Pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de primaria cuando resuelven actividades con patrones numéricos

Genny Rocío **Uicab** Ballote
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rocio.uicab@cinvestav.mx
Montserrat **García**-Campos
Universidad Pedagógica Nacional
México
mgarciac@g.upn.mx

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados preliminares de una investigación, que indaga sobre cómo se manifiesta el pensamiento funcional en estudiantes de entre 10 y 12 años cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran funciones de dos variables. Se asume presencia de pensamiento funcional cuando los estudiantes pueden expresar una correspondencia entre las dos cantidades variables involucradas. En este documento se reportan resultados del análisis de las respuestas a 13 actividades aplicadas a 31 estudiantes de una escuela primaria pública en Tekit, Yucatán, México.

Palabras clave: pensamiento funcional, patrones numéricos, correspondencia, niños de 10-12 años.

Introducción

El interés en fomentar el pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas (estudiantes de Educación Primaria) no es una idea nueva, en la última década ha habido un mayor énfasis y también aceptación para desarrollar ideas algebraicas en estas edades. Existen trabajos de investigación que reportan cómo diversos niños de educación primaria generan estrategias, argumentan y justifican ciertas tareas matemáticas que le son presentadas, evidenciando en ellos, ideas algebraicas (e.g. Kieran, 2004; Carraher, Schlieman, Brizuela y Earnest, 2006; Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Blanton, 2014).

De acuerdo con Tanişli (2011) uno de los componentes básicos del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional. En edades tempranas dicho pensamiento implica centrarse en la relación entre dos cantidades variables; de este modo el pensamiento funcional puede contribuir al estudio de conceptos algebraicos como el de función (Blanton y Kaput, 2004). No se trata de introducir las funciones como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover el pensamiento funcional desde edades tempranas.

El presente trabajo expone cómo las respuestas de estudiantes de quinto grado de una escuela primaria en Tekit, Mérida, México, proporcionan evidencia de su pensamiento funcional, cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran dos variables.

Marco de referencia

Pensamiento funcional

El concepto de pensamiento funcional fue usado por primera vez a finales del siglo XIX, principios del siglo XX por el matemático alemán Felix Klein, quien fuera líder en el movimiento de reforma de la educación matemática en Europa. Klein consideraba el pensamiento funcional como la idea central de la enseñanza matemática (Eisenmann, 2009). El foco de atención de este pensamiento son las funciones, pues la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes, siendo tema de interés para la Matemática Educativa. En la mayoría de los países este concepto aparece en el currículo a partir de la secundaria.

Existen enfoques y posturas respecto al pensamiento funcional. Para Blanton, Levi, Crites & Dougherty (2011), fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas y puede caracterizarse como el proceso de construcción, descripción y razonamiento en torno a las funciones. Si bien el pensamiento funcional incluye generalizar las relaciones funcionales entre cantidades y representar y razonar con esas relaciones para comprender el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011); Warren y Cooper (2005) hacen notar que las primeras pautas del pensamiento funcional pueden incluir ideas de cambio cualitativo ("soy más alto"), cambio cuantitativo ("soy 2 cm más alto"), relaciones entre esos cambios (si todos crecieron en la misma cantidad de cm y Juan cambió de altura de 143 a 145 cm, ¿cuánto creció Pedro?) y el uso de esas relaciones para resolver problemas (si la altura de Alison ahora es 133 cm, ¿qué altura tenía antes de que creciera?). También ayuda a desarrollar la comprensión de las relaciones entre las operaciones, particularmente la relación inversa (por ejemplo, la suma y la resta son operaciones inversas). Estos últimos autores reconocen que cuando los niños trabajan con actividades en las que pueden hacer conexiones entre las diversas operaciones, explorar el cambio con relaciones aritméticas, tienen oportunidades para conjeturar y argumentar, lo cual contribuye desde edades tempranas al pensamiento funcional en etapas posteriores.

Por lo general, en la educación primaria se da poco énfasis a las relaciones y transformaciones matemáticas como objetos de estudio. Para trabajar con relaciones y transformaciones matemáticas es necesario el concepto de función: cómo el valor de ciertas cantidades se relacionan con el valor de otras cantidades o cómo los valores son cambiados o mapeados (transformados) hacia otras cantidades (Warren y Cooper, 2005).

