XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: análise de uma tarefa

William José Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
williamboatematica@gmail.com
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
Daniel Daré Luziano da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
dlsilvadaniel@hotmail.com
Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC, câmpus Santo André
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Assumindo que aprender Cálculo Diferencial e Integral (CDI) implica analisar de forma coordenada as variações de duas grandezas interdependentes (raciocínio covariacional – RC), apresentamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi desvelar ideias do RC mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa matemática em uma turma de CDI. Realizamos uma análise qualitativa, de cunho interpretativo, a partir de recortes da produção escrita e trechos de diálogos de um grupo de estudantes no trabalho com uma dessas tarefas. Concluimos que o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC, como a constituição das quantidades envolvidas na situação e o processo de medição dessas quantidades, a compreensão de que as quantidades envolvidas variam continuamente e sua coordenação, reconhecendo a direação de crescimento e mudanças na taxa de crescimento. Porém, o grupo não foi capaz de esboçar corretamente um gráfico que representasse a relação envolvida em uma das situações da tarefa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Tarefas Matemáticas, Raciocínio Covariacional.

Introdução

Durante praticamente os três anos do Ensino Médio, e ao ingressar no Ensino Superior, ao cursar a disclina de CDI, transitamos por um conceito “formal” de função que, em pouco – ou em nada - “carrega” sua essência: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas. Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) evidenciam que o uso da definição atual como introdução ao conceito de função no âmbito escolar é inadequada, por tratar-se de uma resposta a problemas que os estudantes sequer podem conceber, uma vez que foi motivada largamente por debates entre matemáticos na busca de respostas à questões internas da própria Matemática.

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra. Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas. Para Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2003, p. 124), o raciocínio covariacional (RC) contempla “as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda em relação à outra”. Conforme destacam Thompson e Carlson (2017), ideias de variação e covariação são epistemologicamente necessárias para que se desenvolvam conceito útil e robusto de função, e servem como bases conceituais para elaboração de conceitos do CDI.

Nessa acepção, elencamos como objetivo da pesquisa a investigação das possibilidades do desenvolvimento de ideias do RC em estudantes de CDI 1, promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Procuramos aqui desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa, recorte do trabalho de dissertação do primeiro autor (Gonçalves, 2018).

Referencial teórico

Em uma abordagem tradicional para quantificar uma função dinâmica do mundo real, o estudante geralmente recebe uma tabela de valores de amostragem, plota pontos no plano cartesiano e, em seguida, usa o gráfico (união de pontos) para estender a tabela. Em um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o aluno é então questionado sobre a dinâmica da situação do mundo real que requer a extração de informações dinâmicas de um gráfico estático, como taxa de crescimento e decrescimento, por exemplo. Quando se trata de situações dinâmicas, a maioria dos alunos esbarram na dificuldade de visualização da situação e de como se relacionam as variáveis (Goldenberg, Lewis, & O’Keefe, 1992).

Uma abordagem possível para apoiar o pensamento dos alunos, no intuito de ajudá-los a imaginar relacionamentos entre quantidades que mudam continuamente, seria levá-los a pensar em pequenas mudanças nas quantidades como forma de promover seu raciocínio com variação contínua. Porém, para Thompson e Carlson (2017), apoiados em trabalhos de Castillo-Garsow, isso não é suficiente, uma vez que, para pensar em variação contínua envolve deve-se, necessariamente, pensar em movimento.

Assim, um conceito presente nessa discussão é o de movimento fictivo: “aquele em que o objeto, apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere” (Frant, Silva, & Powell, 2013, p. 36). Por exemplo, ao dizermos que uma estrada “vai” de um extremo ao outro do país, nada realmente se move, ainda que falemos como se algo estivesse se movendo (em função do uso de um verbo de movimento: “ir”). Thompson e Carlson (2017) indicam que “Quando se desenvolve uma imagem refletida de algo se movendo fictivamente, a imagem permanece presente, mas tácita, como uma varredura de atenção que está envolvida ao pensar em todos os elementos de um conjunto (p. 431)”. As concepções de tempo implicam e se baseiam no movimento fictivo. Desse modo, concepções de “variação contínua dos alunos podem ser afetadas por sua capacidade de conceber tempo como uma quantidade e, quando eles estão pensando em medidas específicas de tempo quantificado, pelo seu conceito de número” (Thompson & Carlson, 2017, p. 431).

Nosso foco, respaldados por elementos trazidos no quadro teórico proposto pelos autores supracitados, foi pensar tarefas que oferessem aos estudantes de CDI possibilidades para o desenvolvimento de ideias do RC, com base na ideia de “movimento fictivo”. Tal forma de pensar é fundamental na compreensão de fenômenos que envolvem quantidades que se relacionam, e que servem de base para a elaboração de conceitos do CDI (como derivadas e integrais, além da resignificação do próprio conceito de função).

