# Análisis de Significados que se Confieren a la Antiderivada

Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Luis R. **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

**Resumen**

Se presenta un estudio sobre los significados de la noción antiderivada orientada por diseño de instrumentos que permiten explorar y caracterizar la comprensión sobre tópicos específicos, usando las herramientas en enfoque ontosemiótico del conocimiento se analizan los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario. Los resultados aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de la comprensión de los significados de la antiderivada en estudiantes universitarios. Además, proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o potenciar la comprensión sobre la antiderivada.

*Palabras clave*: antiderivada, significados, enfoque ontosemiótico, cuestionario, comprensión.

## ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre la comprensión de la antiderivada son escasos, el trabajo de Metaxas (2007), le da identidad al objeto antiderivada, y a través de un estudio de caso enfrenta a estudiantes con tareas que generan un conflicto cognitivo abordando la perspectiva teórica de la abstracción reflexiva y el esquema de comprensión (interiorización-condensación-reificación), propuesto por Sfard (1991). Por otra parte, Kiat (2005) explora la solución problemas de que involucran integración (definida e indefinida), clasificando errores (conceptuales, procedimentales y técnicos) al responder preguntas que involucran integración y áreas. Es Hall (2010), quien analiza significados matemáticos, que se usan en la enseñanza del cálculo, en particular con la integral indefinida. Concluye que respuestas como: la integral definida es más precisa que la integral indefinida, la integral indefinida es un termino vago, antiderivada es la inversa de la derivada. Son respuestas que indican mala comprensión del concepto matemático, y a su vez evidencian un conflicto entre el conocimiento de términos matemáticos.

## NOCIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

Existen diversas posturas para entender la comprensión (Sfard 1991, Pirie & Kieren 1994), de acuerdo con Font (2001) y Godino, Batanero y Font (2007), hay dos maneras básicas de entenderla: como proceso mental o como competencia. estos autores, toman dos puntos de vista que responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como proceso mental. Los posicionamientos pragmatistas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS), en cambio, llevan a entender, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Es decir, se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Esta manera pragmática de entender la comprensión, implica concebirla también como conocimiento y aplicación de las normas que regulan una práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren. Es necesario aclarar que, dentro del EOS, enfoque teórico al que nos apegamos en este estudio, el término conocimiento se utiliza en el sentido de constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con las prácticas matemáticas de los sujetos y a la activación, en dichas prácticas, de la configuración ontosemiótica cognitiva adecuada, la cual debería estar idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica de referencia (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) y al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión como lo afirma Pino-Fan (2014), tiene que ver con las relaciones –vistas desde las perspectiva de la congruencia matemática– que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la configuración ontosemiótica cognitiva (o epistémica, en el caso de prácticas institucionales) que activa el sujeto para resolver determinadas situaciones/problemas. En este trabajo hemos adoptado los posicionamientos pragmatistas que nos brinda el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007). En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce con el nombre de configuraciones. Estas configuraciones pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, con el fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

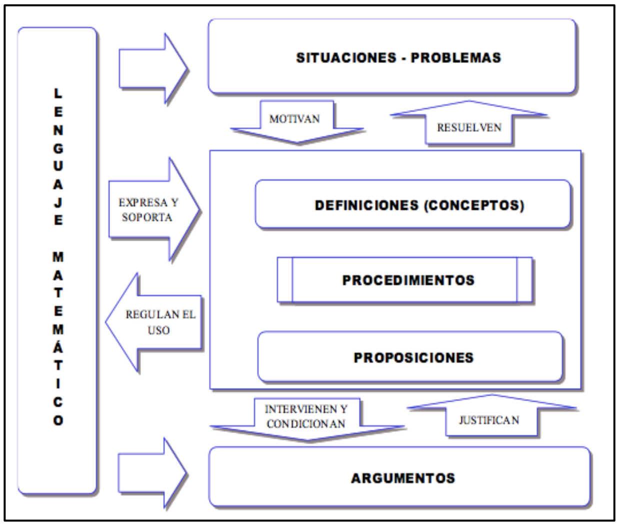


*Figura 1.* Configuración de Objetos Matemáticos Primarios (Font & Godino, 2006)

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que a su vez se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; extensivo – intensivo.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (ver Figura 1) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación.

Las redes de objetos y procesos que hemos descrito, suelen recibir el nombre de configuración ontosemiótica (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente.

En este sentido y apoyados por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos como se describió anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas ¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada? ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?

Para dar respuesta a preguntas, nos propusimos en este trabajo: *Evaluar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de* *estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.*

## RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA ANTIDERIVADA

Para poder explorar el conocimiento matemático sobre la antiderivada, Gordillo y Pino-Fan (2016), proponen un estudio histórico-epistemológico que permite, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas en los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la antiderivada, los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Adicionalmente, las configuraciones epistémicas primarias podrían orientar el diseño de acciones formativas que permitan construir o lograr comprensión sobre el objeto antiderivada hasta llegar a su formalización.

