XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Objetos matemáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática: dos modelos concretos à realidade virtual

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem da Matemática em suas diversas áreas, particularmente no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), procurando destacar suas potencialidades e contribuições na construção do conhecimento. Diversas pesquisas em educação matemática evidenciam a importância da utilização de tais modelos e recursos no sentido de auxiliar a visualização e a compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do CDI defendidas por David Tall. Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a pesquisa documental acerca do tema em questão além do uso do software GeoGebra. Como resultados, destacamos que a utilização por parte profesores e estudantes de tais objetos matemáticos apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Modelos Matemáticos, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Visualização, GeoGebra.

Introdução

Os conceitos geométricos bem como algébricos dos objetos matemáticos abordados nos diversos cursos ministrados pelos profesores nas diferentes modalidades de ensino exigem por parte dos estudantes a visualização e a abstração cada vez maiores desses objetos de estudo, com o intuito de concretizar os temas envolvidos buscando assim uma melhor compreensão dos mesmos.

Para que essa visualização se torne possível, muitos professores passaram ao longo do tempo a elaborar e utilizar em suas aulas objetos matemáticos no sentido de explorar muitas propriedades tanto geométricas quanto algébricas desses objetos. Esse fato pode ser constatado, por exemplo, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva, Diferencial ou Algébrica e na Topologia.

O uso de materiais manipulativos, quer sejam concretos ou virtuais, favorece em grande medida a visualização dessas propriedades, auxiliando na construção do conhecimento matemático. No caso dos modelos físicos, esses são fabricados com materiais simples como madeira, plástico,gesso ou fios, e podem representar objetos matemáticos como por exemplo curvas ou superficies. Por seu turno, os objetos virtuais podem ser obtidos utilizando-se de recursos computacionais, que representam determinados modelos concretos.

De um modo geral, deve-se considerar que a questão da visualização foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas, assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do CDI ou na Geometria Analítica permite interpretar informações por meio da construção das representações visuais, de *softwares,* entre outros recursos didáticos.

Pesquisas em educação matemática ressaltam a importância do uso de objetos matemáticos no que tange à importância e ao papel da visualização no proceso de ensino e a aprendizagem da Matemática.

Tall (1991; 2002) discute em seus trabalhos o papel da visualização do contexto do ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor.

Por visualização, o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentamente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou. Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática.

Para isso, o autor ressalta o uso do computador como uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados a explorações sensoriais por meio de percepções, visualização e intuições, se constituindo um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente em que os estudantes podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos.

Sendo assim, essa pesquisa tem por objetivo apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem do CDI e da Geometria Analítica, procurando destacar suas potencialidades bem como contribuições para a construção do conhecimento matemático. Posteriormente, será apresentado um exemplo do estudo da representação de um objeto matemático construido no software GeoGebra destinado ao ensino das superficies regradas, particularmente o caso do hiperboloide de uma folha.

Modelos matemáticos concretos: breve contexto histórico

A utilização dos professores e pesquisadores de modelos matemáticos concretos no ensino e aprendizagem é uma prática recorrente nos últimos séculos em diversas universidades em todo o mundo, fruto do desenvolvimento cada vez maior da Matemática em suas áreas afins, particularmente nos diversos ramos da Geometria como a Descritiva, Analítica, Diferencial e Algébrica.

Na Europa o uso de modelos concretos e instrumentos diversos iniciou-se no século XVII e XVIII. Podemos destacar alguns exemplos tais como os modelos de Théodore Olivier (1793-1853), que estudou na Escola Politécnica de Paris e tornou-se em 1829 um dos fundadores da Escola Central de Artes e Manufacturas. Como professor de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra atuou na elaboração de modelos de matemática que criou para o auxiliar no ensino da geometria. Alguns destes modelos são de superfícies regradas, tendo partes amovíveis de modo a ilustrar aos estudantes como essas superfícies são geradas.

Figura 1. Modelo do hiperboloide de uma folha (Théodore Olivier)

Olivier ressaltava a utilidade dos seus modelos no ensino da Geometria Descritiva, permitindo aos alunos melhor compreender as propriedades geométricas das superfícies que estudavam. Segundo o autor:

> "É assim que começamos a compreender que, quando queremos falar aos alunos das propriedades de uma superfície, a primeira coisa a fazer é colocar sob os seus olhos o relevo dessa superfície, para que eles vejam distintamente aquilo de que queremos falar-lhes". (Tenreiro, 2015)

Nessa afirmação do autor podemos ressaltar a importância da construção do modelo concreto, no caso representando uma superficie, buscando evidenciar algumas propriedades geométricas do objeto matemático.