No que se refere ao uso de tarefas no ensino de Matemática, da forma como Ponte (2014) propõe, estamos entendendo tarefas como “elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas” (p. 14). Assim, tarefas são “ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática”, podendo ou não ter “potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar” (Ponte, 2014, p. 16). Acerca do papel das discussões coletivas no trabalho com tarefas matemáticas, Ponte (2017, p. 34) destaca que “tanto a investigação como a prática profissional mostram como momentos de discussão são essenciais para a compreensão matemática por parte dos alunos”.

Com base nas ideias presentes em trabalhos desenvolvidos em nosso grupo de pesquisa, como Trevisan e Mendes (2018), temos defendido a organização de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas. Para esses autores, o termo “ambiente de aprendizagem” refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Já os “episódios” são momentos em que os estudantes são organizados em grupos e a eles são propostas tarefas, não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, que contribuam para a exploração intuitiva de ideias matemáticas e possibilitem uma posterior sistematização de conceitos.

Procedimentos metodológicos

A discussão que trazemos neste artigo é parte intregrante de um estudo mais amplo (Gonçalves, 2018), o qual foi desenvolvido numa perspectiva qualitativa, de cunho interpretativo. Tal estudo, intitulado “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino”, teve por objetivo investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de ambientes de ensino e de aprendizagem de CDI, considerando as condições reais às quais estamos sujeitos. Assim, trabalhamos com a criação de tarefas e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas (Trevisan e Mendes, 2018), que oportunizem aos estudantes reinventar o CDI (Freudenthal, 1973), que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente antes que sejam descritos com precisão ou provadas.

Para esse estudo foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma de Engenharia de uma Universidade Federal do Paraná (Brasil), ingressantes no curso no 2º semestre de 2017 e matriculados na disciplina de CDI 1[1]. Cada episódio se consistiu a partir de um encontro composto por 3 aulas de 50 minutos, o qual foi organizado buscando-se atender pressupostos de um ambiente de ensino e de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas: aos alunos, organizados em grupos de 3 a 5 integrantes, foram propostas sequências de tarefas sem que houvesse alguma explicação prévia de conteúdos. Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas, a constar:

- (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição);
- (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
- (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
- (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas:
    - (a) reconhecer que as quantidades se relacionam;
    - (b) reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo;
    - (c) reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
    - (d) identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Visto que esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função em seu Ensino Médio, nosso intuito, por meio da realização dessas tarefas, era que (re)significassem esse conceito. Em todas elas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabela, gráfico), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

A tarefa que foi selecionada para análise neste artigo, que compõem o último episódio (ocorrido em novembro de 2017), tem o seguinte enunciado: *Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato: (a) Circular; (b) Quadrado.*

Para coleta de dados fizemos uso da produção escrita dos estudantes e do áudio de um dos grupos (composto por três estudantes, aqui nomeados C1, C2 e C3) enquanto trabalhavam com a tarefa, bem como das anotações feitas pelos pesquisadores em seu diário de campo. Para fins de análise, organizamos recortes que ilustrem o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolvem ideias do RC.

[1] Essa disciplina é ofertada no 1º semestre do curso, e contempla em sua ementa o estudo de funções, limites, derivadas e integrais em uma variável real.

Análise dos dados

O grupo iniciou a discussão analisando o caso da praça circular (item a), conforme transcrição a seguir:

[1] C1: O perímetro de um círculo é $2\pi r$.
[2] C2: O comprimento.
[3] C1: E a área é $2\pi r^2$
[4] C2: Não, é πr^2.
[5] C1: Só a fórmula pra gente pensar na fórmula. Se aumenta o raio, a área vai aumentar muito mais do que aumenta o perímetro, então, se a gente for construir uma relação entre a área e o perímetro; conforme o perímetro está crescendo, a área está crescendo muito mais. Porque o raio aumenta pros dois. Vamos supor, aumenta 5 pros dois. Esse aqui [área] vai ser 5 ao quadrado, 25, esse aqui [perímetro] vai ser 10, não é dobro, mas esse aqui [área] aumenta mais depressa que esse [perímetro]...faz sentido?
[6] C2: Faz. E quanto mais o raio vai aumentando mais a área vai aumentando.
[7] C1: Os dois aumentam juntos. E a área aumenta pra cima, aumenta aumentando. Aumenta crescendo.