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del *significado global* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. como lo describe Gordillo y Pino-Fan (2016), para el caso de la antiderivada son cuatro: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3); 4) *Funciones Elementales* (CE 4).

## CRITERIOS PARA ACTIVAR CADA SIGNIFICADO PARCIAL EN LA ACTUALIDAD.

Actualmente no se puede hacer uso de todos los elementos primarios identificados en cada significado parcial, sin embargo, adaptando algunas situaciones/problema, planteadas en cada uno de los significados, pueden ser llevados al aula en forma de tareas, y activar en los estudiantes un significado parcial específico. La descripción del cómo se puede identificar la activación de un significado parcial esta dada por :

a) *Tangentes-Cuadraturas*: Utiliza definiciones matemáticas de dominio de una función, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Argumenta a través de los criterios matemáticos la construcción de una curva (gráfica). Para encontrar la antiderivada de una función, dada la curva (gráfica) de una función.
b) *Fluxiones–Fluentes*: El estudiante, utiliza lenguaje, definiciones propias de la física para argumentar el cambio entre magnitudes físicas (aceleración, velocidad, posición), para resolver situaciones que impliquen fenómenos físicos de variación o rapidez.
c) *Sumatorias-Diferencias*: Utiliza, lenguaje propio de las matemáticas y definiciones que refieren al uso de alguna “regla de integración” o “método de integración” para resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).
d) *Funciones elementales*: Utiliza, lenguaje propio de la matemáticas y definiciones que refieren a un análisis detallado de funciones transcendentes, o uso de algún ‘método

numérico' para expresar funciones como series y así resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).

## DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Una vez identificados y caracterizados los significados de referencia de la antiderivada, un aspecto relevante fue determinar qué es lo que conocen los estudiantes universitarios sobre dichos significados. Así, nuestra tercera pregunta para la investigación es: *¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?* Para responder esta pregunta se diseño un cuestionario representativo de la complejidad del significado holístico de la antiderivada.

A partir del banco de tareas elaborado, se eligieron aquellas tareas que cumplieran, básicamente con tres aspectos clave: Uso de diversos significados del objeto antiderivada; Uso de diversidad de representaciones para la antiderivada y relaciones matemáticas entre la antiderivada y otros objetos matemáticos. En este sentido, el cuestionario diseñado se compone de once tareas. Como el propuesto por Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018), en la tabla 1. se muestra un resumen de las características y fines que se persiguen con cada una de las tareas.

Tabla 1.

*Resumen de tareas del cuestionario*

| Tarea | Objetivo | Representación que activa | Significado Parcial Activado |
|---|---|---|---|
| Tarea 1: Significados de la antiderivada | Explorar significados personales, acepciones conferidas a la antiderivada | verbal/ escrita | Global |
| Tarea 2: Modelo sinóptico estructurado | Relación de la antiderivada con otros objetos matemáticos del cálculo. | Mapa conceptual y grafos | Global |
| Tarea 3: Cálculo de la función primitiva (parte A y B) | Construcción de familia de funciones a partir de una función derivada. | simbólica, gráfica y tabular | Diferencial-Sumatoria |
| Tarea 4: Exploración gráfica de la antiderivada | Tratamiento de la representación grafica de la antiderivada. | Gráfica | Tangentes-Cuadraturas |
| Tarea 5: Diferencia integral - antiderivada | Explorar si se establecen diferencias conceptuales de nociones integral y antiderivada. | Verbal/escrita y simbólica | Funciones elementales |
| Tarea 6: Funciones elementales | Identificación de la función derivada como función elemental. | Verbal/escrita y simbólica | Funciones elementales |
| Tarea 7: Reglas de Antiderivación | Identificación de la antiderivada a partir de una regla básica de derivación. | Simbólica | Tangentes - Cuadraturas |
| Tarea 8: Notaciones de una función derivada | Identificación de una forma de denotar una función derivada | Simbólica | Tangentes - Cuadraturas |
| Tarea 9: Aplicación de la antiderivada en economía | Aplicación del objeto matemático con las ciencias económicas | verbal/escrita y simbólica | Tangentes - Cuadraturas |
| Tarea 10: Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias | Uso de la antiderivada en la solución de ecuaciones diferenciales | verbal/escrita y simbólica, | Fluentes-Fluxiones |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tarea 11: Aplicación de la antiderivada en la física | Disposición del objeto matemático con la física | verbal/escrita y simbólica | Fluentes-Fluxiones |

*Fuente*: Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018)

## FIABILIDAD Y VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO

Para cada tarea incluida en el cuestionario se realizó de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles: contenido ontosemiótico, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica configuración ontosemiótica; contenido curricular, que son los conocimientos que evalúan las tareas y que pueden ser medidos con los conocimientos pretendidos en una institución, plasmado a través del plan de estudios. Así mismo el cuestionario se sometió a revisión mediante el juicio de expertos, donde cada experto opinaban libremente, para cada una de las tareas del cuestionario, sobre el grado de relevancia de cada uno de los siguientes aspectos: Distintos significados del objeto antiderivada; representaciones activadas tanto en los enunciados como en las soluciones plausibles; contenido matemático de las tareas en relación con el objeto antiderivada; es decir, el vínculo de la antiderivada con otras nociones matemáticas relevantes para su comprensión; ausencia de algún contenido relevante; redacción y comprensión de los enunciados.

