



Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

Melissa Denisse **Castillo** Medrano

Pontificia Universidad Católica del Perú, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Perú

melissa.castillo@pucp.edu.pe

Jesús Victoria Flores **Salazar**

Pontificia Universidad Católica del Perú

Perú

jvflores@pucp.pe

Resumen

Desde nuestra práctica docente podemos ser testigos que los estudiantes presentan dificultades con el concepto área. Según diversos autores, esto se debe a la forma mecánica en la que se presenta dicho concepto en las aulas, asociado siempre al uso de fórmulas. En esta investigación se utilizó aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico y aspectos de la Ingeniería Didáctica como marco metodológico. Este taller tiene como propósito analizar la reconfiguración que realizan estudiantes de segundo grado de educación secundaria (13 y 14 años de edad) para determinar la medida de área de polígonos. En la primera parte mostraremos cómo se aborda la reconfiguración a través del tangram y la malla cuadrículada. En la segunda parte, se presentará la reconfiguración que realizaron estudiantes de segundo grado de secundaria y cómo esta les permitió determinar la medida de áreas de polígonos.

Palabras clave: reconfiguración, área como magnitud, registro de representación semiótica, aprehensiones.

Introducción

En el Perú menos del 50% de estudiantes a nivel nacional puede responder correctamente problemas vinculados al cálculo de la medida de área según el Ministerio de Educación del Perú (2016). Diversos autores (Douady & Perrin-Glorian (1987), Corberán (1996), Herendiné (2016)) mencionan que estas dificultades responden a la forma de enseñanza que se da en la escuela, enfocada más en la manipulación numérica y algebraica mediante la aplicación de fórmulas, en vez de la exploración de las relaciones geométricas que proporciona la figura.

Frente a esta realidad, surgen otras alternativas para abordar el concepto de área en el aula como la descomposición y composición. Según Duval (2012b), es posible hallar la medida del

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

área de un polígono a partir de su reconfiguración. Asimismo, existen otras variables que favorecen la operación de la medida del área, como el uso de la malla cuadrículada (Pessoa, 2010). Esto quiere decir que los estudiantes podrían determinar el área de un polígono, como el trapecio por ejemplo, mediante la reconfiguración y la malla cuadrículada sin hacer uso de la fórmula. (Borja, 2015).

En esta investigación nos focalizamos en analizar la reconfiguración para determinar la medida de área de polígonos, realizada por dos estudiantes de segundo grado de educación secundaria (aproximadamente entre 13 y 14 años de edad. Asimismo, analizamos los tipos de apprehensiones que utilizan durante la aplicación de la actividad.

Teoría de Registro de Representación Semiótica

Utilizamos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval como marco teórico, centrándonos en el registro figural y en la apprehensión operatoria de reconfiguración. Para Duval (2011) es esencial que en la actividad matemática se puedan movilizar muchos registros de representación semiótica. Según el autor existen cuatro tipos de registros: el registro de lengua natural, el algebraico, el figural y el gráfico. En esta investigación, nos enfocaremos en el registro figural. Según Duval (2004) las figuras juegan un papel fundamental en la comprensión de problemas de Geometría ya que forman un soporte intuitivo para las actividades mediante la exploración.

Duval (2012b) considera a la figura como una apprehensión cognitiva y menciona que existen cuatro maneras diferentes de apprehender el registro figural, según su rol estas son: apprehensión perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial; cada una de ellas independiente de las otras. En esta investigación trabajaremos con tres de ellas las cuales describiremos a continuación. La apprehensión perceptiva es la que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio. La apprehensión discursiva es aquella que corresponde a la explicación desde las propiedades matemáticas de la figura a las indicadas por la leyenda o por la hipótesis. Y la apprehensión operatoria tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras para lo cual se distingue tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional (Duval, 1994).

Duval (2012a) menciona que la reconfiguración es un tipo de modificación mereológica que consiste en la descomposición en unidades figurales de la misma dimensión que la inicial, para luego ser recombinadas en otra nueva figura. En la operación de reconfiguración, toda figura geométrica puede ser dividida en sub-figuras de diferentes formas como se observa en la Figura 1.

