



## Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo

Hellen Catherine **Serrano** Iglesias

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander  
Colombia

[hellen-serrano@hotmail.com](mailto:hellen-serrano@hotmail.com)

Solange **Roa-Fuentes**

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander; Grupo de investigación  
EDUMAT-UIS

Colombia

[sroa@matematicas.uis.edu.co](mailto:sroa@matematicas.uis.edu.co)

### Resumen

Este documento muestra los avances de una propuesta de investigación que busca caracterizar las *estructuras y mecanismos* mentales que evidencian estudiantes de secundaria (14 a 15 años) al resolver tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre representaciones estáticas y dinámicas del concepto de función. Para ello, se exponen los elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004), que fundamentan teóricamente esta propuesta. Además, se muestra una adaptación del Ciclo de Investigación de la teoría APOE que direcciona el desarrollo de este proyecto.

*Palabras clave:* función, coordinación, representaciones, registros, APOE, secundaria.

### Introducción

El concepto de función es una de las ideas fundamentales de las matemáticas actuales, ya que muchos de los otros conceptos de matemáticas y otras ciencias giran alrededor de este. Especialmente, se puede encontrar el concepto de función en los cursos de matemáticas de la escuela y la universidad. Sin embargo, este concepto es uno de los más difíciles de comprender (Eisenberg, 1991, Carlson y Oehrtman, 2005, Hitt, 2005, Sánchez, 2009). Una de estas dificultades es la falta de coordinación entre sus diferentes representaciones (Guzmán, 1998, Duval, 2004, Sánchez, 2009, Oviedo et al., 2012, Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016). Por ello, se hace necesario poner el foco en investigaciones previas, en las cuales se haya trabajado sobre el concepto de función.

### **Estudios sobre el concepto de función en Didáctica de las Matemáticas**

Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estos estudios se pueden citar autores como Eisenberg (1991), Carlson y Oehrtman (2005), Hitt (2005), Sánchez (2009), quienes insisten que los estudiantes siguen teniendo una comprensión débil del concepto de función. Por ejemplo, Carlson y Oehrtman (2005) proporcionan una visión general de lo que implica conocer y aprender el concepto de función. Los autores afirman que el concepto es difícil de comprender para los estudiantes porque en su enseñanza se hace mucho énfasis a los procedimientos. Aseguran Carlson y Oehrtman (2005): “este fuerte énfasis procedimental no ha sido efectivo para construir concepciones de funciones fundamentales, las que permiten la interpretación significativa y el uso de la función en varios escenarios representativos y novedosos” (p. 2).

Para contribuir sobre este fenómeno de estudio se han tomado como referentes teóricos la teoría APOE (Arnon et al., 2014) y los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004), ya que se consideran complementos uno del otro. Por un lado, la teoría APOE es un modelo que describe cómo se pueden aprender conceptos matemáticos; es un marco utilizado para explicar cómo puede construirse en la mente de un individuo un concepto matemático. Por otro lado, la teoría cognitiva de Duval estudia fenómenos relativos al conocimiento, es un marco para medir niveles de comprensión de los estudiantes.

### **Estudios sobre las representaciones semióticas y el concepto de función**

Los estudios realizados bajo la teoría de registros de representación, generalmente muestran que una de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función, es el paso de un sistema de representación a otro. Es decir, a los estudiantes se les dificulta conectar, o bien, articular los diferentes registros de representación, lo que hace que se limite el estudio del concepto de función, y por ende, la comprensión del mismo. Guzmán (1998), Duval (2004), Sánchez (2009), Oviedo et al. (2012), Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal (2016), entre otros autores así lo confirman en sus investigaciones. Se puede ver por ejemplo, el trabajo de Guzmán (1998), que toma el marco de las representaciones semióticas para su estudio. Allí la autora considera tres registros para analizar algunas representaciones de las nociones de funciones: gráfico, algebraico y lenguaje natural. Los resultados muestran que los estudiantes recurren a un solo registro, en especial, el algebraico. Además, las respuestas de los estudiantes se limitan al registro en el cual se plantea la pregunta, según la autora, esto se debe a que no logran coordinar dos o más registros.

