XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Zahira en la resolución de problemas multiplicativos con fracciones

Maribel **Hernández** Cobarrubias
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
marybellcob@gmail.com
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

El presente documento forma parte de una investigación cualitativa realizada en una escuela primaria pública del Estado de México, con estudiantes de sexto grado. Nos enfocamos en la resolución de problemas de estructura multiplicativa mediante el uso de fracciones y para ello recurrimos a la observación de clases, un cuestionario exploratorio, entrevista y un taller dividido en dos partes. La primera parte del taller dirigida a ofrecer a los alumnos prerrequisitos que enriquecieran sus nociones sobre la fracción y la segunda donde se abordó la multiplicación de fracción mediante la estructura de partes de partes. Integramos en esta comunicación el caso de Zahira quien al inicio presentó varias dificultades cognitivas con el uso de fracciones, pero que fueron superadas en el transcurso de la investigación.

Palabras clave: problemas multiplicativos, fracciones, estrategias, resolución, dificultades cognitivas.

Planteamiento del problema de investigación

En el Plan y Programas (SEP, 2011) se prevé que al finalizar la educación primaria los alumnos, en su formación matemática, ya hayan desarrollado diferentes actividades donde abordasen situaciones problemáticas con estructura multiplicativa, usando números fraccionarios. Al mismo tiempo se anticipa que ellos han transitado por diferentes significados de dicha operación. Sin embargo, resultados en evaluaciones oficiales como PLANEA (2017) manifiestan que a nivel nacional tan sólo el 6.8 % del total de alumnos que fueron evaluados al concluir el sexto grado de primaria logra resolver problemas multiplicativos donde intervienen dichos números.

Datos como los anteriores y nuestra experiencia docente nos permiten identificar lo complejo que es para los alumnos el manejo de situaciones que presentan estructura multiplicativa, haciendo uso de fracciones. En la búsqueda de mayor comprensión de tales contenidos de aprendizaje, en la presente comunicación identificamos un espacio que focaliza nuestra atención en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, en alumnos de sexto grado de educación primaria, mediante el uso de números fraccionarios.

En esta documento buscamos responder a 2 interrogantes referidas a los estudiantes de sexto grado de educación primaria, resolviendo problemas mediante el uso de números fraccionarios:

- ¿Cuáles son las estrategias que emplean?
- ¿Cuáles son las dificultades cognitivas a las que se enfrentan?

El presente estudio tiene como objetivo general:

- Identificar las estrategias y dificultades cognitivas que los alumnos de sexto de primaria presentan al resolver problemas multiplicativos, aplicando números fraccionarios.

Antecedentes teórico-empíricos

Vergnaud (1991) presenta en su clasificación sobre problemas con estructura multiplicativa, entre otros, aquéllos que reconoce como "producto de medida" y que se retomaron para el diseño de algunas tareas planteadas en el cuestionario exploratorio, donde la fracción se utiliza como medida.

Con respecto a las estrategias que los alumnos despliegan en la resolución de problemas de estructura multiplicativa recuperamos las que Mulligan (1992) identificó, entre otras, como el uso del "**number fact**", entendido en nuestra lengua como la aplicación de *hechos numéricos* conocidos por los niños que les permiten la actuación eficiente ante situaciones problemáticas. Recientemente, Ivars y Fernández (2016) encuentra que a partir del tercer grado la estrategia que más emplean los alumnos es el uso de algoritmos, pero que a su vez incrementa la aparición de una estrategia incorrecta al usar un algoritmo inverso. Esto coincide con lo que plantean Peralta y Valdemoros (1989), es decir con la aparición del algoritmo no se mejora la comprensión de las situaciones problemáticas existentes.

Con relación a la enseñanza de las fracciones, las aportaciones de Streefland (1991) son de gran relevancia para la presente investigación. Con su planteamiento sobre la matemática realista propone formas de permitir que los alumnos accedan a los diferentes significados que pueden atribuirse a las fracciones y que les faciliten dar sentido a las mismas.