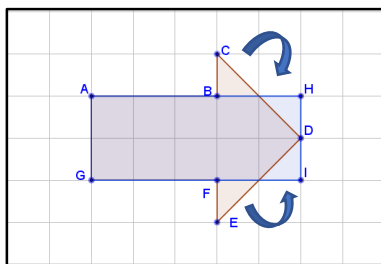


Figura 1. Tratamiento en el registro figural por reconfiguración (Castillo, 2018)

Existen además tres tipos de reconfiguración: estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea. La primera se da cuando las sub-figuras de la descomposición tienen la misma forma que la figura inicial; la segunda, cuando las sub-figuras tienen la misma forma entre ellas pero diferente a la inicial; y la tercera, cuando las sub-figuras tienen diferente forma entre ellas y diferente forma a la inicial.

Área como magnitud

Douady y Perrin-Glorian (1987) también mencionan que las dificultades observadas en relación con el concepto medida de área están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento a la medida del área mediante el uso de fórmulas, es decir un enfoque del área como número.

Por esta razón los investigadores proponen la necesidad de construir la noción de área como magnitud. En ese sentido, Da Silva (2011) adopta una organización conceptual para el área en tres cuadros y presenta un esquema inspirado en las investigaciones de Douady y Perrin-Glorian (1987) como se muestra en la Figura 2.

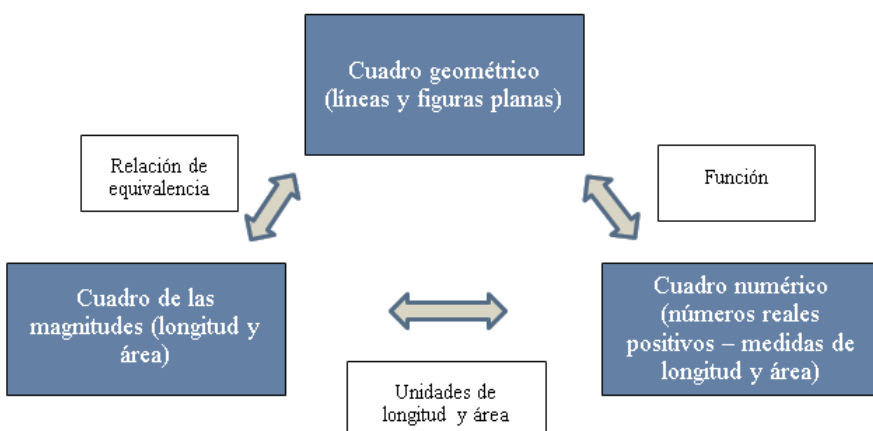


Figura 2. Organización conceptual de referencias del campo de las magnitudes longitud y área, y sus medidas (Da Silva, 2011)

Según Ferreira y Bellemain (2016), el cuadro geométrico está constituido por las superficies planas (cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, trapecio, etc.) y sus propiedades; el cuadro numérico está constituido por las medidas de área de las superficies planas que pertenecen a los números reales positivos; y el cuadro de las magnitudes está constituido por las clases de equivalencia de figuras de la misma área.

Los cuadros están constituidos por objetos que pertenecen a diferentes ramas de la matemática, las relaciones entre los objetos, sus formulaciones y sus imágenes mentales. Es por ello, que consideramos que un estudio del área como magnitud implica establecer distinciones entre el área y la figura, y entre el área y el número. En la distinción entre área y figura, la operación de la reconfiguración juega un papel importante, pues a partir de una figura inicial se puede producir otra figura por la descomposición y recomposición de sus partes, obteniendo así una nueva figura que mantiene la misma medida de área.

Metodología

En cuanto a la metodología, este estudio es de tipo cualitativo y como método utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) pues como nuestro interés es analizar los

procesos que realizan los estudiantes cuando trabajan en situaciones que involucran la medida del área de un polígono mediante la reconfiguración, consideramos que la Ingeniería Didáctica es la más idónea para nuestra investigación.

