



Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos

Marta **Ramírez** Cruz
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mramirez@cinvestav.mx
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Esta comunicación se presenta en el marco de una investigación llevada a cabo con profesores en servicio. El propósito es identificar el conocimiento matemático y didáctico que pone en práctica una profesora con experiencia, cuando enseña temas relacionados con problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como las reflexiones que la maestra hace de su práctica docente. Los instrumentos metodológicos utilizados en la investigación fueron un cuestionario y una entrevista. En el presente reporte de investigación se integraron algunas tareas y fragmentos que permiten mostrar datos relevantes de la enseñanza propuesta por la profesora Rosa, así como algunas reflexiones que de ésta derivaron.

Palabras clave: Fracciones, problemas multiplicativos, unidad, representaciones gráficas y reflexión de la práctica.

Introducción

En esta comunicación nos interesa mostrar algunos aspectos de la práctica de una profesora de matemáticas; consideramos que es fundamental identificar los conocimientos matemáticos y didácticos con los que cuenta porque se consideran factores importantes en el diseño de actividades que se llevan al aula, así lo han señalado investigadores como Kieren (1988) cuando menciona que corresponde al profesor la creación de ambientes propicios para la construcción de conocimientos relacionados con los números fraccionarios en la clase de matemáticas.

Con base en la idea anterior y en los reportes de investigaciones previas orientadas al desempeño de los profesores en el aula, en este estudio nos interesa analizar los conocimientos de esta profesora relacionados con la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones, a través del desarrollo de problemas multiplicativos en la escuela secundaria.

Problema de investigación

Se considera que el profesor con experiencia en la enseñanza tiene un abanico de estrategias para llevar al aula y para comunicarlas; se han realizado investigaciones en torno a los profesores y sus conocimientos matemáticos, aunque la mayoría de dichos reportes de investigación se enfocan hacia los docentes en formación básica e inicial. En este sentido Ball (2000) consideró la importancia de crear valiosas oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores; ella señala que el contenido matemático influye en una buena enseñanza tomando en cuenta los conocimientos sobre el contenido disciplinar de los profesores, cómo lo saben y lo que son capaces de transmitir matemáticamente. En este orden de ideas el propósito de este trabajo consiste en identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de una profesora de matemáticas de educación secundaria con la finalidad de una mejora en la enseñanza.

Preguntas de investigación

En la enseñanza de operaciones ligadas a las fracciones en la escuela secundaria, con profesores en servicio, interesa conocer: a) ¿cuáles son los contenidos de la Matemática Educativa a los que recurre la maestra Rosa para enseñar problemas multiplicativos que implican números fraccionarios? b) ¿De qué manera el autoanálisis reflexivo de su práctica docente contribuye a la mejora de su enseñanza?

Los objetivos de la investigación

Objetivo general: Con base en los cuestionamientos iniciales, este trabajo pretende identificar el conocimiento de la Matemática Educativa de una profesora en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, reflexionar sobre sus fortalezas y áreas de oportunidad.

Objetivos específicos: a) Identificar las estrategias que utiliza una profesora de educación secundaria al resolver problemas multiplicativos que implican números fraccionarios para analizar las estrategias y reflexionar sobre ellas para incorporarlas en actividades del aula. b) Determinar si el análisis de sus propias estrategias favorece la reflexión global acerca de su práctica docente. Para llevar a cabo lo anterior, se dio seguimiento a la profesora Rosa a través de un cuestionario inicial y posteriormente durante una entrevista, para conocer e identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que subyacen en su *praxis*, cuando ella resuelve las tareas propuestas.

Marco teórico

En este espacio teórico se destacan distintos contenidos relevantes a nivel del reconocimiento de las operaciones con fracciones como la multiplicación y la división, las que en este comunicado son planteadas a través de problemas multiplicativos. Asimismo, esos aspectos particulares son destacados en cada párrafo con *itálicas*; todos ellos destacan la importancia de tales contenidos en el desarrollo de la presente investigación.

Kieren (1983) menciona que las fracciones están constituidas por constructos con cuatro significados: medida, cociente (con referencia al reparto), razón, operador multiplicativo y la relación parte-todo. Estos conocimientos forman la base del conocimiento de número racional; en este estudio, interpretamos a tales constructos como los que se construyen a partir de nociones elementales previas.

