XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Del Contexto Geométrico al Razonamiento Funcional

César **Briseño** Miranda
CINVESTAV-IPN
México
cbriseno@cinvestav.mx
Ernesto **Sánchez** Sánchez
CINVESTAV-IPN
México
esanchez@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se identifican los tipos de razonamientos [cuantitativo, inductivo y representacional] surgidos en estudiantes de bachillerato al resolver tareas que involucran situaciones geométricas dinámicas. Se trata de un estudio de tipo cualitativo surgido desde una concepción de la Teoría Fundamentada, que permite identificar la manera en cómo los estudiantes se acercan —desde el punto de vista cognitivo— al Esquema de Función diseñado [por los autores] en este trabajo. Los resultados muestran que las tareas, los conocimientos previos de los estudiantes y el adecuado uso de los ambientes de trabajo, ambiente Tecnológico Digital como complemento del ambiente de Lápiz y Papel, promueven [en conjunto] la interrelación de los registros de representación que son esenciales para promover los razonamientos asociados con los conceptos involucrados.

Palabras clave: Tipos de razonamiento, relación funcional, bachillerato, lápiz-y-papel, tecnológico digital.

Introducción y planteamiento del problema

Diversos autores (p.ej, Doorman & Drijvers, 2011; Freudenthal, 1983; Weigand & Weller, 2001) afirman que el concepto de función es una de las nociones más potentes y útiles dentro de las Matemáticas y su manejo integral se relaciona con la capacidad no sólo de comprender y utilizar sus representaciones, sino también de relacionarlas entre sí y transitar de una a otra con fluidez. El tránsito entre diferentes representaciones constituye un instrumento importante para el aprendizaje de los conceptos matemáticos y, en particular, las variadas representaciones del concepto de función se han enriquecido y vuelto más accesibles y manipulables con ayuda de la tecnología (Cuoco & Goldenberg, 1997). De acuerdo con la NCTM (2000), si no se promueve la transición entre los diferentes registros será menos probable que los estudiantes favorezcan su razonamiento e identifiquen la relación de los diferentes registros de representación, lo cual provocaría que sea más probable el desarrollo de conceptos erróneos.

Un problema que surge cuando se emplea el ambiente *Tecnológico Digital* (TD) en la enseñanza, consiste en cómo integrar las habilidades que los estudiantes han adquirido para trabajar en ambiente de *Lápiz y Papel* (LyP). En este trabajo, se diseñaron tareas para promover en los estudiantes, el uso de distintos registros de representación con base en sus conocimientos previos y sus habilidades en ambiente LyP. Estas tareas se implementaron y se recogió el registro escrito con sus respuestas. La base de las tareas fue el reconocimiento de la variación de áreas de figuras geométricas en función del desplazamiento de un punto, con la finalidad de obtener su expresión algebraica que pueda explorarse con ayuda del ambiente TD.

Antecedentes

Hay una gran cantidad de investigaciones sobre el concepto de función. Aquí sólo mencionaremos algunos trabajos representativos. En el análisis del concepto de función, Freudenthal (1983, p. 496) la enfatiza en su relación con la variación, considerando que es la relación de elementos que varían libremente a elementos que varían bajo restricción. Para Cañadas y Molina (2016, p. 211), el trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. La comprensión del concepto de función es un aspecto crítico del razonamiento algebraico y la construcción de relaciones funcionales es una actividad que debe aprovechar el poder de las capacidades de los estudiantes para razonar acerca de las cantidades y el uso de múltiples representaciones, con la finalidad de fomentar una comprensión profunda del concepto de función (Ellis, 2011; Kieran, 1992).

Por un lado, diversos autores (e.g., Ellis, 2011; Kieran, 1992) afirman que los estudiantes demuestran una visión limitada del concepto de función, a pesar de que algunos sean capaces de detectar patrones, ya que es posible que no puedan formalizar esos patrones correctamente escribiendo ecuaciones o expresiones algebraicas apropiadas. Por otro lado, los estudiantes tienen problemas para interrelacionar correctamente las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de las relaciones funcionales y pueden volverse excesivamente dependientes de un tipo de registro; se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en el desarrollo de este concepto, de tal manera que los estudiantes no pueden hacer una conexión adecuada entre las distintas representaciones; la falta de conciencia algebraica hace que el razonamiento con funciones sea complejo (Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011).