Como parte de la metodología, se creó dos actividades cada una con cierta cantidad de ítems que promovían en los estudiantes la comparación de áreas de figuras y la reconfiguración de diferentes polígonos para determinar su medida de área. En la Tabla 1 mostramos la organización de la secuencia de actividades y el tiempo utilizado en cada una de ellas:

Tabla 1

Descripción de la secuencia de actividades

Actividad	Descripción	Tiempo
1. Trabajemos con el Tangram	Realizar reconfiguraciones mediante el uso del Tangram para comparar las áreas de figuras de forma diferente.	80 min
2. Hallemos la medida del área de polígonos	Determinar la medida del área de polígonos usando lápiz y papel mediante el uso de la malla cuadrículada. Movilizar los conocimientos de reconfiguración.	40 min

El propósito de la Actividad 1 fue analizar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que realizan los estudiantes mediante el uso del Tangram, pues con esta actividad se buscaba relacionar el cuadro de las magnitudes con el cuadro de las figuras. Mientras que el propósito de la Actividad 2 fue analizar las reconfiguraciones que los estudiantes realizan a diferentes polígonos para determinar la medida de su área, usando lápiz, papel con malla cuadrículada y colores. Asimismo, que los estudiantes movilicen los conocimientos de reconfiguración adquiridos en la primera actividad, es decir lo que se está provocando es relacionar el cuadro de las figuras con el cuadro numérico.

Desarrollo de las actividades y análisis

Si bien esta investigación se realizó con 13 estudiantes de segundo grado de educación secundaria (entre 13 y 14 años) pertenecientes a una institución educativa privada de Lima, en el análisis de las actividades solo se trabajó con dos estudiantes (Sara y Abril) quienes fueron las que mostraron mayor interés durante toda la aplicación y nos proporcionaron mayor información en sus fichas de actividades. En este documento solo mostraremos el análisis a priori y el análisis a posteriori del ítem 1 resuelto por Sara.

Ítem 1

En el ítem 1 se le pidió al estudiante determinar la medida del área de las figuras considerando a cada cuadradito como unidad de medida y luego se le pidió justificar su respuesta, como se muestra en el Figura 3.

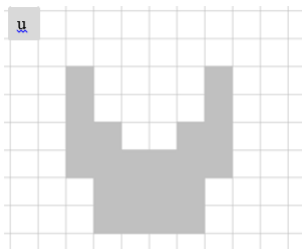


Figura 3. Ítem 1 de la Actividad 2 (Castillo, 2018)

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

Análisis a priori: Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa del polígono en relación con la malla (todos los lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

Para resolver este ítem esperamos que el procedimiento más usado sea el conteo de cuadraditos con el que se obtiene como respuesta 22u. Por otro lado, es posible que surjan otros procedimientos como por ejemplo la descomposición de la figura en once rectángulos cuyos lados midan 2 y 1, es decir, una descomposición homogénea. Después, se determine la medida del área de uno de los rectángulos y luego se multiplique este valor por la cantidad de rectángulos que hay en la figura. Otro posible procedimiento sería la reconfiguración heterogénea. Por ejemplo, la figura inicial se puede descomponer en tres sub-figuras: dos rectángulos y un dodecágono. Luego, mediante una aprehensión operatoria de modificación posicional se traslade los dos rectángulos y se obtenga una nueva figura en la que sea más fácil determinar su área (ver Figura 4).

Luego de ello, esperamos que el estudiante movilice su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem. Por otro lado, pensamos que este ítem sería el más fácil de la actividad puesto que todos los lados de la figura coinciden con las líneas de la malla cuadrículada.