En lo que se refiere a la relación *parte-todo* se expresa a partir de regiones geométricas, conjuntos de objetos y la recta numérica, con ello se implica la noción de longitud y área. Kieren

(1985) menciona que la representación gráfica de solución puede proporcionar pistas valiosas de los procesos de pensamiento de los sujetos que tratan de resolver el problema. Afirma que la partición es un precursor esencial de las nociones de números racionales y permite observar las cualidades multiplicativas y aditivas.

En relación a la enseñanza de los números fraccionarios Vergnaud (1983) menciona que uno de los puntos desafiantes de la educación es usar problemas significativos tanto en aspectos teóricos como prácticos. Establece campos conceptuales y los define como “conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero estrechamente interconectados” (p.141); menciona dos campos conceptuales como principales, estructuras aditivas y multiplicativas, en donde los problemas involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo y multiplicativo. Para este trabajo nos interesa lo que se refiere a las estructuras multiplicativas, donde él identifica tres categorías: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple distinta del producto.

En el momento de introducción de los algoritmos aplicados a las fracciones, en general, y a la multiplicación en particular, Kieren (1988) menciona, que “en las escuelas suelen desarrollar los algoritmos como una extensión de los números enteros”, y que “debido a lo anterior, el curriculum y la instrucción enfatizan prematuramente reglas técnico simbólicas de operación, así, los estudiantes aprenden la forma pero no el significado asociado a la operación correspondiente” (p. 87) *en este caso la multiplicación, agregamos nosotros*. Retomamos el planteamiento anterior que el autor hace con respecto a los estudiantes, pero en nuestra investigación lo hacemos extensivo a los profesores, dado que en este estudio son considerados como los actores principales en la enseñanza de las matemáticas, debido a que ellos toman decisiones didácticas con base en lo deben aprender los estudiantes, por ello consideramos que las decisiones didácticas de la profesora Rosa son fundamentales.

De manera particular en este estudio se analizan conocimientos de multiplicación y división de números fraccionarios, en este sentido Ball (1990) destaca que los docentes intentan plantear situaciones de la vida real para mostrar el significado o la aplicación de determinado contenido, sin embargo, hay una comprensión limitada de la división de fracciones y rara vez se enseña conceptualmente en la escuela, se sustenta con el uso de reglas, dejando de lado ideas o relaciones multiplicativas.

En relación con las actividades que se pueden desarrollar en el aula, con las fracciones, Tirosch (2000) menciona que existen situaciones en que los futuros profesores tienden a atribuir propiedades de división de números naturales a la división de fracciones, en este sentido, nos interesa conocer la práctica de la profesora Rosa para verificar si hay alguna relación de lo antes mencionado con su enseñanza y lo que anticipa de acuerdo a su experiencia cuando diseña actividades para su clase, al resolver problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

Por otra parte, en el estudio de las fracciones, Sharp y Welder (2014) mencionan que la división de fracciones es un tema difícil para los estudiantes y que los profesores pueden apoyar a los alumnos en las dificultades que presentan y que anticipan desde el diseño de situaciones de enseñanza. En este sentido consideramos de mucha relevancia la participación de la profesora Rosa, atendiendo los datos que puede aportar desde su amplia experiencia.

A este respecto, Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015) sugieren la relevancia de identificar en el sujeto del conocimiento la presencia de “núcleos de significación y pensamiento”, dado que tales núcleos permiten entender como organiza su discurso dicho sujeto

del conocimiento. Las autoras referidas definen a los “núcleos de significación y pensamiento como aquellas palabras y expresiones matemáticas verbalizadas, así como las representaciones y los modelos de enseñanza plenamente cargados de sentido para quien construye el conocimiento” (p.195). Para este estudio se considera la propuesta de dichas investigadoras para el análisis de lo que aquí se presenta; a lo largo del análisis de cada tarea, se van a identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de la profesora Rosa a través de su discurso y de las representaciones que emergen, asimismo, a través de los cuestionamientos que se hagan de las representaciones de la docente se espera documentar de manera escrita las reflexiones que surjan.