La utilización de diversos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, diagramas, gráficos cartesianos o figuras geométricas son esenciales para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2006; entre otros). La única manera de tener acceso a los objetos matemáticos y tratar con ellos es a través de sus representaciones semióticas (Duval, 2006). Para que los estudiantes comprendan y utilicen formas pertinentes de representaciones, deben entender el significado de éstas (e.g., en representaciones geométricas se requiere comprender el significado de las rectas, los números y variables, entre otras). Debido al uso de diversos sistemas de representación no son fáciles de emplear en la actividad matemática, por ello es necesario que los alumnos tengan conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de ellas de modo que esas representaciones adquieran sentido para los estudiantes (Eisenberg, 1992). Algunos investigadores (e.g., Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983) afirman que para lograr razonar y comunicarse en torno al tema de funciones se requiere conocer y emplear de manera adecuada su notación; cada una resalta aspectos específicos del concepto de función asociado.

En general, no hay una sola concepción de función para la enseñanza, pues se puede caracterizar de diferentes maneras según el aspecto en que se quiera enfatizar; por ejemplo: como regla de correspondencia, como parejas ordenadas, como una curva en el plano cartesiano o como covariación de cantidades. En la presente investigación nos hemos centrado en las primeras tres caracterizaciones. Con la finalidad de desarrollar en los estudiantes el sentido de función se debe promover la habilidad de visualizar gráficas de funciones, sin embargo, la mayor parte de los estudiantes cuando trabajan en ambiente LyP no pueden conectar la gráfica de la función con su descripción analítica, ya que se requieren habilidades de nivel superior en el análisis y desarrollo del argumento cognitivo que el procesamiento visual de ideas matemáticas proporciona para identificar esa interconexión (Eisenberg, 1992). El uso del ambiente TD promueve la interconexión entre conceptos, ya que permite generar ejemplos que invitan a la clasificación, reconocimiento de patrones, generalización e indagación de relaciones (Doorman & Drijvers, 2011), pero la efectividad del aprendizaje matemático con tecnología depende en gran medida del tipo de estudiantes.

Diseño y metodología

En el estudio participaron 16 alumnos de bachillerato (17 años en promedio) que se encontraban inscritos en la asignatura de Matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral) y cursaban el sexto año con orientación a las carreras universitarias de fisicomatemáticas. Los alumnos trabajaron en parejas, formando ocho equipos a los que referiremos como: E1, E2, E3… E8. Las tareas se elaboraron con la idea de guiar a los estudiantes para que construyan una expresión algebraica surgidas de un patrón de covariación emergente a partir de una situación geométrica [función] y obtengan su expresión simbólica, después, con ayuda del ambiente TD, pudieran explorarla mediante su representación gráfica empleando algunas transformaciones. La tarea implementada para este trabajo se divide en dos momentos: (i) trabajo en ambiente estático con el recurso de *Lápiz y Papel*, (ii) trabajo en ambiente dinámico con el recurso *Tecnológico Digital* (GeoGebra). En seguida se expone la primera de tres actividades que se implementaron.

Actividad

La actividad a realizar en un ambiente de *Lápiz y Papel,* fue la siguiente: La Figura 1 muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{QB}$.