Para Smith (2008) el pensamiento funcional es el pensamiento representacional que se enfoca en las relaciones entre dos (o más) cantidades que varían, específicamente los tipos de pensamiento que conducen desde relaciones específicas (instancias individuales) a generalizaciones de dichas relaciones. Este autor hace una distinción entre dos tipos de pensamiento algebraico: pensamiento representacional y pensamiento simbólico. El pensamiento simbólico es considerado como la manera en que uno entiende y usa un sistema de símbolos. El pensamiento representacional es reservado para designar el proceso mental a través del cual un individuo crea un significado referencial para algún sistema representacional. En edades tempranas, el principal interés está en el pensamiento representacional, en cómo los niños crean representaciones significativas, y al hacerlo construyen y expresan generalizaciones. El pensamiento funcional ocurre cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representación para representar una generalización de una relación entre cantidades variables.

Entre las actividades que pueden contribuir al desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas están las que involucran patrones numéricos.

Patrones numéricos

Un patrón matemático se puede describir como cualquier regularidad predecible, generalmente involucrando relaciones numéricas, espaciales o lógicas. En cada patrón, los diversos elementos están organizados de manera regular. Por ejemplo, en el patrón creciente de los números cuadrados 0, 1, 4, 9,..., los números aumentan en 1, 3, 5..., respectivamente, resultando la secuencia de números impares. La estructura matemática que subyace a un patrón matemático puede expresarse en forma de generalización –relación numérica, espacial o lógica– la cual es verdadera para cierto dominio (Mulligan y Micheltmore, 2009).

Las actividades con patrones pueden conducir al desarrollo temprano del pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2006). Sin embargo, es importante considerar patrones en los que se involucran dos o más cantidades simultáneamente, es decir, prestar atención a cómo dos o más cantidades varían simultáneamente (Blanton y Kaput, 2004). En una relación funcional pueden identificarse las relaciones entre el patrón numérico y su posición, las cuales pueden generalizarse mediante una regla que permita encontrar cualesquiera valores, por ejemplo, el de la variable dependiente dado el valor de la variable independiente.

Objetivo de investigación

Se pretende dar cuenta del pensamiento funcional que manifiestan estudiantes de 10 a 12 años cuando resuelven actividades que involucran funciones de dos variables con patrones numéricos y en situaciones en contexto.

Metodología

El estudio es de naturaleza cualitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Con el fin de obtener información de cómo se manifiesta el pensamiento funcional se analizan las producciones de los estudiantes (en su propio lenguaje) a las tareas que les fueron presentadas.

Participantes

Las actividades fueron aplicadas en diferentes fechas (durante el ciclo escolar 2017-2018), a 31 estudiantes que en ese momento tenían entre 10 y 11 años, inscritos en quinto grado de primaria en una escuela pública, ubicada en el municipio de Tekit, Yucatán, México. Las actividades fueron entregadas impresas, los estudiantes trabajaron de manera individual y no hubo intervención por parte del investigador. Se les explicó que se requería su participación para resolver unas actividades, se les solicitó leer las instrucciones cuidadosamente y exhortó resolver de acuerdo a lo que entendieran de las actividades, sin embargo también se les externó que en caso de no poder resolver alguna pregunta podían dejarlo en blanco o escribir un comentario como “no lo entendí” o “no supe qué hacer”.

Etapas para la toma de datos

Se consideran dos etapas para la toma de datos. La primera etapa, que hemos denominado diagnóstica, se conforma del diseño y aplicación de 13 actividades que involucran funciones de dos variables, de la forma $f: N \rightarrow N$. Con base en el análisis de las respuestas obtenidas en la primera etapa, algunos estudiantes serán seleccionados para llevar a cabo la segunda etapa que consistirá en una entrevista semiestructurada a través del diseño y aplicación de actividades de situaciones en contexto, que permitan indagar diversos aspectos que caractericen el pensamiento funcional que subyace en los estudiantes.

En este documento se reportan los resultados de la primera etapa cuya finalidad consistió en saber si los estudiantes pueden identificar y describir las relaciones de correspondencia entre las variables. Se centra la atención en si pueden establecer la relación entre dos conjuntos y la manera en que escriben la regla que la representa, ya sea en lenguaje natural o pre simbólico.