Diseño Metodológico

La investigación es de corte cualitativo (Stake, 1999) porque el objetivo es identificar una problemática particular, es decir, consideramos que la práctica docente implica procesos de enseñanza, que a su vez requieren de conocimientos matemáticos y didácticos para el diseño de la clase; para ello nos interesa identificar las estrategias de la profesora Rosa con formación normalista y amplia experiencia en la clase de matemáticas, asimismo, conocer sus reflexiones ante la resolución de tareas que implican problemas multiplicativos relacionados con fracciones.

Con el propósito de explorar los conocimientos matemáticos involucrados al resolver problemas de tipo multiplicativo ligados a las fracciones, en un primer momento, se aplicó un cuestionario con cinco problemas, en un segundo momento, se realizó una entrevista semiestructurada que incluía la resolución de tareas asociadas a problemas multiplicativos de fracciones. La entrevista permitió retroalimentar la exploración de las acciones, los significados, procedimientos, la toma de decisiones y reflexiones de la profesora Rosa al resolver los problemas.

Mediante la aplicación de estos problemas (aplicados en la entrevista) se pretende identificar: a) aspectos relacionados con la formación docente que son inherentes a la práctica, b) conocer los conocimientos matemáticos de las fracciones, como los vincula con el diseño de actividades en su práctica docente; c) decisiones didácticas de acuerdo a la experiencia en el trabajo con números fraccionarios, así como la reflexión de sus ideas.

El caso de la profesora Rosa

La profesora Rosa es egresada de una Escuela Normal para profesores de secundaria con especialidad en matemáticas en la Ciudad de México. La elegimos porque en el cuestionario que aplicamos a tres profesoras de matemáticas de educación secundaria, ella manifestó diferentes procedimientos para resolver las tareas asignadas, Rosa tiene 19 años de trabajo con alumnos de secundaria y esto permite suponer que su experiencia en la enseñanza es basta. Ella manifestó que ha tenido formación continua, es decir, ha participado en cursos que ofrecen las instituciones encargadas de capacitar al magisterio. Para esta información solo se presentan algunos de los resultados del análisis de las actividades realizadas por la profesora. Este reporte se aborda desde la relevancia de los datos que aporta la maestra, en el marco de una investigación más amplia.

Análisis de resultados

En este apartado del escrito presentamos fragmentos de la entrevista que le hicimos a la profesora y que permiten recrear e identificar “los núcleos de significación y pensamiento” que manifiesta en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, así como las estrategias que utiliza para definir las actividades para la enseñanza de su clase de matemáticas. Nos interesa conocer cuáles son las estrategias que privilegia, si identifica dificultades al

desarrollar estos conocimientos, a qué elementos recurre para resolver dichas situaciones. Se utilizan corchetes *dentro de las tablas* para facilitar la lectura y descripción de los procedimientos desarrollados por la profesora, se numera la secuencia de las representaciones y señalamientos que ella hace.

Problema de división con números fraccionarios

La Figura 1 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 1.