Em seu diálogo, mostraram reconhecer que a taxa de crescimento da área em relação ao raio é maior que a do perímetro. Nesse caso, utilizaram o “raio” implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam. Nesse viés, mostraram perceber que existe uma covariação entre as grandezas observadas. Os gráficos apresentados pelo grupo, após discussão, tinham formas diferentes, conforme Figura 1. No lado esquerdo, podemos observar que o gráfico cresce a uma taxa crescente. No lado direito cresce também, porém a uma taxa decrescente. Embora eles tenham pensado de forma correta, os elementos discutidos parecem não ter sidos suficientes para embasar o formato do gráfico e sua relação com o modo como as grandezas envolvidas se relacionam.

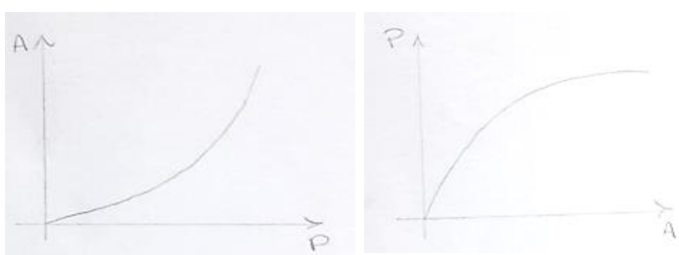

Figura 1. Gráficos apresentados pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça circular.
Fonte: autores.

Continuando a discussão, agora do item (b):

[8] C2: E se for um quadrado?
[9] C3: Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área.
[10] C2: A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados.
[11] C3: É, porque ó! A área é lado ao quadrado e o perímetro é quatro vezes o lado.
[12] C2: Não importa o valor. Mesmo que o lado seja 20, temos que 20^2 é 400.
[13] C3: Não... Não sempre. Põe lado igual a 2, por exemplo, a área fica 4. O perímetro fica 8.... É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro.
[14] C2: A gente vai encontrar esse maior? Tipo o ponto máximo?
[15] C3: Hã?
[16] C2: A gente vai encontrar esse ponto?

[17] C3: Ah, tinha que encontrar...
[18] C2: Derivar.
[19] C3: Eu acho que não precisa é só, tipo, um esboço, sabe? É só a gente imaginar assim ó.

O grupo conseguiu nesse trecho de discussão, reconhecer que o perímetro cresce mais rapidamente que a área até certo momento (trechos [9] e [13]), ainda não identificado. Chegam a transitar por ideias do CDI, como mostrado em [14] e [18] tendo lembranças que algum item do CDI encontro os pontos de máximos, chegam a mencionar derivada.

[20] C3: Então a área tipo vai... Não sei, no começo ela vai bem baixinha.
[21] C2: A gente faz tipo, esse crescimento aumentar.
[22] C3: E começa pequeno.
[23] C2: Daí quando o lado é 3, o perímetro 12, a área é 9. Quando o lado é 4, o perímetro é 16 e a área é 16.
[24] C4: Depois que ela começa...
[25] C2: No 4.
[26] C2: Daí quando é 4 as duas são iguais... E daí depois a área aumenta.

Observando as falas do grupo, aquilo que era dúvida no início da discussão parece ser resolvido agora. O grupo reconhece que perímetro e área relacionam-se a uma taxa crescente. Porém, ao pensar em separado na relação “perímetro-lado” e “área-lado”, inferem, de forma equivocada, que há uma mudança na taxa de crescimento, construindo uma representação gráfica na qual aparece um ponto de inflexão (Figura 2), conforme diálogo abaixo.

[33] C1: Se a gente fizer o contrário, tem que ser por área e tempo?
[34] C2: Sim. Tem.
[35] C3: Pode ser área por perímetro.
[36] C2: É mais fácil.
[37] C1: Pode ser perímetro por área. A gente coloca, o perímetro cresce mais quando passa do quatro e o perímetro cresce quando passa do 4, fica mais bonito.
[38] C2: Tá ótimo.
[39] C1: Esse aqui se a gente quiser fazer perímetro por área, a área cresce mais que o perímetro, então o perímetro cresce menos conforme a área aumenta.

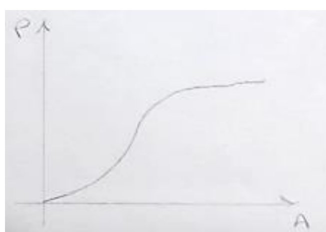

Figura 2. Gráfico apresentado pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça quadrada.
Fonte: autores.

Interpretação e discussão dos dados

Na resolução proposta, o grupo utilizou o “raio” implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam, no caso da praça circular, e o “lado”, no caso da praça quadrada. Nesse viés, mostraram reconhecer que existe uma covariação entre as grandezas observadas, concebendo o movimento fictivo (Frant, Silva, & Powell, 2013), na qual as grandezas envolvidas (no caso, o perímetro e a área), apesar de serem estáticos, foram compreendidas pelo movimento dinâmico que a situação sugere .