Diseño de las actividades de la primera etapa

Las 13 actividades se caracterizan de la siguiente forma. Cabe señalar que este tipo de actividades no forman parte del currículum oficial, fueron diseñadas para la investigación.

- De la 1 a 8 involucran a las funciones $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 4x$, $f(x) = x + 4$. Se presenta el patrón numérico mediante una figura con puntos y se especifica el número de la figura correspondiente (relación de correspondencia entre el número de puntos de la figura y el número de figura). Se promueven un razonamiento inductivo para encontrar una regla de correspondencia que no se solicita explícitamente, pero que podría evidenciarse en el inciso e) al pedir el número de puntos para una figura que se encuentra alejada de las demás (ver Figura 1). Según Polya (1965) el razonamiento inductivo conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y sus combinaciones.
- Las actividades 9 y 10 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$. A diferencia de las primeras 8 actividades, se presenta el patrón con valores y se asocia a cada valor su posición. Nuevamente se promueve un razonamiento inductivo, pero el énfasis de estas actividades está en la generalización. La característica central de estas actividades es la solicitud explícita de una regla (ver Figura 2).
- Las actividades 11 a 13 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$, $f(x) = 4x$. La información se presenta a través de tablas horizontales y verticales. La característica principal de estas actividades son pequeñas situaciones en contexto. Se espera que los estudiantes puedan apreciar diferentes presentaciones de algunas funciones, por ejemplo: $f(x) = 2x$ y $f(x) = x + 2$ que aparecen en los tres grupos de actividades. También se pretende que los estudiantes encuentren –mediante la regla aritmética– no sólo la variable dependiente a partir de la independiente, sino también inversamente (ver Figura 3).

Análisis y Resultados

El análisis de las 13 actividades se realizó en dos direcciones:

- Se examinaron todos los incisos de cada actividad como ítems individuales –excepto los incisos a) y b) de las actividades 1 a 8 en virtud de que son preámbulo para promover la relación funcional–. Bajo esa consideración se tiene el registro de 37 respuestas por cada estudiante. En la Tabla 1 se presentan las respuestas clasificadas de cada estudiante.

- Se examinaron todas las actividades desde su primer inciso hasta el último para apreciar el proceso que guía a un estudiante a establecer o no una relación de correspondencia.

Tabla 1

Clasificación de las respuestas de los estudiantes.

E	S/R	S/C	R	RAI	RAE	Total	E	S/R	S/C	R	RAI	RAE	Total
E1	0	12	19	5	1	37	E15	0	5	17	12	3	37
E2	4	25	4	4	0	37	E16	0	0	7	16	14	37
E3	0	25	8	4	0	37	E19	2	17	8	8	2	37
E4	0	6	10	15	6	37	E20	2	15	10	8	2	37
E5	12	19	4	2	0	37	E21	1	10	13	12	1	37
E6	0	0	16	14	7	37	E22	0	6	16	10	5	37
E7	0	9	9	14	5	37	E23	0	5	14	17	1	37
E8	0	0	11	19	7	37	E24	0	23	5	9	0	37
E9	0	1	8	16	12	37	E25	10	12	8	6	1	37
E10	0	8	17	11	1	37	E26	0	17	13	7	0	37
E11	2	28	5	2	0	37	E27	1	11	17	7	1	37
E12	0	8	7	16	6	37	E28	0	19	14	4	0	37
E13	0	11	11	9	6	37	E30	0	30	4	3	0	37
E14	0	5	18	8	6	37	E31	0	29	6	2	0	37

Notas: E=Estudiante; S/R=Sin respuesta; S/C=Sin clasificar; R=Recursión; RAI=Respuesta Aritmética Implícita; RAE=Respuesta Aritmética Explícita. Los estudiantes E17, E18 y E29 contestaron en promedio 5 actividades porque solían faltar a clases, por tal motivo se consideró omitirlos.