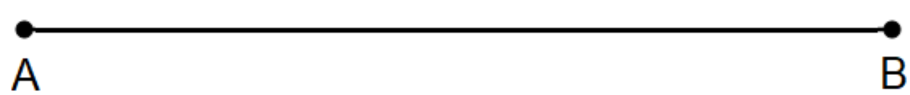


Figura 1. Segmento $\overline{AB}$ empleado en la primera actividad.

a) Con base en las características de la figura obtenida, determina el área del polígono *ABEFCD*. Explica tu procedimiento.

b) Coloca en el segmento un punto R diferente al del problema anterior. Calcula el área del polígono *ABEFCD* y compárala con la obtenida en el inciso anterior. ¿Cuál es mayor o son iguales? Explica tu procedimiento [Hay que notar que no se pide la expresión algebraica sino el cálculo del área].

c) ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? Justifica tu respuesta.

d) Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el enunciado inicial ¿El área del polígono *ABEFCD* es constante? Explica tu razonamiento

e) Calcula el área para los casos en que $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AP} = 2, 4.5, 7.3$

f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

g) La expresión simbólica propuesta en el inciso anterior. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

h) Elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior.

La actividad a realizar con ayuda de *GeoGebra* consistió en lo siguiente:

a) [Instrucciones para construir en *GeoGebra* la figura solicitada].
b) Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.
c) De acuerdo con la configuración del polígono *ABEFCD*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento
d) [Obtén con *GeoGebra* las áreas de los polígonos que se calcularon en *Lápiz y Papel* y compara].
e) ¿Cómo son los resultados usando *Lápiz y Papel* (segunda columna) comparados con los resultados dados por el software (tercera columna)? Explica.
f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.
g) Elabora la gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior. ¿Qué sucede con la gráfica al duplicar el valor del segmento $\overline{AB}$. ¿Cuál es su expresión simbólica?

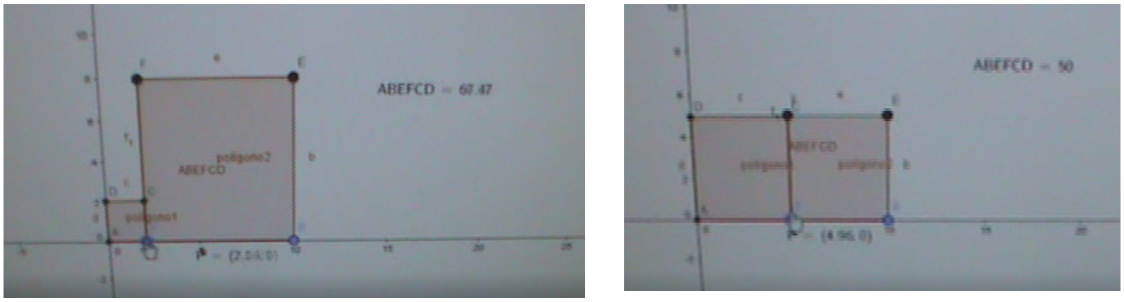
Los datos y su análisis

Los datos que se analizaron son las respuestas a las preguntas formuladas, que los estudiantes escribieron en sus hojas de trabajo y que mediante las respuestas registradas en grabaciones de video de las discusiones entre los estudiantes y entre estudiantes e investigador. Estas se transcribieron en archivos electrónicos para poder manipularlas, se codificaron comparando las respuestas entre sí y se agruparon cuando se identificaron rasgos similares, con base en la *Teoría Fundamentada* (Glaser & Strauss, 1967/2008; Birks & Mills, 2014), que recomienda no adherirse a alguna teoría preestablecida sino generar conocimientos y construir una teoría [local] con base en los datos. Mediante este proceso se determinaron las categorías que forman parte de los resultados propuestos al identificar los tipos de razonamiento que llevaron a cabo.

Resultados

Los participantes identificaron el comportamiento del polígono cuando se mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$. Con ayuda del software los estudiantes se dan cuenta que el área del polígono ABEFCD varía de manera no lineal y encuentran que el área mínima se alcanza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (véase Figura 2).

A continuación, ofrecemos ejemplos de respuestas que dan cuenta de diferentes tipos de razonamiento de los estudiantes, que llamaremos: *Razonamiento cuantitativo, Razonamiento* *inductivo y Razonamiento representacional*. Cuando estos tipos de razonamiento se integran en un solo razonamiento decimos que se alcanza el *razonamiento funcional*.