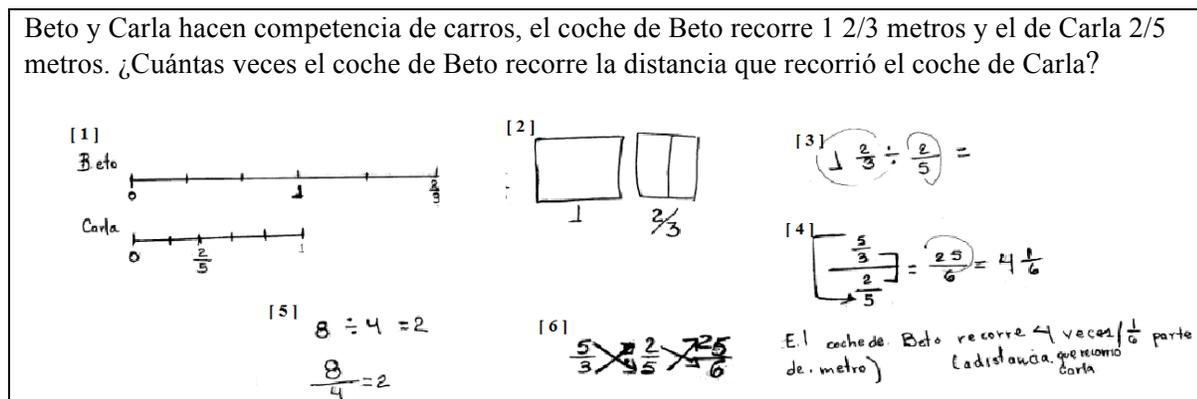


Figura 1. Problema de división de fracciones con modelos lineales y geométricos.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que realizó con la consigna de considerar que la tarea la estaba realizando en el aula. Ella utilizó una recta numérica para representar los recorridos [1, en la Figura 1], y una representación geométrica [2, en la Figura 1], pero no las vinculó, después señaló la expresión numérica [3, en la Figura 1], y comentó al respecto: “hago una repartición de cuántas veces cabe dos quintas partes en la distancia que ha recorrido el carro de Beto, para esta repartición yo divido $1 \frac{2}{5}$ entre $\frac{2}{5}$ ”, sin embargo, Rosa resolvió el problema utilizando la representación [4, en la Figura 1].

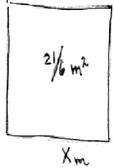
La entrevistadora, preguntó acerca del procedimiento que utilizó para resolver la división de fracciones y ella apeló a su experiencia “al alumno se le dificulta mucho entender cómo se va a dividir este número mixto con esta fracción propia [3, en la Figura 1], para mí es más sencillo que ellos lo interpreten con este arreglo”, y señaló [4, en la Figura 1]; ella utilizó una representación con números naturales que se observa en [5, en la Figura 1], con esa acción ella dio sentido a la división de fracciones y justificó el procedimiento que hizo en [4, en la Figura 1] y agregó “lo que hago es utilizar los extremos con los medios, es la forma de hacer la división.” Ella mencionó que no utilizó el método de los productos cruzados [6, en la Figura 1] porque los alumnos lo confunden con el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

En los núcleos de significación y pensamiento de la profesora Rosa observamos representaciones que permiten identificar los conocimientos que utilizó para resolver la tarea, el supuesto es que ella recurrió a modelos alternativos de solución para los problemas con fracciones, estas decisiones tienen origen en su experiencia de enseñanza, tuvo sentido de la unidad, apoyó la solución del problema con modelos lineales y geométricos para dar significado a la partición, pero no mencionó la equipartición de manera explícita. Ella consideró el modelo geométrico como estrategia para mostrar lo que realizó en el plano de las operaciones, sin embargo, no se observó una vinculación con los modelos de representación y las representaciones numéricas, estas representaciones geométricas no son significativas respecto al problema de división.

Problema del inverso de la multiplicación

La Figura 2 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 2.

Javier tiene una huerta rectangular que mide $21/6$ metros cuadrados de área. En este terreno sembró cebollas y lechugas. Como se avecina el temporal de lluvias con posibilidad de granizo quiere proteger su huerta, así que le colocará una cubierta de plástico. Sabe que el ancho de terreno es de $1\frac{1}{2}$ metros. ¿Cuánto debe medir el largo del plástico que necesita para cubrir el área del terreno?
 Inspirado en Castañeda (2015) adaptación de las investigadoras.

[1]  $21/6 \text{ m}^2$ $1\frac{1}{2} \text{ m}$ $x \text{ m}$

[2] $A = b \times h$

[3] $21/6 = b (1\frac{1}{2})$

[4] $10 = (5)(x)$
 $\frac{10}{5} = x$

[5] $\frac{21}{6} = \frac{7}{3}$

[6] $2\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ m de largo}$

Figura 2. Problema 2, donde la profesora menciona el inverso de la multiplicación.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras las estrategias mostrando sus decisiones didácticas. Ella identificó cómo proporcionaría información a los alumnos en los siguientes términos: “deben conocer las fórmulas geométricas, ¿cómo representarían con algún dibujo este problema?”, Rosa anticipó que ellos dibujarían un rectángulo al tiempo que señaló la producción correspondiente a [1, en la Figura 2]; de igual manera ella previó que los estudiantes tendrían interiorizada la fórmula del área y a partir de ello, resolverían el problema. Al respecto, la profesora manifestó como verbalizaría a sus alumnos las instrucciones para hacer uso de la figura, “este lado mide $1\frac{1}{2}$ metro, ¿qué es lo que no sabemos?, ¿cuánto mide la base de este rectángulo?”, al tiempo que señaló la base del rectángulo como asociándola con la incógnita.