### **Estudios sobre el concepto de función visto desde la Teoría APOE**

Un estudio preliminar hecho por Dubinsky (1991) sobre funciones, es fundamentado en la Teoría APOE y en la comprensión que él tiene del concepto desde el punto de vista matemático. Su intención es ilustrar el poder explicativo de la teoría y establecer pautas para el trabajo empírico posterior. Dubinsky manifiesta que una serie de actividades matemáticas pueden lograr que el estudiante construya un Esquema de función, más aún, estas actividades pueden requerir que el Esquema se reconstruya a un nivel más alto en el que una función, más allá de ser un Proceso interiorizado, es un Proceso que puede ser tratado como un Objeto por el sujeto como resultado de la encapsulación (Dubinsky, 1991).

En general, Dubinsky ha observado que una parte importante al entender una función, es construir un Proceso que se pueda utilizar para dar sentido a un cierto tipo de fenómeno. Este Proceso, necesariamente requiere de la interiorización o encapsulación por parte del individuo.

En otras palabras, más allá de replicar algún procedimiento, se requiere de mecanismos de abstracción reflexiva para que el individuo pueda construir el concepto de función.

Se resalta que aunque inicialmente las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado, donde según Romero (2016) se espera que los estudiantes ya cuenten con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar, hoy se pueden encontrar investigaciones en el nivel de secundaria, y otras más, que se proponen por ejemplo, con poblaciones con discapacidad auditiva.

Las investigaciones presentadas hasta aquí junto con otras ya realizadas por varios autores, han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Estos y otros estudios han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Para continuar, se describen las estructuras y mecanismos mentales que explican la construcción de conocimiento matemático y su rol en el diseño de una descomposición genética. Además se explica de manera general el Ciclo de Investigación que propone la teoría. Por otra parte se discuten elementos fundamentales de la teoría de Registros de Representación que son usados para estudiar fenómenos relativos al conocimiento.

### Referente Teórico

#### Elementos de la Teoría APOE

##### **Estructuras y mecanismos mentales: Teoría APOE y construcción de conocimiento matemático**

En términos de APOE, una *estructura mental* es cualquier estructura relativamente estable que usa un individuo para dar sentido a situaciones matemáticas (Arnon et al., 2014). Dicha estructura es construida en la mente del individuo y puede seguir desarrollándose gracias a lo que se denomina: *mecanismo mental* (medio por el cual se desarrolla una estructura mental). En esta teoría, las estructuras son definidas como: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, de ahí el acrónimo de APOE, y los mecanismos como: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación, tematización y generalización.

Una *Acción* es una transformación guiada por un conjunto de instrucciones externas al individuo. Estas Acciones se realizan paso a paso, cada paso es fundamental y no es posible omitir ninguno. Dichas Acciones pueden ser básicas o complejas dependiendo del contexto y la experiencia de cada individuo. En el caso de las funciones, por ejemplo, si un individuo sustituye algunos valores del dominio en funciones de las que conoce su expresión algebraica, y encuentra su imagen, se considera que tiene una concepción Acción del concepto.

Los *Procesos* son Acciones interiorizadas que se construyen usando el mecanismo de interiorización o de coordinación. A medida que las Acciones se repiten y el individuo ya no depende de instrucciones externas, sino que ahora tiene control sobre ellas se dice que la Acción ha sido interiorizada en un Proceso (Arnon et al., 2014). Esto es, el individuo tiene la capacidad de omitir, invertir o imaginar el paso a paso, sin tener que realizar explícitamente cada uno de ellos. Para el caso de las funciones, el individuo puede pensar en un elemento de entrada que es

transformado dada una regla, para generar un elemento de salida. El mecanismo de interiorización le permite al individuo considerar que todos los elementos del dominio han sido transformados. Cuando el individuo construye un Proceso es consciente y reflexivo sobre las Acciones que realiza.