(a) (b)

Figura 2. Desplazamiento del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, por parte de E2: (a) identifican cómo cambia el área del polígono; (b) el área mínima del polígono se localiza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

El *razonamiento cuantitativo* involucra cantidades concretas; se presenta cuando se reconocen rasgos comunes en secuencias de figuras y se determinan valores numéricos mediante el cálculo de área del polígono *ABEFCD*. Este tipo de razonamiento se presentó cuando los estudiantes calcularon los valores del área del polígono *ABEFCD* para varias posiciones del punto P con base en una expresión general previamente construida. Posteriormente verificaron que sus resultados son válidos con ayuda del software. Una de las formas en que el software (*GeoGebra*) influyó [de manera positiva en la reflexión de los alumnos] fue provocando conflictos en los estudiantes que habían obtenido un resultado diferente en la actividad previa de *Lápiz y Papel*; por ejemplo, en los equipos 1 y 4 (véase *Figura 3*) surgió la necesidad de modificar y adecuar la expresión algebraica original y se promovieron los *razonamientos cuantitativo* e *inductivo* de manera simultánea.

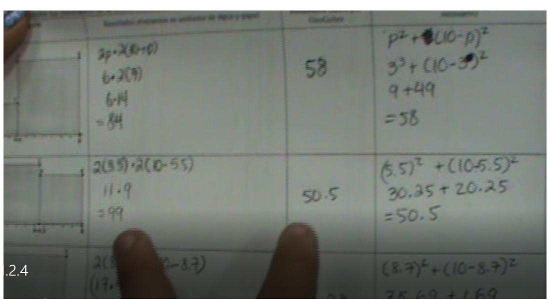
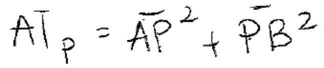
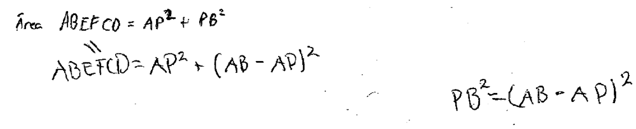


Figura 3. Evidencia del razonamiento cuantitativo. Respuestas del Equipo 4 al comparan los resultados propuestos en LyP respecto a los dados por el ambiente TD.

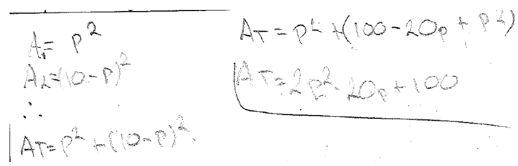
Diremos que se presenta un *Razonamiento inductivo* cuando a partir de los casos particulares se formula una expresión simbólica general. La mayoría de los estudiantes utilizan notación geométrica (véase *Figura 4.a*), otros combinan esta notación con expresiones verbales (véase *Figura 4.b*) y finalmente, sólo un Equipo utiliza una notación algebraica (véase *Figura 4.c*); también hay quien hace mezclas con los diferentes tipos de notación (véase *Figura 4.d*). El *razonamiento inductivo* se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes representan simbólicamente el área del polígono *ABEFCD*. Tres equipos expresan el área del polígono utilizando símbolos y notación propia del contexto geométrico, con el cual fue formulado el problema, a saber: $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ y p. Otros equipos dan la expresión para $\overline{PB}$ en términos de $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Dos equipos utilizan notación algebraica; mientras que otro expresa el área en notación funcional. Un estudiante, E3 realiza operaciones en su expresión original, desarrollando el binomio y simplificando (véase *Figura 4.c*). Finalmente, hay dos equipos que muestran dificultades; el primero, E1 representan el área del polígono como la suma de las áreas de los dos cuadrados, mientras que el segundo, E4 calculan el área del polígono como el producto del doble de cada uno de sus lados (véase *Figura 4.d*).



