene YY años
 ¿Estás de acuerdo con él?

Figura 1. Protocolo de la entrevista.

Análisis de datos

Tras transcribir las entrevistas, diseñamos un sistema de categorías basado en las estructuras identificadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general, y para las formas directa e inversa de la función. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Tenemos en cuenta el tipo de generalización expresada; inducida y/o espontánea.

Resultados

Presentamos los resultados sobre estructuras evidenciadas tanto en preguntas que involucran casos particulares como las que involucran el caso general a través de tablas-resumen, que complementamos con algunos ejemplos de las respuestas dadas por los estudiantes. Detallamos las estructuras evidenciadas en la forma directa e inversa de la función a tratar. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de entrevista; recogemos las estructuras de cada estudiante según su orden cronológico de aparición. Expresamos las estructuras identificadas por los estudiantes mediante simbolismo algebraico, aunque ellos no emplearan ese sistema de representación, como veremos en los ejemplos posteriores. En la Tabla 2 presentamos los resultados relativos a la forma directa de la función.

Tabla 2

Estructuras identificadas en la forma directa de la función

Estudiante	Estructura	
	Casos particulares	Caso general
E1	$y = x + 4$	$y = 4x$ $y = x + 4$
E2	$y = x + x$ $y = x + 4$	$y = x + 4$
E3	$y = x + 4$	$y = x + 4$
E4	$y = x + 4$ $y = x + x$	$y = x + 4$
E5	$y = x + 4$	$y = x + 4$
E6	$y = x + 4$	$y = x + 4$

Un mismo estudiante evidenció entre una y dos estructuras diferentes. Entre los casos particulares y el caso general, observamos tres tipos diferentes de estructuras: $x+4$, $4x$ y $x+x$. Señalamos los casos dados por E2 y E4 que ofrecieron la misma variedad de estructuras; identificaron una relación dada por el doble, en la forma $x+x$, para los casos particulares e identificaron la estructura correcta en el caso general.

Los estudiantes expresaron verbalmente la generalización. En sus generalizaciones (ver Tabla 2, columna 3) identificamos las estructuras $4x$ y $x+4$. Esta última evidenciada por los seis estudiantes. En el caso E1, el estudiante expresó inicialmente que hay que “multiplicar por 4 para obtener la edad del superhéroe mayor. Esto es un indicio de dificultad apreciada en diferenciar una estructura aditiva de otra multiplicativa. Destacamos ahora el caso E4 que generaliza bajo la relación $x+4$ expresando: “hay que sumar más 4”. Los estudiantes, E2 y E3 expresaron que deben “sumar más 4”. E1 generalizó cuestiones relativas tanto a casos particulares (generalización espontánea) como generales (generalización inducida). E2, E3, E4, E5 y E6 solo generalizaron de manera inducida. Por ejemplo E5 explicó en el caso general: “Iron Man tiene 4 años menos que el Capitán América y el Capitán América tiene 4 años más que Iron Man. Se llevan 4 años”. E6 generaliza expresando: “Si yo sé cuántos años tiene Iron Man y me dice que el otro tiene más 4 que él pues hago una suma de $5+4$ y sale 9”. En el siguiente fragmento observamos la generalización espontánea de E1, observada durante preguntas sobre casos particulares.

Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria

E (Entrevistador): cuando Iron Man cumplió 5 años el Capitán América cumplió 9, cuando Iron Man cumplió 7 años el Capitán América cumplió 11 y cuando Iron Man cumplió 3 años el Capitán América cumplió 7 años. ¿Puedes decirme alguna relación entre esos números?

E1 (Estudiante1): el Capitán América siempre le gana por 4 años más

En la Tabla 3 presentamos los resultados relativos a la forma inversa de la función.

Tabla 3

Estructuras identificadas en la forma inversa de la función

Estudiante	Estructura	
	Casos particulares	Caso general
E1	$x = y - 4$	NR
E2	$x = 2y$	NP
E3	$x = y - 4$	$x = y - 4$
E4	NP	NP
E5	$x = y - 4$	$x = y - 4$
E6	$x = y - 4$	$x = y - 4$

NR: no responde; NP: no se le pregunta.