Piaget (1975) identificó las relaciones que los niños pueden establecer entre clases y subclases (que se recuperan en este estudio como partes de partes) del todo continuo y discreto frente a ellos los niños pueden identificar tanto la conservación como la identificación de las características que los hacen pertenecer a una clase o subclase. Peralta (1989) así como Peralta y Valdemoros (1989) recuperan el planteamiento de Piaget en torno a que la relación parte-todo permite identificar a las partes como elementos que ayudan a reconstruir el todo. Con esta línea las autoras plantean tareas donde recuperan el todo continuo y el todo discreto, observando que los alumnos no hacen partición del todo continuo, de manera que las fracciones sean partes del todo original, pero también sean partes de sí mismas ya que pueden ser subdivididas de nuevo cuando se expresa "a/b x c/d" que se asocia a "a/b de c/d". De igual manera detectan que a los alumnos se les dificulta asociar la preposición "de" con la multiplicación de fracciones. En el presente estudio retomamos estas concepciones bajo el referente de partes de partes y recuperamos actividades propuestas en la segunda parte del taller para establecer una relación multiplicativa, usando fracciones.

Para el análisis recuperamos a Valdemoros (2004) quien propone un modelo interpretativo que permite el análisis de datos recuperados a través de la investigación empírica. Dicho modelo, con carácter lingüístico, permite identificar los tres planos de todo lenguaje: el semántico, el sintáctico y el pragmático. Presenta en cinco dimensiones los planos de análisis por lo que es una herramienta interpretativa de gran alcance, a la vez que posibilita interpretaciones semióticas.

Método

Escenario y sujetos

Para la realización del presente estudio se eligió como escenario una escuela pública de turno matutino de Educación Primaria del Estado de México, debido a la apertura y facilidades que tanto el directivo como la docente del grupo dieron para el desarrollo de la investigación. El estudio se realizó considerando al único grupo de sexto grado naturalmente constituido, integrado por 40 alumnos, de los cuales 22 son niñas y 18 niños, cuyas edades oscilaban entre 11 y 12 años al momento del estudio. Zahira pertenecía a este grupo y fue seleccionada por presentar diversas dificultades cognitivas en el desarrollo del cuestionario inicial, así como su facilidad para expresar verbalmente sus procedimientos y actuaciones ante las tareas propuestas.

Instrumentos metodológicos

Para la consecución del objetivo planteado se buscó la obtención de datos haciendo uso de los siguientes instrumentos metodológicos: observación de clases cuestionario exploratorio, entrevistas y un taller de enseñanza dividido en dos partes, con los que se integró el estudio de casos. El siguiente diagrama muestra la secuencia temporal en la que se aplicaron dichos instrumentos.

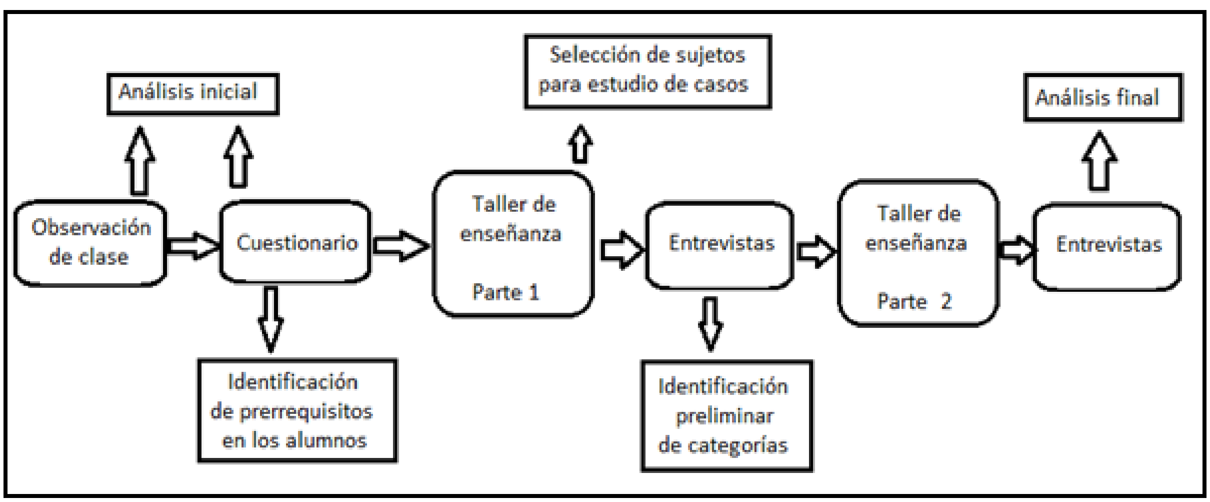

Figura 1. Secuencia temporal de aplicación de instrumentos metodológicos durante la investigación.