Assim como Olivier, o matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925) ao lecionar na universidade de Göttingen, na Alemanha em 1886, desenvolveu modelos geométricos e outros objetos ilustrativos tendo sua utilizadade para fins didáticos, contribuindo para a popularização dos mesmos. Um de seus modelos mais conhecidos diz respeito à superfície diagonal de modelo do Clebsch, definida pelas equações:

$$\begin{cases} {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + {x_4}^3 + {x_5}^3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Essa superfície cúbica apresenta 27 retas contidas na mesma, representada pelo modelo a seguir:

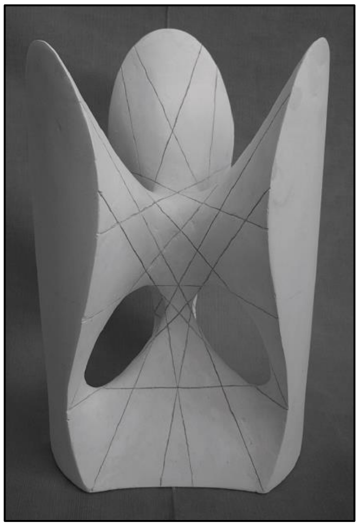

Figura 2. Modelo da superfície diagonal de Clebsch

No Instituto Henri Poincaré, inaugurado em 1928 em Paris, foram adquiridos junto ao Laboratório Superior de Geometria da Faculdade de Ciências da Universidade de Paris alguns modelos matemáticos construídos por Martin Shilling em Leipzig e por Joseph Caron (1849 – 1924) professor de geometria descritiva da universidade para fins educacionais voltados ao ensino prático.

Esses modelos físicos foram confeccionados utilizando dentre outros materiais como madeira, fios, papel e gesso e destinavam-se ao estudo de alguns tópicos como curvas e superfícies, abordadas nos cursos de geometria descritiva, auxiliando na visualização das propriedades geométricas dos mesmos.

Figura 3. Modelos Matemáticos – Instituto Henri Poincaré

Além dos materiais concretos exemplificados anteriormente, nas últimas décadas com o advento cada vez maior dos recursos computacionais no ensino da Matemática, os modelos matemáticos passaram a ser desenvolvidos de maneira virtual, com o uso de computadores, laptopos, tablets, celulares e aplicativos. A seguir mostraremos a utilização do software GeoGebra no estudo das superficies regradas e suas possíveis representações.

Um estudo das superfícies regradas utilizando recursos computacionais

Um exemplo da utilização de modelos matemáticos pode ser dado no estudo das superfícies regradas. Quando desejamos definir ou descrever uma superfície quase que inevitavelmente caímos da redundância da utilização do próprio termo ou evocamos uma superfície plana como exemplo. Podemos definir uma superfície como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Intuitivamente, podemos obter por exemplo outras superfícies pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

As superfícies podem ser classificadas de várias maneiras, tais como superfícies de revolução, paralelas, mínimas ou regradas. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de "sujeita a regras". Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \epsilon \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Para demonstrarmos algebricamente que uma superfície regrada é formada por uma família de retas, vamos considerar por exemplo o hiperboloide de uma folha, cuja equação na forma canônica ao longo do eixo Oz é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sem perda de generalidade, tomando os valores $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, temos a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Reorganizando nos dois membros da equação e fatorando os termos algébricos, temos:

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

$$(x+z)(x-z) = (1+y)(1-y)$$
$$\frac{(x-z)}{(1-y)} = \frac{(1+y)}{(x+z)} = k$$

Sendo k uma constante real não-nula, teremos as seguintes situações:

$i)\ \frac{(x-z)}{(1-y)} = k \Rightarrow (x-z) = k(1-y) \Rightarrow x + ky - z = k \qquad (\pi_1)$

$ii)\ \frac{(1+y)}{(x+z)} = k \Rightarrow (1+y) = k(x+z) \Rightarrow kx - y + kz = 1 \quad (\pi_2)$

As equações obtidas em i e ii representam dois planos π_1 e π_2 cujos vetores normais são, respectivamente, $n_1 = (1, k, -1)$ e $n_2 = (k, -1, k)$. Como esses vetores não são proporcionais, os planos π_1 e π_2 são transversais e, portanto, a cada valor de k, obtemos a intersecção entre ambos dada por uma reta r_k obtida da seguinte maneira:

$$r_k : \begin{cases} x + ky - z = k \\ kx - y + kz = 1 \end{cases}$$

Essa demonstração algébrica pode ser considerada, em grande medida, trabalhosa. O uso de recursos computacionais pode facilitar a visualização e a compreensão das propriedades geométricas desse objeto de estudo.