Observamos que cada estudiante evidenció una sola estructura a lo largo de la entrevista. En total, observamos dos tipos diferentes de estructura incluyendo tanto las dadas en los casos particulares como en el caso general: $y-4$ y $2y$. Todos evidenciaron la estructura $y-4$ en algún momento de su trabajo tanto en los casos particulares como en el general salvo E2, quien identificó la estructura $2y$ y E4 al que no se le preguntó por la forma inversa por haberse encontrado cansado y disperso en ese momento de la entrevista. Lo hemos notado mediante NP. En este caso, E2 identificó $2y$ (estructura equivalente) en lugar de $y+y$ para los casos particulares. En cuanto a la generalización, los estudiantes la expresaron verbalmente. Distinguimos también en el estudio de la forma inversa de la función entre generalización inducida y espontánea. E1 no respondió en esa ocasión a la pregunta del caso general por eso notamos su respuesta con NR. A E2 y E4 no se les preguntó por el caso general ya que se encontraban distraídos en esta última parte de la entrevista y era difícil llevarla a cabo. Notamos esta situación mediante NP. Las generalizaciones dadas por los estudiantes E3 y E6 son inducidas. E6 expresaba “antes sumaba y ahora resto, yo siempre estoy restando 4”. Otro ejemplo de este tipo de generalización lo da E3:

E: ¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América conociendo la de Iron Man? E3: cuando nació Iron Man tenía el Capitán América 4 años y después vas sumando los años. Entrevistador: ¿qué has hecho tú?

E3: una resta, aquí: $9-4$, $8-4$, $352-4$.

Por otro lado, E5, generalizó de ambas formas: espontánea e inducida. “Antes sumaba 4 ahora resto 4” (generalización espontánea). A la pregunta que le realizamos en el caso general E5 contestó: “Siempre resto 4” (generalización inducida).

Conclusiones

Tras el análisis de los datos evidenciamos capacidades en los niños de 2° de Educación Primaria de este estudio para evidenciar estructuras involucradas en tareas de generalización que involucran funciones lineales, para las formas directa e inversa de la función. Del mismo modo que ocurre en Torres, Cañadas y Moreno (2018), los 6 estudiantes entrevistados en este estudio han identificado la estructura correcta de la relación funcional en al menos una ocasión a lo largo de la entrevista durante el estudio de la forma directa de la función tanto en los casos particulares como en el general. No obstante, los resultados sobre las estructuras identificadas durante el estudio de la forma inversa de la función son menos homogéneos. De los 6 estudiantes entrevistados cuatro identifican la estructura correcta en los casos particulares y tres en el caso general. Encontramos respuestas más incoherentes e imprecisas en el estudio de la forma inversa siendo estos resultados coherentes con los de Pinto y Cañadas (2017a). Las preguntas correspondientes se hicieron al final de la entrevista pudiendo influir la motivación o cansancio de los niños. La variedad y cantidad de estructuras identificadas es mayor durante el estudio de la forma directa de la función. La estructura $x+x$ es evidenciada por dos estudiantes en el trabajo con casos particulares de la forma directa de la función. No identificamos estructuras equivalentes para el caso $x+4$ con la forma directa de la función. Se puede deber al predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa. Sin embargo, con la forma inversa de la función encontramos la estructura $2y$, equivalente a $y+y$, en una ocasión, durante el trabajo con los casos particulares. En cualquier caso, la generalización más frecuente ha sido la generalización inducida en forma directa de la función (5 de 6 estudiantes). Tan solo E1 generaliza en las formas espontánea e inducida. Durante el estudio de la forma inversa son 2 de los 3 estudiantes que responden los que presentan un tipo de generalización inducida. Es E5 quien presenta generalización espontánea e inducida. Pinto y Cañadas (2017a, 2017b) indagan en las respuestas de niños mayores a los de 2° de Educación Primaria obteniendo evidencias de generalización y por ende de capacidades relacionadas con el pensamiento funcional. Nosotros concluimos con que ahora también existen capacidades en niños de nivel de 2° de Educación Primaria. Quedaría pendiente de estudio la interpretación de los estudiantes sobre las estructuras tratando con otro tipo de función en un contexto diferente para poder valorar si la dificultad añadida en la identificación de la forma inversa de la función depende de su forma aditiva.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias y bibliografía

- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). New York, NY: Routledge.

Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria

- English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 69-85.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Functional thinking and generalization in third year of primary school. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and Erme.
- Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos
- Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón, España: SEIE