a) Observación de clases

Se realizó observación de clase durante 3 sesiones, donde la docente titular abordó la multiplicación de fracciones auxiliándose de la idea de iteración. Encontramos el uso del término “uneavos”, refiriéndose a la fracción unitaria, que usaban al multiplicar mediante el uso de fracciones y aplicando un algoritmo.

b) Cuestionario

El cuestionario exploratorio (sometido a una experiencia piloto previa en otro grupo escolar), estuvo integrado por 10 tareas vinculadas al uso de fracciones mediante repartos, como medida y problemas de estructura multiplicativa. Se distribuyó a lo largo de 4 sesiones de una hora cada una. El análisis de las producciones de los estudiantes y lo observado durante las clases permitió identificar algunas de sus dificultades cognitivas con respecto a su concepción y manejo del número fraccionario y que les dificultaría la resolución de las tareas planeados para el taller.

c) Taller de enseñanza (Parte 1)

Con la intención de ampliar sus nociones de fracción, decidimos incluir actividades introductorias en lo que denominamos taller de enseñanza parte 1. En esta primera parte se desarrollaron actividades adaptadas de la secuencia que Streefland (1991) propuso y otras tareas planteadas por las autoras del presente reporte. En el contexto de visitas a una pizzería se desarrolló: a) noción de fracción a partir del reparto, b) reparto equitativo, c) generación de fracciones equivalentes, d) adición de fracciones y e) sustracción de fracciones.

d) Entrevistas

Considerando las producciones de los alumnos en los instrumentos previos, fue posible comenzar a plantear algunas categorías preliminares y a su vez seleccionar a Zahira, quien mostró algunas dificultades en las tareas del cuestionario; sin embargo durante las entrevistas de carácter semiestructurado de 3 sesiones de 45 minutos cada una, fue posible reorientar las inconsistencias conceptuales que se asumía le dificultaban su transición a un mejor desempeño.

e) Taller de enseñanza Parte 2

El taller de enseñanza en su segunda parte constó de 4 sesiones de trabajo, en donde se desarrollaron actividades relacionadas con la multiplicación de fracciones. Mediante el desarrollo de actividades lúdicas e inspiradas en un enfoque "realista", se pretendía que los alumnos alcanzaran la comprensión en la búsqueda de significados de la multiplicación de fracciones mediante el manejo del "todo continuo" y "el todo discreto" a través del trabajo con "partes de partes". En él se planteó un juego mediante el uso de dados, tarjetas y material manipulativo para la identificación de expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$ de n. De igual manera, la identificación del todo a partir de las partes haciendo uso del todo discreto como vía para la identificación de relaciones multiplicativas.

Validación cualitativa

En el presente estudio recurrimos a un uso combinado de diversos recursos de validación; sin embargo priorizamos la triangulación de diferentes métodos, lo cual permitió identificar las respuestas y procesos más estables tanto en el cuestionario, la entrevista y el taller. El contraste lo realizamos tomando en cuenta tareas con significados afines en los instrumentos. La identificación de categorías permitieron contrastar a lo largo de los instrumentos, tanto estrategias de solución de los alumnos, sus dificultades y los significados con las que las desarrollan. El caso de Zahira muestra el cambio cualitativo en el tipo de producciones, así como el sentido y significados[1] con los que desarrolla las estrategias de solución de las tareas.

[1] En Vigotsky (1977) el sentido es dado y comprensible por el propio sujeto, mientras que el significado es verbalmente formulado y comprensible para cualquier interlocutor.