Para a praça quadrada, inferimos que os alunos reconhecem a covariação entre as grandezas de forma que ambas possuem a mesma direção de crescimento, porém, inferem equivacadamente que a taxa de crescimento do perímetro em relação à área altera-se conforme aumenta o lado do quadrado (*É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*). Chegam a tratar de taxa de crescimento para ambos os casos de forma "intuitiva" e também percebem que as taxas envolvidas se alteram (Carlson et al., 2003).

Em suas discussões, os estudantes utilizam de forma superficial algumas ideias do CDI associadas a conceitos que já se havia se sistematizado durante as aulas. Se observarmos, são listados alguns termos próprios do CDI, como, por exemplo, "ponto máximo" e "derivar"; em especial, ao reconhecerem de forma implícita a existência de uma taxa de variação que está se modificando. Emboram cheguem mencionar o termo "derivar", não parece ser claro o que significa numa situação como essa o conceito de derivada, e como se relaciona com a representação gráfica, uma vez que o gráfico da Figura 2 não está correto. Na fala mencionam ser importante achar esse ponto onde o perímetro deixa de crescer mais rápido que a área (*Ah, tinha que encontrar...*), embora optem por buscá-lo por tentativa e erro.

Para o grupo, o momento chamado por eles de "4" representa a mudança da taxa de crescimento entre as grandezas, o que os leva a construir um gráfico com um suposto ponto de inflexão. Em sua discussão, cogitam a possibilidade de inverter os eixos. Tal fato é interessante e importante enquanto reconhecimento de um olhar covariacional, afinal parece que se desprendem da obrigatoriedade definir alguma grandeza que "deva" ser representada no eixo horizontal (Thompson & Carlson, 2017).

Considerações finais

De modo geral, o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC que havíamos planejado para esta tarefa:

(i) constituindo quantidades envolvidas na situação, por exemplo: *Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área*;

(ii) raciocinando sobre o processo de medição dessas quantidades, como exposto em *A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados*;

(iii) fazendo os traços no papel, inferimos que o grupo compreende que, nessa situação, as quantidades envolvidas variam continuamente, uma vez que, ao invés de marcar pontos e uni-los, constrem uma curva contínua;

(iv) coordenando duas quantidades que variam juntas, (a) reconhecendo que as quantidades se relacionam (utilizando, implicitamente, as variáveis "lado" e "raio" para relacionar perímetro e área); (ii) reconhecem a direção de crescimento (lado e perímetro crescem "na mesma direção" - *Os dois aumentam juntos*); (iii) identificam mudanças de taxas de crescimento, conforme fragmento de fala: *É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*.

Entretanto, embora os estudantes reconheçam na discussão sobre a praça quadrada que, a partir de dado "momento" a área cresce mais rápido que o perímetro (como ocorre com a praça circular), eles não são capazes de reconhecer que o esboço do gráfico seria o mesmo para as duas situações, assumindo de forma equivocada uma mudança na taxa de crescimento (e a representação gráfica utilizando um ponto de inflexão).

Assim, embora durante a discussão, os estudantes tenham mostrado compreender elementos relacionados ao RC, eles não souberam como representar graficamente a relação entre as grandezas enredadas. Esse "faltar mão" é uma questão que emergiu de nossos dados e que permanece em aberto, demandando maior aprofundamento teórico, tanto na busca de compreendê-la, quanto para subsidiar reformulações nas tarefas propostas. Apesar disso, reconhecemos as potencialidades de tarefas como essa utilizada em nossa pesquisa, para uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros tanto do Ensino Médio quanto de CDI que tratam desse conceito.

Referências

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E.(2003) *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos*: una marco conceptual y un estudio. EMA, 121-156.

Frant, J. B., Silva, W. Q., & Powell A. B. (2013) Explorando tarefas com tecnologias digitais para o ensino de fenômenos periódicos: quando o movimento fictivo se torna factível. *Revista Educação e Cultura Contemporânea*, 10, 2, 29-49.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gonçalves, W J. (2018) *Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral*: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

Goldenberg, P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In: Dubinsky, E., & Guershon, H. (Ed.). *The concept of function*: Aspects of epistemology and pedagogy, 235-260.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W.(2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). *Making the connection*: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 27-42.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P.(Ed.) Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 13-30.

Ponte, J. P. (2017). Discussões Coletivas no Ensino-Aprendizagem de Matemática. In: GTI (Ed.). A *Prática dos Professores*: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, 33-56.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017) Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018) Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11, 209-227.