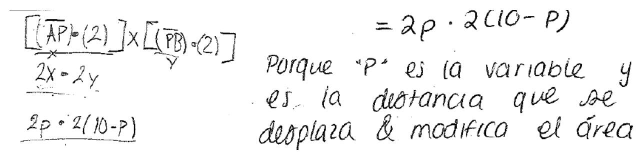
(a)



(b)



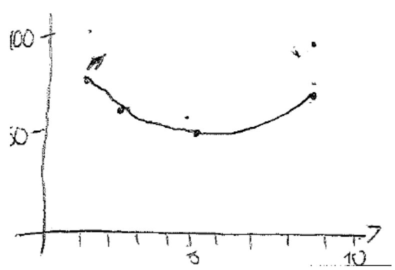
(c)



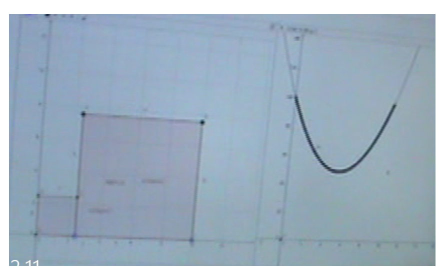
(d)

Figura 4. Evidencias del *razonamiento inductivo* para el cálculo de área del polígono *ABEFCD* en *TD*. (a) Respuesta dada por E2. (b) Respuesta dada por E8; (c) Respuesta dada por E3; (d) Respuesta dada por E4.

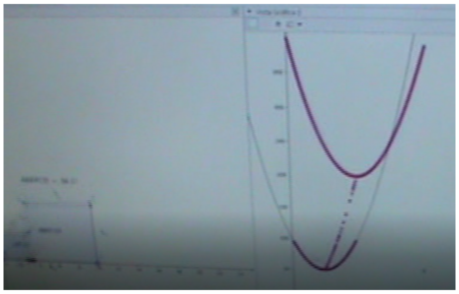
El *razonamiento representacional* se presenta cuando los estudiantes vinculan las diferentes representaciones, en especial, la expresión algebraica con su representación gráfica (véase *Figura 5.a*); de modo les permite ir construyendo la noción de función. Para propiciar este tipo de razonamiento, se pidió a los estudiantes reformular la expresión simbólica del área del polígono de modo de uniformizar la notación para ser introducida en el software. Esto implica, sustituir el segmento $\overline{AP}$ por "*x*", y hacer las demás sustituciones, como $\overline{AB}$ por 10, etc. Al emplear el software y generar la representación gráfica, el total de los equipos indican que al activar el rastro y desplazar el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, se genera una parábola (véase *Figura 5.b*). Con base en los resultados e inferencias previas, los equipos definen el comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ y argumentan que dada la configuración geométrica del problema cuando se aumenta el segmento $\overline{AB}$ seguirá manteniéndose una representación gráfica relacionada con una parábola y el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD* se encontrará, en todo momento, cuando el punto P se encuentre a la mitad del segmento $\overline{AB}$ (véase *Figura 6.c*).



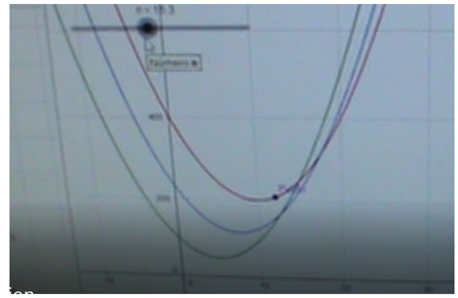
(a)



(b)



(c)

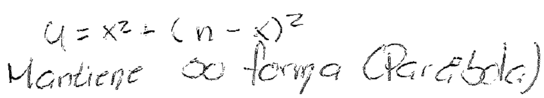


(d)

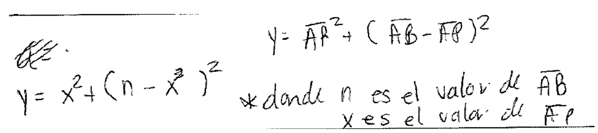
Figura 5. Evidencia del *razonamiento representacional*. (a) Respuesta dada por E1 en *LyP*; (b) gráfica que proporciona el software *GeoGebra* a E1; (c) Comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ dada por E6. (d) Modificación del valor asignado al deslizador "*n*" empleado por E5.