Se identificaron tres formas de resolver las actividades:

- Recursión (R). Encontrar el valor n de la variable dependiente, apoyándose del resultado $n - 1$, obtenido anteriormente.
- Regla aritmética implícita (RAI). Encontrar el valor n de la variable dependiente sin apoyarse del valor $n - 1$ (recursivamente). Se interpreta el uso de una regla aritmética que relaciona a las dos variables involucradas pero, o no hay procedimientos que den cuenta de la regla o son imprecisos. Algunas respuestas suelen expresar solamente la variación de la variable dependiente (quizá esto se deba a la especificidad de las preguntas, pero se considera que implícitamente sí se relacionan a las variables).
- Regla aritmética explícita (RAE). Identificar y escribir –en lenguaje natural o pre simbólico– la relación (regla) entre las dos variables involucradas.

La referencia S/R indica que el estudiante escribió comentarios del tipo “no sé”; “éste se me complicó”; o es una pregunta que quedó sin contestar. S/C compete a una respuesta sin poder clasificar en alguna de las anteriores, por ejemplo: para la actividad cuya función es $f(x) = x + 4$, (x: número de la figura, $f(x)$: número de puntos) ante la pregunta ¿cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? un estudiante respondió “pones 2 bolitas de 80”.

A continuación, se exponen las producciones de tres estudiantes con respuestas R, RAI y RAE.

El estudiante E9 en la actividad 2 (ver Figura 1), responde correctamente los incisos a) y b), se puede decir partir de lo que respondió que hay un proceso recursivo (R). En los incisos c) y d) realiza una generalización y establece una regla aritmética implícita (RAI) que le permite encontrar el número de puntos para las figuras 10 y 25. La regla se hace explícita (RAE) en lenguaje natural al explicar cómo ha encontrado el número de puntos para la figura 100. E9 escribe: "[…] el número de figura es (debió escribir 'se')[1] multiplica en 2 y da el resultado". Lo anterior es evidencia de que E9 encuentra una relación entre el número de la figura (valor 100, que compete a la variable independiente) la cual debe multiplicarse por 2 para obtener un resultado (valor 200, que corresponde a la variable dependiente: número de puntos de la figura).

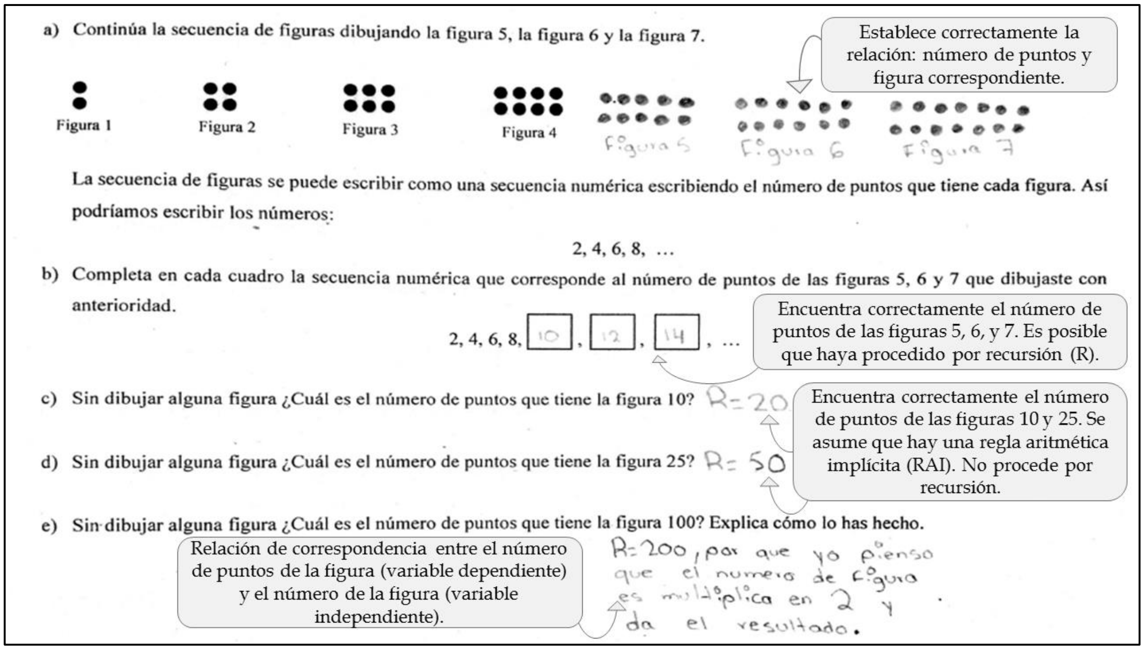

Figura 1. Respuestas de E9 en la Actividad 2. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