Análisis del caso de Zahira a través de su actuación durante el taller

El caso de Zahira se recuperó debido a su facilidad para verbalizar sus procedimientos, así como las dificultades que manifestó al trabajar con las tareas propuestas. Entre otras, al hacer repartos sólo recurría a la equidad, sin hacer uso de la exhaustividad. Para expresar mediante una fracción, la porción correspondiente a cada sujeto, derivada del reparto, no establecía la relación aditiva de todas las partes producidas, sino que se auxiliaba sólo de aquéllas que le eran más representativas.

Al trabajar con expresiones a/b de n recurría a representaciones pictóricas[2] que hacían referencia al todo continuo y que no le permitían pasar hacia el todo discreto. El único significado que daba a la multiplicación era mediante una composición aditiva.

En los planteamientos de partes de partes, no consideraba que una fracción pudiera ser incluida en otra, en la identificación de la fracción resultante sólo consideraba el área sobrante de la primera parte. Esta dificultad se muestra en su actuación en la Figura 2 (tarea no. 8 del cuestionario) y que encontramos era compartida por varios de sus compañeros.

8. El patio de mi casa lo voy a utilizar para sembrar algunas plantas de hortaliza. $\frac{1}{2}$ del patio lo voy a ocupar para **verduras** y el otro $\frac{1}{2}$ del patio será para **plantas de otro tipo**.

* De la sección de verduras $\frac{1}{3}$ se destinará para chiles, $\frac{1}{6}$ para tomates y $\frac{1}{2}$ para jitomates.

¿Qué parte del patio se destina a cada verdura?

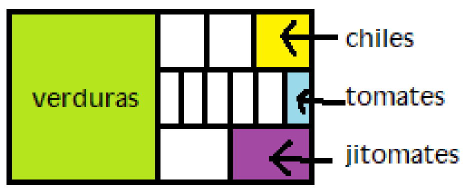

Figura 2. Representación de Zahira para resolver la tarea no. 8 del cuestionario.

Zahira mostró gran facilidad para verbalizar todo lo que producía y mucha apertura para contestar al cuestionarle sobre lo que cada representación, operación, frase o número que producía significaban para ella. A continuación mostramos parte de su producción durante el taller 2ª parte.

Al salón llevamos algunos cupcakes para celebrar el día del maestro. La mitad de todos los cupcakes son de vainilla y la otra mitad, de otros sabores.

* De los cupcakes que son de vainilla, $\frac{1}{3}$ tienen decoración rosa y el resto, decoración azul.

* De los cupcakes que son de otro sabor, $\frac{1}{2}$ son de chocolate, $\frac{1}{4}$ de piña colada y el resto de red velvet.

1) Si sabemos que de red velvet tenemos 6 cupcakes y éstos representan $\frac{1}{8}$ del total de los cupcakes, ¿cuántos cupcakes tenemos en total?

Figura 3. Hoja de trabajo de la 3er sesión del taller de enseñanza en su segunda parte.

[2] Valdemoros (1997) se refiere a éstas como algoritmos gráficos pues son una sustitución del algoritmo formal por dibujos que representan y son útiles en el complejo proceso de entender los algoritmos con fracciones.

En Figura 3 (hoja de trabajo del taller 2ª parte) inicialmente estableció relaciones aditivas, utilizando todos los números que aparecían en la situación planteada (figura 4), al finalizar de realizar el conjunto de adiciones entre los números se le pregunta sobre lo que significa para ella el resultado obtenido, a lo que responde que no lo sabe. Se le motiva a que vuelva a leer el planteamiento y trate de hacer algún dibujo que le ayude a comprender.

$$\frac{1^{2}}{3}+\frac{1^{3}}{2}=\frac{5^{20}}{6}+\frac{1^{6}}{4}=\frac{26^{208}}{24}+\frac{1^{24}}{8}=\frac{232^{232}}{192}$$

Figura 4. Actuación inicial de Zahira al tratar de encontrar la cantidad de cupcakes que hay en total.

A continuación se transcribe parte del diálogo que se entabló con Zahira cuando se retomaron sus producciones en la hoja de trabajo durante la entrevista.