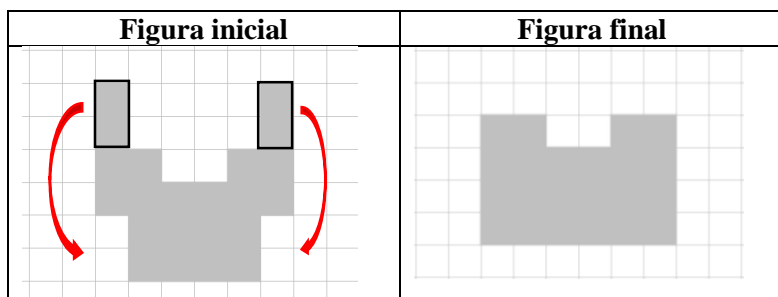


Figura 4. Posible reconfiguración del ítem 1

Análisis a posteriori de Sara: ella decidió usar colores como una forma de organizar mejor su trabajo. Como se muestra en el Figura 5, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea, para transformar su figura inicial en dos rectángulos. A diferencia de lo previsto en el análisis a priori, Sara realizó más descomposiciones en la figura. Ella descompuso la figura inicial en cuatro cuadrados, un rectángulo y un octógono. Luego, mediante una modificación posicional, trasladó los dos cuadrados verdes y los dos cuadrados rojos para completar los “espacios vacíos” y formar dos rectángulos, uno cuyos lados midan 6 y 3, y otro cuyos lados midan 4 y 1.

En cuanto a su aprehensión discursiva, podemos observar que Sara usó el término “mover” para referirse al movimiento de traslación, usó la frase “agrandar más de la cuenta” para referirse a una figura compuesta en la que no se puede obtener el área desde un principio. Cuando Sara dice que desea “crear dos figuras que me den el área” pensamos que Sara cree que solo puede calcular el área de figuras conocidas como el rectángulo por ejemplo. Por otro lado, podemos observar que Sara respondió correctamente la medida del área de la figura, sin embargo, falló en la unidad de medida elegida. Ella escogió al centímetro cuando el ítem indicaba que la unidad de medida era u.

Es importante mencionar que en nuestro análisis a priori, habíamos pensado que este sería el ítem más fácil y que por lo tanto les tomaría menos tiempo. Sin embargo, pudimos observar

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

que las estudiantes se demoraron en responder este ítem porque no encontraba números de forma explícita y por esta razón pensaban que la pregunta no se podía resolver.

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
<p>1. $1- 6 \times 3 = 18$ $2- 4 \times 1 = 4$ $18 + 4 = 22$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>22 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: Mover los cuadrados que hacían que la figura se agrandara más de la cuenta y los agregue en los espacios restantes para así crear dos figuras que me den el área.</p>

Figura 5. Reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2 producido por Sara

En el taller se pretende mostrar también el análisis a posteriori de los otros ítems resueltos por Sara cuyas imágenes se encuentran en el Apéndice A.

Después de realizar el análisis de las actividades, pudimos observar que ambas estudiantes (Sara y Abril) utilizaron a la reconfiguración como una estrategia para poder determinar la medida del área de los polígonos presentados en la ficha. No obstante, manifestaron dificultades en la selección de la unidad de medida.

También observamos que ambas estudiantes realizaron más descomposiciones que las que esperábamos en el análisis a priori, pensamos que esto se debe a que su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada. Por otro lado, ambas estudiantes lograron articular sus aprehensiones perceptivas, discursivas y operatorias. A lo largo de las dos actividades, las estudiantes lograron realizar conversiones de un registro a otro, generando así el aprendizaje.

Conclusiones

El tangram es un recurso que permite la producción de figuras por el proceso de reconfiguración. Este material facilitó que las estudiantes comprendieran que dos figuras que tienen diferente forma pueden tener la misma área, siempre y cuando estén compuestas por la mismas sub-figuras. Asimismo, permitió que las estudiantes realizaran reconfiguraciones homogéneas y heterogéneas.

La malla cuadriculada por su parte, propició la reconfiguración mediante la descomposición y composición de las figuras. Las reconfiguraciones más utilizadas en las figuras fueron las de tipo heterogénea. Asimismo, la malla cuadriculada facilitó el poder determinar la medida del área de los polígonos mediante el conteo de cuadraditos o la generación de rectángulos. En ese sentido, medir el área se entendió por determinar cuántas veces un cuadradito cabía en la figura.