Rosa continuó explicitando cómo asociarían los datos de la figura con la fórmula: “sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura”, ella escribió la ecuación [3, en la Figura 2], y representó la fórmula del área [2, en la figura 2], continuó diciendo: “el área son $21/6$ de metros cuadrados, la base no la conocemos, pero la altura si, la cual es $1\frac{1}{2}$ metro”, lo indico en [3, en la Figura 2], luego preguntaría a sus estudiantes como resolverían tal situación.

La profesora anticipó la dificultad que podrían tener los alumnos y utilizó una representación algebraica con números naturales [4, en la Figura 2], ella verbalizó tal aspecto: “para hacerlo más sencillo utilizo un ejemplo, podemos conocer ese valor a través de una operación inversa que en este caso es una división”, se refiere a la operación inversa de la multiplicación, ella agregó “sirve para despejar, para que ellos conozcan que es un despeje, y nos va a permitir conocer el valor que hace falta”, la profesora se refirió a lo que hizo en [4, en la Figura 2], para ella este proceso es suficiente para acceder a la división de fracciones, ya que el procedimiento que utilizó fue el mismo del problema anterior [5, en la Figura 2], así la profesora dio sentido a la división de fracciones “los alumnos ya entendieron que una división va a resolver el problema”, resuelto el problema, interpretó la repuesta “que está queriendo decir este $7/3$, o $2\frac{1}{3}$, pues que es la medida del largo en metros con respecto a lo que nos pide el problema”.

Del análisis de la tarea 2 consideramos que la profesora Rosa utilizó un modelo geométrico para dar sentido al problema, sin embargo, no lo vinculó con la operación de fracciones, utilizó la figura donde representó algebraicamente la situación de manera aislada. Ella no justificó el significado de la operación inversa de la multiplicación, sólo se limitó a despejar la ecuación

recurriendo a un caso particular. Tuvo presente la unidad de referencia porque indicó que el valor encontrado es la base del rectángulo.

Problema de multiplicación de fracciones

En la figura 3 la profesora Rosa resolvió una tarea de multiplicación de fracciones.

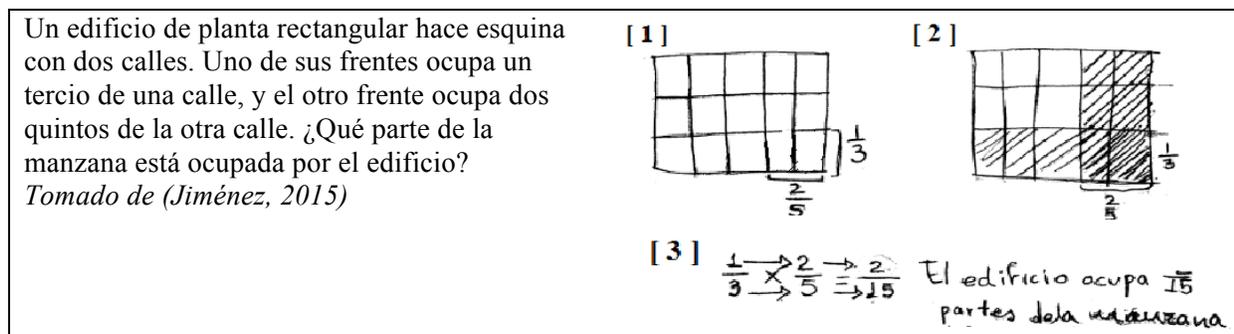


Figura 3. Problema de multiplicación.

La profesora resolvió y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que utilizó para resolver el problema “vamos a dividir este frente en tercios, tomando una tercera parte y el otro lado del arreglo rectangular lo vamos a dividir en quintas partes de las cuales vamos a tomar dos” ella señaló la representación [1, en la Figura 3], y mencionó la necesidad de colorear las regiones y obtener secciones con doble sombreado, así lo indicó en [2, en la Figura 3]. Ella hizo énfasis en que la región con doble sombreado le permitía representar la solución gráfica del problema y mostrar a los estudiantes la multiplicación de fracciones, dijo que lo había aprendido durante los cursos de formación continua y que previo a dicha capacitación solo enseñaba el algoritmo.