El mecanismo de *encapsulación* va más allá de la concepción Proceso, este ocurre cuando un individuo busca aplicar acciones sobre un Proceso. Para el caso del concepto de función, este mecanismo permite realizar composiciones y aplicar transformaciones sobre funciones. Es decir, generar nuevas funciones a partir de funciones conocidas.

La *desencapsulación* se da cuando un individuo necesita regresar al Proceso que dio origen al Objeto, siempre que sea necesario.

El mecanismo *coordinación*, fundamental en la construcción de algunos Objetos y más aún, en esta investigación, se puede evidenciar cuando el individuo tiene dos o más Procesos y necesita construir un único Proceso que pueda ser encapsulado.

El mecanismo de *reversión* permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso. Un ejemplo de este mecanismo puede darse cuando el individuo necesita trabajar sobre la función inversa.

Los *Esquemas* son un conjunto de otras estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos, otros Esquemas) que contienen las descripciones, la organización y los ejemplos de dichas estructuras que un individuo ha construido alrededor de un concepto matemático. Finalmente, el mecanismo *tematización* es el que posibilita a un individuo aplicar transformaciones al Esquema construido.

Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son generalmente presentadas como aparece en la Figura 1.

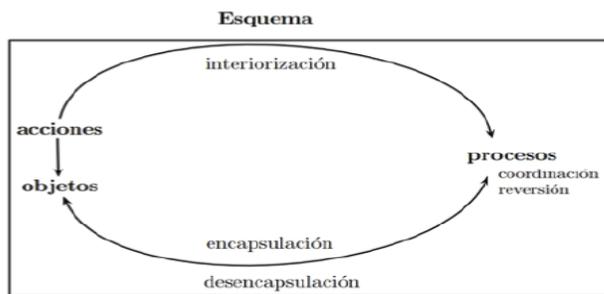


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

La relación entre los elementos que se muestran en la figura 1 es considerada por Dubinsky (1991), citado en Arnon et al. (2014), como un "sistema de retroalimentación circular". Del mismo modo Asiala et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014), describen la interacción entre las estructuras y los mecanismos que la generan: La construcción de un Objeto matemático inicia cuando un individuo manipula Objetos construidos previamente; esta manipulación está definida por las Acciones que puede realizar sobre él. Dichas Acciones al ser interiorizadas por el individuo son estructuradas en Procesos que posteriormente son encapsulados para formar Objetos. Los Objetos, pueden desencapsularse para regresar sobre el Proceso que le dio origen. Por último, las Acciones, los Procesos y los Objetos pueden ser organizados en Esquemas.

Las estructuras y mecanismos mentales que constituyen la Teoría APOE, fueron descritos con el fin de dar paso al desarrollo de modelos teóricos que un individuo construye para aprender un concepto. Estos modelos son llamados *descomposiciones genéticas*.

### **Descomposición Genética**

Una descomposición genética en palabras de Arnon et al., es “un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender algún concepto matemático específico” (p. 27).

Estas descomposiciones pueden ser fundamentadas desde experiencias de aprendizaje o enseñanza, hasta el análisis de libros de texto. Las descomposiciones genéticas también pueden fundamentarse en resultados de investigaciones previas, el desarrollo histórico epistemológico de los conceptos matemáticos, entre otros aspectos que definen los conceptos matemáticos y su didáctica. Las descomposiciones genéticas de un concepto o noción matemática no son únicas, están determinadas por la experiencia de los individuos resolviendo situaciones más o menos relacionadas con un concepto o noción particular.

### **Ciclo de investigación basado en la Teoría APOE**

Las investigaciones fundamentadas en APOE involucran tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrucción, y recolección y análisis de datos.