El estudiante E15 en la actividad 9 empieza resolviendo el inciso a) de forma recursiva (R) explicando en el inciso b) que los números de la secuencia numérica se obtienen "sumando 2" (ver Figura 2). Cuando plantea la regla (inciso c) que permite encontrar cualquier número de la secuencia escribe en lenguaje natural: "Multiplicando por 2 el término que tiene"; esto es, puede generalizar mediante un razonamiento inductivo (en el sentido de Polya). Posteriormente en el inciso d) aplica la regla que proporcionó de forma operativa "500 x 2 = 1000", este procedimiento da evidencia de la relación que establece entre el valor que toma la variable independiente (500) con el valor resultante de la variable dependiente (1000) (RAE). Finalmente (inciso e), propone un término de la secuencia numérica y encuentra el número que le corresponde. Al hacer uso de su regla se considera, que hay evidencia de que E15 entiende que la regla expresa generalidad, es decir, con ella puede encontrar cualquier valor de la secuencia.

El estudiante E6, en la actividad 13, para encontrar la cantidad de kilos de mango que se pueden adquirir con 200 pesos resuelve mediante una proporción. La resolución de una igualdad de razones, en este caso $\frac{(200)(1)}{4} =$ Número de kilos de mango (ver Figura 3), involucra la relación entre las variables cantidad y costo (RAE). E6 también encuentra correctamente la cantidad y costos faltantes lo que manifiesta conexión entre la multiplicación y división como operaciones inversas. Asimismo, incluye los símbolos "k" y "$" para denotar kilos y costo

[1] Comentario del investigador.

respectivamente, lo que evidencia que puede expresar la relación entre las variables con lenguaje pre simbólico.

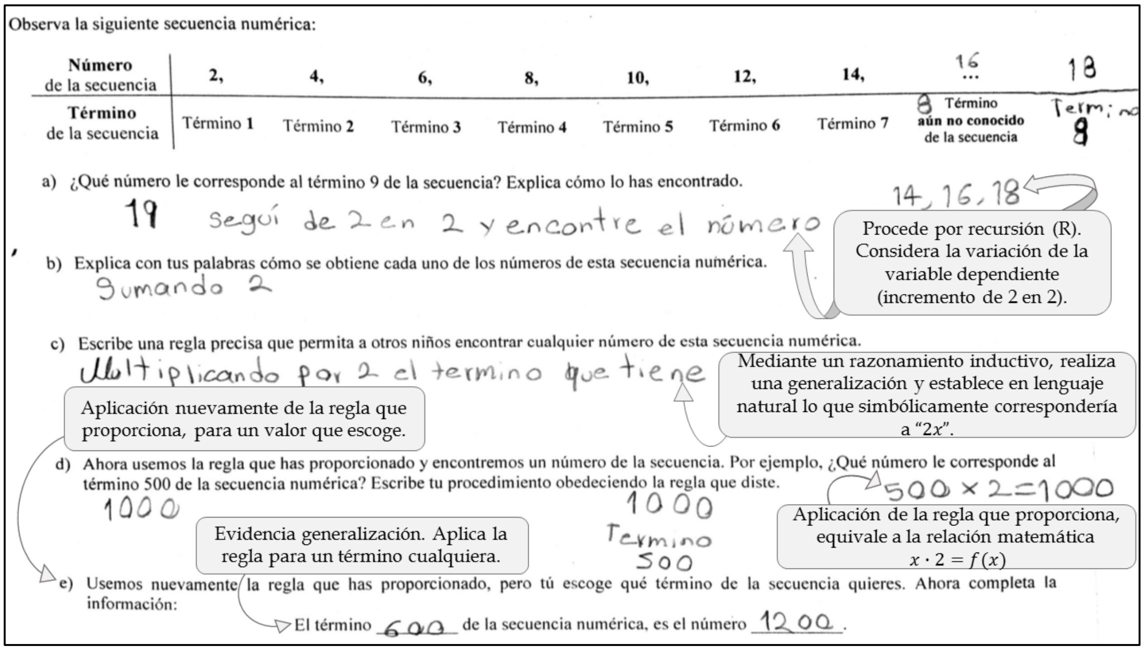

Figura 2. Respuestas de E15 en la Actividad 9. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