Tall (2002) afirma que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Com isso, para representarmos geometricamente a situação descrita anteriormente, podemos utilizar o *software* GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções da superficies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz e xz, para visualizar que a intersecção dessa superficie com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

Além disso, o GeoGebra permite de maneira dinámica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parámetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superficie em questão, conforme a figura a seguir:

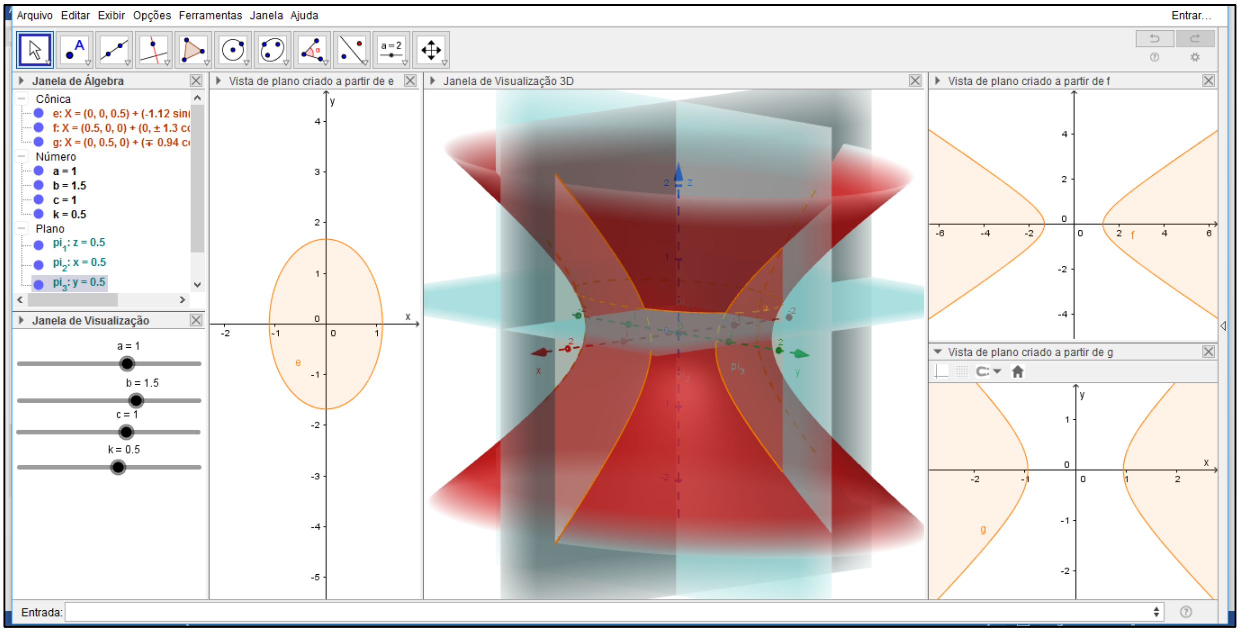

Figura 4. Hiperboloide de uma folha representado no GeoGebra

Considerações Finais

Esta pesquisa apresentou, utilizando-se de exemplos do contexto histórico, da gama de possibilidades de utilização de modelos matemáticos, quer sejam concretos ou virtuais, no sentido auxiliar na visualização e compreensão dos conceitos geométricos e analíticos abordados nos diversos cursos no ensino superior e em suas diversas modalidades, como no Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva ou Diferencial, por exemplo.

Devemos ressaltar que os modelos matemáticos podem não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

A construção de objetos físicos que representam algumas superfícies regradas se revelou um elemento responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico.

Referências e bibliografia

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. O. (Ed) (2002). Advanced Mathematical Thinking. Londres, Dordrecht, Kluwer.

Tall, D.O. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tenreiro, C. (2015). Os “Modelos de Olivier” do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. *Gazeta da Matemática. 176, 32-38.*