Inicialmente, en el ciclo de investigación, se propone un *análisis teórico* del desarrollo cognitivo del concepto a estudiar, en el caso de esta investigación: el concepto de función. Esta primera componente de análisis teórico, genera una descomposición genética preliminar basada en la comprensión matemática del concepto de función desde diversas maneras: como lo comprende el investigador, los libros de texto, como se comprende históricamente, a través de las experiencias como docente, o de investigaciones hechas previamente, entre otras. Esta descomposición genética preliminar guía el *diseño e implementación de enseñanza* que es justamente la segunda componente de este ciclo de investigación. La enseñanza está orientada, en palabras de los autores, a “promover la abstracción reflexiva en lugar de obtener respuestas correctas” (Arnon et al., 2014, p. 58). Si esta descomposición preliminar es una buena aproximación a la construcción del concepto de función, la tercera etapa, *recolección y análisis de datos*, va a permitir la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. En esta implementación, se recolectan los datos para dar respuesta a dos interrogantes: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94).

Si el investigador concluye que en efecto, los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética preliminar, pero no aprendieron el concepto en cuestión, el análisis teórico es reconsiderado y modificado. Pero si ni siquiera realizan las construcciones descritas por la descomposición genética preliminar, la enseñanza debe ser reconsiderada y modificada. Es decir, este ciclo puede ser repetido hasta dar respuesta afirmativa a los dos interrogantes propuestos y tener como resultado, una descomposición genética validada.

### **Elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica**

Una *representación* es interpretada por Duval como una “codificación de la información”. Además, Duval asegura que “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin

recurrir a la noción de representación” (Duval, 2004, p.25). Por otro lado, Duval se refiere a la *semiosis* como una implicación de la variedad de signos que pueden ser utilizados para ponerlos en correspondencia. En efecto, los sistemas semióticos, que permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (representación de alguna cosa, transformar las representaciones, y convertir las representaciones) se denominan *registros de representación semiótica*.

El autor analiza entonces, las representaciones semióticas en las que se llevan a cabo todos los aprendizajes sujetos a una enseñanza, ya que dichas representaciones permiten una “mirada del objeto”. Las representaciones semióticas pueden ser: esquemas, figuras, gráficos, expresiones simbólicas, etc. Además, Duval afirma que la propiedad más importante de esas representaciones es su transformabilidad en otras representaciones que guardan todo el contenido de la representación inicial, o que guardan solo una parte de ese contenido. Particularmente, esta transformabilidad se da con las actividades cognitivas de las representaciones semióticas, las cuales son descritas a continuación.

### **Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis**

Las actividades de *formación*, *tratamiento* y *conversión* que se presentan en este apartado, son fundamentales para el análisis de un aprendizaje conceptual. Dicho aprendizaje centrado en el cambio y la coordinación de los distintos registros de representación, resulta muy beneficioso en la comprensión de conceptos (Duval, 2004, p. 49).

La primera actividad, la *formación* de una representación semiótica, es el medio de selección de unos signos que establecen lo que se quiere representar. Esto es, el medio para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. Por ejemplo, se realiza la actividad de formación cuando se representa una función en lenguaje algebraico. La segunda actividad, la actividad de *tratamiento*, consiste en transformar una representación inicial en otra representación terminal dentro del mismo registro, con el fin de “expandir” la información brindada. En el caso de las funciones, cuando se pasa de escritura conjuntista a escritura funcional, se está haciendo tratamiento de la representación, ya que ambas escrituras hacen parte del registro algebraico. La tercera actividad conocida como *conversión*, consiste en transformar una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial, por ejemplo, transformar una función del lenguaje algebraico a un esquema gráfico, pero sin ser reducida a un algoritmo. Esta actividad puede favorecer la coordinación de los registros de representación.

### **Método**

El método que será usado para la investigación, es el ciclo de investigación de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) con algunas adaptaciones en el diseño e implementación de enseñanza. En dicha componente se puede ver el rol que juega la Teoría de Duval en esta propuesta de investigación.

A continuación se describe el desarrollo de cada una de estas componentes.

### **Análisis teórico**

El objetivo principal de esta componente, es diseñar una descomposición genética preliminar del concepto de función basada en estudios de libros de texto, investigaciones previas y experiencia propia, que determine un camino viable para los estudiantes. Es decir, dicha descomposición debe ser realizable por los estudiantes, para que puedan construir el concepto de

función.