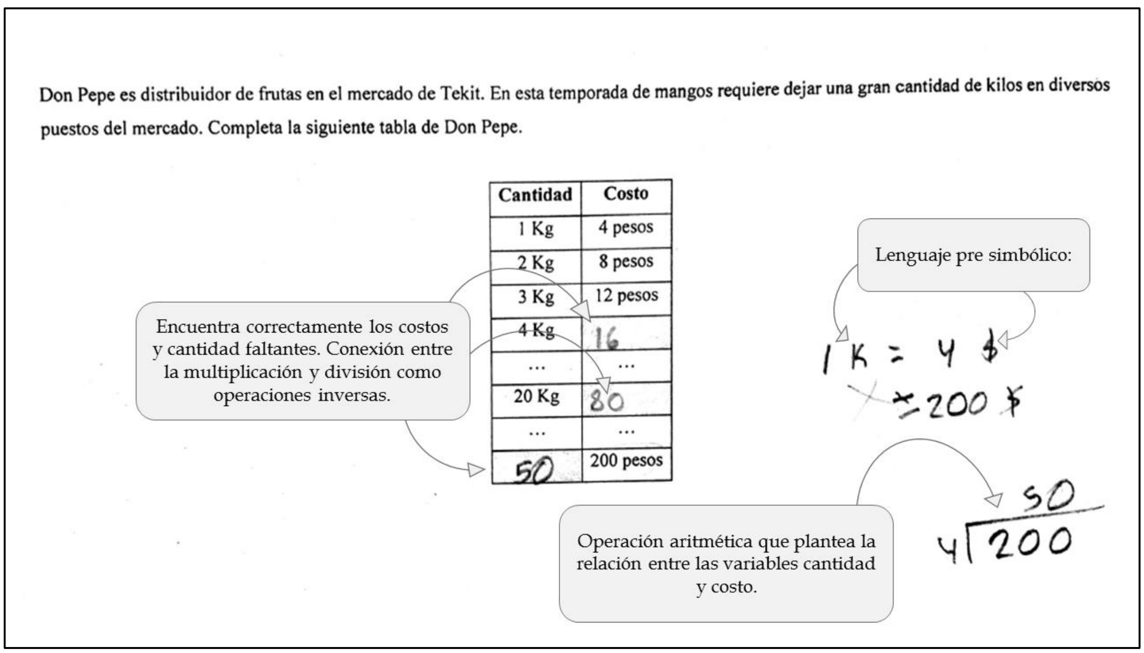

Figura 3. Respuestas de E6 en la actividad 13. La función involucrada es $f(x) = 4x$.

Reflexiones

De manera general se puede decir que los resultados del análisis de las respuestas de la etapa diagnóstica, muestran que algunos niños de quinto grado de primaria logran establecer las relaciones entre dos variables, expresándolas en lenguaje natural. Aunque inicialmente suelen proceder de forma recursiva para encontrar una a una las relaciones, algunos de ellos pueden identificar la relación general de correspondencia y establecer una regla usando lenguaje pre simbólico. Lo anterior puede considerarse evidencia de su pensamiento funcional en una etapa básica de desarrollo.

Referencias

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L.; & Kaput, J. J. (2011). *Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades*. In Cai, J. & Knuth, (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, 5-24. London: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), Essential understandings series. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, (14), 37-57.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Eisenmann, P. (2009). A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. *The Teaching of Mathematics*, *22*(2), 73-81.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana: México.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Mulligan J. & Micheltmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49. http://dx.doi.org.10.1007/BF03217544

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (reimp. 2002).

Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. Textos Seleccionados. México: CINVESTAV.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics. http://dx.doi.org/10.4324/9781315097435

Tanişli, D. (2011). Functional Thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 206-223.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case of study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9–14.