ZAHIRA: Es que intento saber cuántos cupcakes hay en total, por eso creí que necesitaba sumar todas las fracciones para que me diera el total [refiriéndose al entero], pero no sé cómo convertirlo a cuántos cupcakes… [pausa] déjeme ver porque aquí me dice que hay 6 cupcakes [señala parte del texto y comienza a multiplicar 1/8 X 7/8 = 7/64]

ENTREVISTADORA: ¿Por qué elegiste resolverlo así?

ZAHIRA: Es que aquí me dice que seis cupcakes son un octavo y me faltan 7/8 para tenerlos completos [ella hacía referencia a que el todo sería igual a 8/8 del total de cupcakes], entonces yo podría multiplicarlo, pero no pueden ser 7/64, porque son menos de 6 cupcakes, entonces… [pausa prolongada].

Podemos identificar en este punto de su reflexión, que si bien ella plantea una multiplicación de fracciones, aún está presente una relación aditiva entre 1/8 + 7/8 = 8/8, que busca para reconstruir el todo. Ahora bien, la falta de sentido que tiene para ella el resultado la hace seguir buscando establecer una relación multiplicativa, pero ahora vinculada al uso de enteros; sin embargo no está del todo convencida y lo corrobora estableciendo una relación aditiva (Figura 5).

6 X 8 = 48
6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48

Figura 5. Desarrollo de Zahira para encontrar la cantidad de cupcakes en total, sabiendo que 6 piezas son un octavo del total.

ZAHIRA: Es que aquí (señalando en su lista el primer número que sumó) tenemos un octavo, dos octavos, tres octavos… [va señalando siguiendo la lista hasta llegar a ocho octavos] y por eso tenemos 48 cupcakes en total.

En el seguimiento anterior reconocemos la búsqueda que realiza Zahira en su intento de establecer relaciones multiplicativas; sin embargo no es capaz aún de justificarlo y recurre al establecimiento de relaciones aditivas [que le resultan más familiares] para poder establecer la relación parte-todo. Para ello reconoce que para encontrar el total de cupcakes deberá hacerlo reconstruyendo el entero mediante 8/8 y establece la equivalencia entre 8/8 y el entero o unidad. Dicha representación nos

permite ilustar una de las categorías encontradas para las estrategias a las que recurren los alumnos para la reconstrucción del todo que clasificamos como: “Relaciones aditivas”.

En la búsqueda de sentido de los enunciados del texto, Zahira y sus compañeros (33/42 del total del grupo), establecieron relaciones entre la preposición “de” (que en sesiones de clase con su maestra comentaron que se relacionaba con la multiplicación de fracciones) y la multiplicación (Figura 6). Cabe hacer notar que en la estructura del problema la relación entre las fracciones vinculadas mediante la preposición “de” no estaba señalada de manera explícita, es decir ellos tuvieron que buscarlas y la tradujeron a la operación de multiplicación con fracciones.

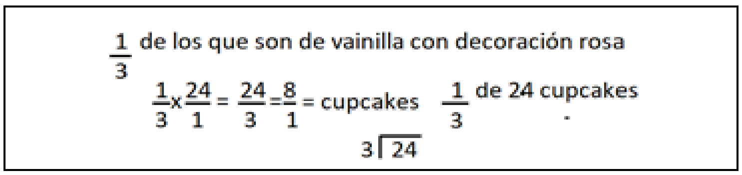

Figura 6. Secuencia que desarrolló Zahira, después de reconocer la cantidad de cupcakes que correspondían a la mitad de todo, para encontrar 1/3 de 24, realiza una multiplicación, encuentra el equivalente y lo vincula con el número de piezas solicitadas.

Zahira, al igual que varios de sus compañeros de clase (33/42 del total del grupo), después de identificar por diferentes caminos la cantidad de cupcakes que representaban al todo, fue capaz de establecer con facilidad las relaciones multiplicativas existentes en los planteamientos de partes de partes del problema planteado (Figura 6). Opera según lo ha trabajado con la maestra de grupo haciendo uso del elemento neutro, que como ella lo designa “convierten el entero a uneavos” y multiplica los numeradores y los denominadores para identificar la cantidad de cupackes decorados con color rosa.