Rosa señaló la representación numérica que hizo en [3, en la Figura 3] y refiriéndose a la solución relacionó el denominador con el total de partes en que se dividió la figura, resalto que el numerador y las partes con doble sombreado eran la misma cantidad y con base en ello dio sentido a la multiplicación de fracciones; ella anotó dos flechas para indicar lo que realizó al nivel de la representación numérica para la multiplicación de las fracciones y agregó “al momento de representar una multiplicación se van a dar cuenta de que se realiza multiplicando de forma directa numerador por numerador y denominador con denominador y llegamos a $\frac{2}{15}$, así queda más claro qué representan las fracciones o el algoritmo de la multiplicación con fracciones”. En la tarea tres observamos que la profesora tenía presente la unidad de referencia, lo manifestó para resaltar la respuesta del problema, es decir, la relación del resultado con el total. Se identificó el papel preponderante del modelo geométrico para justificar lo que realizó de manera operatoria. Se apoyó en lo visual para comunicar el algoritmo de la multiplicación.

Consideraciones finales

Del análisis de los instrumentos aplicados, identificamos que la profesora Rosa recurrió al uso del todo continuo sin establecer de manera concreta la equidivisión, privilegió el uso de la representación geométrica destacando el modelo del área. Es posible suponer que desde su experiencia de enseñanza ella le otorga eficacia a este modelo de representación, ya que utilizó el rectángulo sobre otras figuras, esta situación favoreció el sentido de las fracciones y sus operaciones, ella, sin embargo, estas representaciones no le permitieron ilustrar el caso de la división.

En torno a estas observaciones es posible suponer que las decisiones de la profesora Rosa están definidas por el currículum oficial, por su formación en la Escuela Normal, por los cursos de formación continua y por su experiencia docente. Con relación a los documentos oficiales, desde la década de los setenta se incorporó al Plan y Programas de estudio de educación básica el uso de representaciones en la recta numérica y con figuras geométricas para el estudio de las fracciones, estos recursos siguen estando actualmente vigentes en el Plan y Programas de estudio de educación secundaria.

Con base en lo anterior la profesora Rosa tomó decisiones para el diseño de las actividades que podría llevar a su clase de matemáticas, considerando que las operaciones de números fraccionarios representan dificultades de aprendizaje y cognitivas en los alumnos. Así, en la solución de los problemas surgieron estrategias informales como el caso de la división de fracciones, donde ella implementó ejemplos sencillos con números naturales y trasladó los procedimientos de esos números a las operaciones de números fraccionarios. Durante la solución de los problemas se identificó que ante la ausencia del tratamiento del inverso de la multiplicación se apoyó en el despeje de una ecuación (en el más estricto sentido algebraico), como se ha reportado en otros estudios como Valdemoros et al. (2015), esta situación señala tendencias en profesores en servicios y los futuros profesores. Habrá una continuidad en torno a estos procesos y representaciones en una segunda entrevista, a realizar próximamente.

Referencias bibliográficas

- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for researcher in Mathematics Education*, 21, (2), 132-134.
- Ball, D. L. (2000). Brinding practices: Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Castañeda, A. (2015). *Retos matemáticos I*. México: Ediciones SM.
- Jiménez, L. (2015). *Matemáticas I*. México: Grupo Editorial Patria.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education*, 506-525.
- Kieren, T., Nelson, D. & Smith G. (1985) Graphical Algorithms in partitioning Tasks. *The Journal of Mathematics Behavior* 4, 25-36: Edmonton, Alberta, Canadá.
- Kieren, T. (1988) Personal Knowledge of rational number: its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sharp, J., & Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problem posing. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19, (9), 490-496.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata
- Tirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
- Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). Núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas*, 1, 195-204: Formación Inicial para Profesores de Primaria. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana. ISBN Volumen: 978-9945-415-98-8 ISNB Obra Completa: 978-9945-415-97-1.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.