En general, el cuestionario fue aprobado y avalado por parte de los expertos con una puntuación media de 4.72/5 , otorgada al cuestionario por cada uno de los expertos. En la versión definitiva del cuestionario se incluyeron las recomendaciones de cada uno de los expertos.

## IMPLEMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

Implementar el cuestionario diseñado, para evaluar la comprensión de la antiderivada, en muestras intencionales de estudiantes universitarios colombianos, se realizó al aplicar el cuestionario a una muestra de 137 estudiantes universitarios en Colombia. El condicionante para la aplicación de la prueba a los estudiantes que participaron, fue el haber tomado el curso de cálculo integral o cálculo II (momento curricular donde se aborda la noción). Cada cuestionario aplicado permitió profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los estudiantes universitarios al resolver las tareas del cuestionario.

## CARACTERIZACIÓN DE LOS RESULTADOS

Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del cuestionario el conocimiento sobre la antiderivada, evidencio que los estudiantes presentaron ideas similares en las respuestas, y en varias ocasiones cometieron errores propuestos por Kiat (2005), así como las concepciones erradas que se tienen de la antiderivada, que son indicador –tal como lo afirma Hall (2010)– de mala comprensión de las ideas básicas del cálculo o de confusión de términos matemáticos. Estos indicadores adquirieron énfasis cuando los estudiantes se enfrentaron a tareas que requerían la movilización del significado –proceso para encontrar una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada–

En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativos y cualitativos de las soluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, exhiben ciertas dificultades para resolver tareas que relacionan la antiderivada. Por ejemplo, los resultados obtenidos desvelan que los estudiantes usan la antiderivada en su acepción de "proceso inverso de la derivada", y no dan sentido a la constante $C$ real. Esta acepción de "proceso inverso" también es observada en diferentes las tareas, esta forma equivocada, es vista más concretamente, como procedimiento que les permite obtener directamente el 'resultado de la operación inversa', tal como multiplicar y dividir. Los resultados del cuestionario apoya la necesidad de mejorar el conocimiento matemático, que les faculte de competencias para resolver tareas con características similares a las que se les planteó con el cuestionario.

## RESULTADOS FINALES

En este artículo presentamos el diseño de un cuestionario que nos permite evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada en estudiantes de los primeros cursos universitarios. La noción de conocimiento (conocimiento matemático), desde un punto de vista pragmatista como el adoptado por el EOS, incluye y vincula las actividades de comprensión, competencia y disposición, las cuales intervienen en las prácticas matemáticas que se desarrollan con la finalidad de resolver un problema. Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en el diseño de cada una de las tareas que conforman el cuestionario, toda vez que las tareas requieren para su resolución de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada, como de la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática (Gordillo & Pino-Fan, 2016).

El análisis ontosemiótico (contenido y curricular), y las posibles dificultades en la resolución de las tareas, realizado para cada una ellas; anterior a la aplicación del cuestionario, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver las tareas propuestas, al rededor del objeto matemático. Prácticas donde se pueden identificar, la configuración de objetos y procesos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

Por otro lado, añadido a lo anterior, el estudio mediante juicio de expertos ha dado evidencia que el diseño de las tareas del Cuestionario, sí evalúa la articulación de los significados institucionales y personales, respecto a la antiderivada, dando así argumentos validos para determinar que cada una de las tareas es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial, y en su globalidad evaluadora de comprensión, competencia y disposición de la noción antiderivada.

## Referencias y bibliografía

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix. Revista de la Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les matemàtiques a Catalunya, 19*(1), 33-36.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558. doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V., & Ponce-Campuzano, J.C.. (2018). Algunas tareas para evaluar la compresión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y Virtualidad*, *11*(2). doi: 10.18359/ravi.2983

Hall, Jr., W. L. (2010). Student misconceptions of the language of calculus: definite and indefinite integrals. In *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-16). Raleigh, NC: Mathematical Association of America.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 265-272). Seoul, Corea: PME.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. *CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*. Recuperado de http://www.cerme9.org/products/twg20/

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, (pp. 206-213). Nuevo León, México: ITESM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715