Confrontamos los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, afirmamos que se logró validar el uso de la reconfiguración como una operación en el registro figural que permitió obtener la medida de área de diversos polígonos.

Agradecimientos

A la beca PAIP (Programa de Apoyo a la Investigación para estudiantes de Posgrado), a la

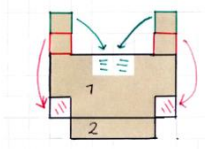
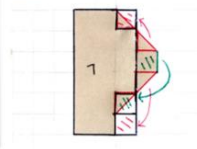
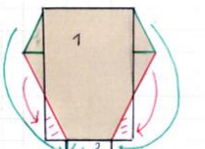
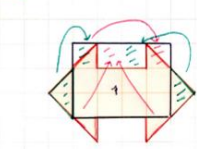
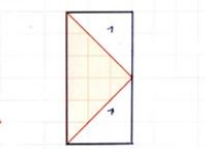
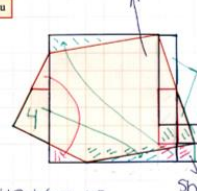
beca Marco Polo y a la beca RSU (Responsabilidad Social Universitaria) de la DARS (Dirección Académica de Responsabilidad Social).

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Borja, I. (2015). *Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Da Silva, J. (2011). *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.
- Douady, R.; & Perrin-Glorian, M. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathématiques-IREM*, 37, 1 – 51.
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (Obra original publicada en 1995).
- Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. São Paulo, Brasil: Proem editora.
- Duval, R. (2012a). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297.
- Duval, R. (2012b). Abordagem cognitiva de problema de Geometria em termos de congruência. Revista eletrônica de Educação Matemática. *Revemat*, 7(1), 118-138.
- Ferreira, L.; Bellemain, P. (2016). Aprendizagem e o ensino das grandezas geométricas no 6º ano: quais as raízes dos entraves enfrentados pelos alunos?. *I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática*. Mato Grosso do Sul.
- Herendiné, E. (2016). The level of understanding geometric measurement. *Ninth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education: CERME 9*, 536-542.
- Ministerio de Educación del Perú (2016). *Evaluación Censal de Estudiantes 2015: informe para docentes*. Segundo grado de secundaria. Lima.
- Pessoa, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Apéndice A

Respuestas de Sara a los 6 ítems de la Actividad 2

Ítem 1		Ítem 2	
Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva	Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
<p>1. $1 - 6 \times 3 = 18$ $2 - 4 \times 1 = 4$ $18 + 4 = 22$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>22 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: Movi los cuadrados que hacían que la figura se agrandara más de la cuenta y los agregué en los espacios restantes para así crear dos figuras que me den el área.</p>	<p>2. $7 \cdot 6 \times 3 = 18$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>18 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: Movi y sume diferentes cuadrados para crear un rectángulo.</p>
Ítem 3		Ítem 4	
Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva	Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
<p>3. $1 - 4 \times 6 = 24$ $2 - 2 \times 1 = 2$ $24 + 2 = 26$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>26 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: Cree dos rectángulos moviendo los cuadrados. Sumo y agregue los cuadrados que no estaban completos.</p>	<p>4. $1 - 4 \times 3 = 12$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>12 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: Junte dos cuadrados que estaban hasta la mitad y cree un cuadrado.</p>
Ítem 5		Ítem 6	
Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva	Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
<p>5. $6 \times 3 = 18 - 9 = 9$ $1 - 4 \cdot 5 \times 2 = 9$</p> <p>u</p> 	<p>Respuesta: <u>9 cm</u></p> <p>Justifique su respuesta: saque el promedio de un rectángulo entero y el espacio restante lo reste.</p>	<p>6. shape 1 $6 \times 7 = 42$</p> <p>u</p>  <p>$42 + 6 = 48$ shape 2</p>	<p>Respuesta: <u>48 cm</u> $3 \times 2 = 6$</p> <p>Justifique su respuesta: Movi bastantes cuadrados para poder crear dos figuras.</p>