Durante la sesión 4 del taller en la 2ª parte, se plantearon situaciones del tipo “a/b de n”, Zahira (como varios de sus compañeros) asoció la relación multiplicativa de la situación planteada con el significado de “reparto” (Figura 7).

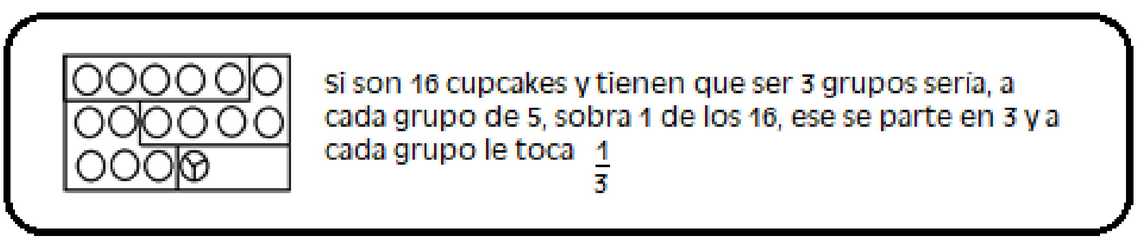

Figura 7. Durante el juego de la sesión 4, Zahira “lanza el dado y cae 1/3 de, toma una tarjeta que dice 16 cupcakes, las integra y forma la situación a desarrollar: “1/3 de 16 cupcakes” que desarrolla auxiliándose de representaciones pictóricas asociándolas con el significado de reparto.

Podemos identificar en Zahira un tránsito paulatino pero estable del uso y manejo que da a las situaciones problemáticas con estructura multiplicativa. Fue capaz de vincular la relación parte de parte con una relación multiplicativa mediante fracciones y definió adecuadamente la relación de la preposición “de” con la multiplicación con fracciones, asignando el significado de reparto a situaciones vinculadas con la estructura a/b de n.

Dificultades generales

Zahira al hacer representaciones cometía errores de trazo o de corte y al realizar comparaciones entre las porciones resultantes atribuía esa diferencia al número y no al trazo en sí. Esta dificultad pudo ser superada al solicitar verificar su respuesta haciendo uso del material de apoyo del taller.

Conclusiones generales

En esta investigación identificamos que Zahira llegó a utilizar el recurso de "partes de partes" y vincularlo con la multiplicación de fracciones, haciendo uso de expresiones de la forma a/b de c/d de pastel y reconstruyéndolo como ac/bd del pastel.

Al trabajar con partes de partes resulta necesario tener presente en todo momento la unidad con la que se está trabajando para no perder de vista la unidad de referencia inicial.

En la enseñanza escolar, el trabajo centrado en algoritmos con operaciones aditivas y multiplicativas mediante fracciones cobra mucha fuerza, pero a nivel de comprensión de los alumnos o transferencia de ideas genera lagunas e inconsistencias que se reflejan al plantear nuevas situaciones donde los estudiantes desconocen o confunden la forma de resolver.

Referencias

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, 28 (1), 9-38.

Mulligan, J. (1992). "Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study". *Mathematics Education Research Journal*, 4 (1), 24-41.

Peralta, M. T. (1989). *Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México.

Peralta, M. T. y Valdemoros, A. M. (1989). Representación gráfica de la multiplicación de fracciones, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad. *Memorias de la cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Acapulco, México, 285-290.

Piaget, J. (1975). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires, Argentina: Edit. Guadalupe.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Secretaría de Educación Pública. (2011).*Plan y programas de estudio, Educación Básica, Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Valdemoros, M. (1997) Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso. *Educación Matemática*. 9 (3), 5-17.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, Fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativa.* 7 (3), 235-256.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México, México: Editorial Trillas.

Vigotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

http://planea.sep.gob.mx Fecha de consulta 5 de febrero de 2018

http://143.137.111.132/PLANEA/Resultados2016/Basica2016/R16baCCTGeneral.aspx