En seguida, el Equipo 5 propuso en *notación geométrica* la expresión $y = x^2 + (n - x)^2$ se aprovechó para que todos los equipos exploraran el efecto del parámetro "*n*" en la representación gráfica. Se utilizó el comando "*slider*" para encontrar que la forma parabólica de la gráfica se conserva y que el vértice se desplaza a lo largo de un segmento de recta. En la *Figura 6.d* se observan los resultados de algunas de las exploraciones.

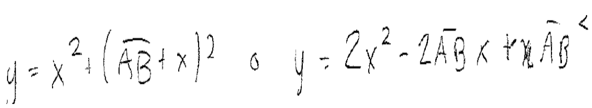
El razonamiento funcional integra todos los razonamientos anteriores y emerge cuando se les pregunta a los participantes cuál es la expresión algebraica para definir el comportamiento de área del polígono *ABEFCD* para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$. Al proponer expresiones algebraicas para el polígono con un parámetro, cuatro equipos proponen representar al parámetro con una variable algebraica: *n*, *z* ó *b*. Cinco equipos expresan el área del polígono como una combinación de variables [algebraica y geométrica]; un equipo mantiene totalmente una notación geométrica $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Otro equipo expresa el área del polígono de dos maneras diferentes: algebraica y geométrica. Cuando se les entrevista explican que para los diferentes valores de $\overline{AB}$ se mantendrá la forma parabólica que representa la variación del área del polígono cuando cambie "*x"* (véase *Figura 6*). En general, con base en la expresión simbólica que cada equipo obtuvo, explicaron que cuando la longitud del segmento $\overline{AB}$ cambia, la gráfica se comporta con características similares a la original (como parábola).



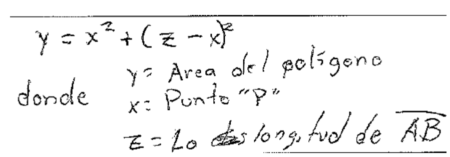
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) Respuesta dada por E1. (b) Respuesta dada por E5. (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E7.

Conclusiones

La actividad propuesta llevó, a los estudiantes, a reconocer que la parábola expresa la relación entre la magnitud del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD*; para hacerlo tuvieron que aplicar los diferentes tipos de razonamiento que hemos caracterizado. En primer lugar, encontrar numéricamente áreas particulares y percibir que la relación no era constante o lineal. En segundo lugar, hallar una expresión algebraica que expresara la relación general de la covariación entre el lado y el área del polígono. Esta expresión se daba con un lenguaje simbólico geométrico o algebraico y geométrico, y fue necesario que lo transformaran en un lenguaje algebraico para representar su gráfica con ayuda del software. En cada uno de esos pasos algunos estudiantes tuvieron más dificultades que otros, pero en conjunto en el avance de la actividad lo comenzaron a lograr. Cabe destacar que el papel del ambiente Tecnológico Digital (*TD*) contribuyó a consolidar las representaciones que los estudiantes propusieron en ambiente de *Lápiz-y-Papel*, permitiéndoles corregirlas y refinarlas. El papel de las tareas fue crucial para movilizar los conocimientos de los estudiantes y para promover su razonamiento, permitiendo su integración con ayuda de la tecnología digital y, como consecuencia generando nuevos conocimientos sobre el concepto de función.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52 (3),* 215-241.

Birks, M., Mills, J. (2015). Grounded Theory. A Practical Guide. Los Angeles: SAGE.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cuoco, A. A. & Goldenberg, E. P. (1997). Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. In J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research,* MAA Notes 41, (pp. 33–46). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Doorman M., Drijvers P. (2011) Algebra in Function. In: Drijvers P. (eds) *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 119 – 135). SensePublishers.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103–131.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes 25, (pp.153-174). Washington DC: Mathematical Association of America.

Ellis A.B. (2011) Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. In: Cai J., Knuth E. (eds) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp 215-238). Springer, Berlin, Heidelberg.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967/2008). The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research. New Brunswick, USA: Aldine Transactions.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Weigand, H-G., & Weller, H. (2001). Changes of working styles in a computer algebra environment-The case of functions. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 87–111.