Para el diseño de la descomposición genética, se toma como guía el trabajo realizado por Roa-Fuentes y Asuman Oktaç (2010) en el cual dan a conocer el procedimiento que siguieron para diseñar una descomposición genética sobre el concepto de transformación lineal.

Después de realizar la descomposición genética preliminar, se pasa a la siguiente componente del ciclo de investigación: diseño e implementación de un modelo de enseñanza.

### **Diseño e implementación de un modelo enseñanza**

Los individuos que participan en esta investigación son estudiantes que cursan noveno grado (14 – 15 años) en la institución pública Fundación Colegio de las Américas, ubicada en el municipio de Bucaramanga.

Inicialmente, se genera un espacio para que los estudiantes se familiaricen con un ambiente dinámico, específicamente, con el software de geometría dinámica GeoGebra. Siguiendo el ciclo metodológico de ACE (estrategia pedagógica que consta de tres componentes: Actividades, discusión en Clase, y Ejercicios), se busca introducir actividades en el aula para promover los mecanismos asociadas a la abstracción reflexiva. Las actividades buscan potenciar la construcción de estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. Estas actividades debido a que están fundamentadas en la teoría de Duval, incluirán problemas de situaciones nuevas que involucren la transformación de estructuras previas y que permitan la coordinación entre las diferentes representaciones del concepto de función. En la discusión en clase, se espera que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando. Finalmente, se dejan tareas extra-clase para que refuercen el trabajo que han realizado.

### **Recolección y análisis de datos**

Para la validación de la descomposición genética preliminar y la implementación de la enseñanza, se usan tres instrumentos: 1. Prueba diagnóstica, 2. Prueba pos-instrucción, y 3. Entrevista semiestructurada.

La prueba diagnóstica evalúa las construcciones previas a la enseñanza sobre el concepto de función y si estas construcciones son las propuestas en la descomposición genética preliminar. Asimismo la prueba diagnóstica evaluará las habilidades de los estudiantes en los registros de representación. Con la prueba pos-instrucción se espera caracterizar las concepciones desarrolladas por los estudiantes y se pretende responder a los interrogantes planteados en el ciclo de investigación: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94). Se recuerda que para validar la descomposición genética preliminar, la respuesta a estos dos interrogantes debe ser afirmativa. Finalmente, la entrevista semiestructurada se propone para que los estudiantes tengan la oportunidad de defender sus respuestas en la prueba pos-instrucción. Más aún, la entrevista es el instrumento que ayuda a validar las construcciones mentales que se caractericen en la descomposición genética.

### **Reflexiones iniciales**

Dado que las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE, inicialmente se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado (matemáticas universitarias), se esperaba que los estudiantes ya contaran con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar. Esta propuesta, por el contrario, pretende trabajar con estudiantes que tienen sus primeros acercamientos

formales al concepto de función, para que estos logren construir estructuras más sólidas del concepto.

La descomposición genética diseñada, podría servir como herramienta para describir y predecir el pensamiento matemático de un individuo genérico, es decir, la descomposición genética puede ser usada por cualquier estudiante que tenga las características generales del grupo en el que se pretende llevar a cabo la enseñanza, esto es, “está al alcance” de cualquier estudiante que curse noveno grado. No es una forma que solo pueda usar un individuo con características particulares. Dicha descomposición también podría ser una herramienta para elaborar secuencias de enseñanza, incluso, secuencias elaboradas por el profesor mismo.

Se hace énfasis en que este documento muestra los avances de una propuesta de investigación, por ende, ésta sigue en construcción.

### Referencias y bibliografía

- Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.
- Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 5-21.
- Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En Cortés C. Et Hitt F. (Éds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, 81-108. México: Morevallado.
- Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36.
- Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A. y Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, 25, 188-205. doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de transformaciones lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas*. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
- Sánchez, B. I. (2009). Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 4, 45-71.