XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una mirada cognitiva a la construcción de los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de las transformaciones lineales

Alexander **Betancur** Sánchez
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
alexanderbetancursanchez@gmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander Grupo EDUMAT - UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Se presenta una propuesta de investigación que estudia la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de la transformación lineal. Para esto se toma una mirada cognitiva orientada por los resultados de investigación reportados sobre el concepto involucrados, se estudia cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación; actividades diseñadas desde la Teoría APOE. Se propone completar el ciclo de investigación de la teoría APOE, hacer sugerencias didácticas y actividades que incluyan problemas en contexto según la teoría de Modelos y Modelación.

Palabras clave: eigenvector, eigenvalor, transformación lineal, teoría APOE, teoría de Modelos y Modelación.

Introducción

El aprendizaje y la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal es el interés de investigadores desde diferentes miradas teóricas. En este documento se presenta una mirada cognitiva de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a la luz de las investigaciones reportadas, se identifica un camino para la construcción sobre la transformación lineal. Después se describe la problemática de la investigación, los elementos teóricos tomados de la teoría APOE, Modelos y Modelación y la metodología de la investigación con el propósito de completar el ciclo propuesto por la teoría APOE.

Acercamientos sobre la transformación lineal

Investigadores que han estudiado los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor han desarrollado acercamientos mediante el concepto de transformacional lineal como estructura base para su aprendizaje. Por ejemplo, Klasa, J. y Klasa, S. (2002) reportan una investigación que estudia la articulación de los modos de pensamiento, geométrico, computacional y algebraico del álgebra lineal. Los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores se introducen mediante el uso de los softwares *Cabri* y *Maple*. En el entorno de *Cabri* los estudiantes exploraron a profundidad las construcciones mostradas en *Maple*, para transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, además el vector resultante bajo la transformación lineal dada. Igualmente Klasa, J. y Klasa, S. (2002) muestran el trabajo realizado por los estudiantes sobre el siguiente problema: “Dada una circunferencia unitaria con centro en el origen , explorar el lugar geométrico que generan los vectores unitarios del plano al aplicar la transformación T” (ver figura 1). La actividad propuesta orientaba a los estudiantes a identificar cuándo los dos vectores $w\ y\ T(w)$ son colineales, la condición sobre la matriz asociada a la transformación lineal para que los ejes de simetría sean las líneas de Eigenvectores y el estudio de la convergencia de la órbita de una matriz estocástica para un vector estocástico (Klasa y Klasa, 2002).

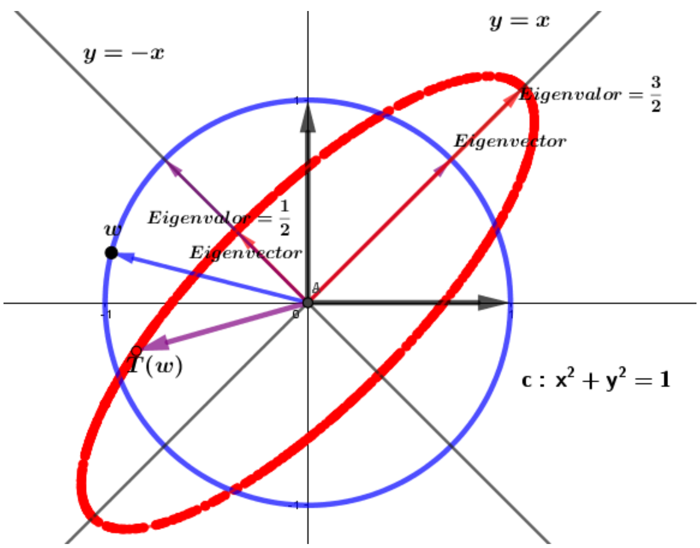

Figura 1. Exploración en Cabri de las líneas de simetría mediante Eigenvectores (Klasa & Klasa, 2002, p.7)

En esta vía Klasa (2010) estudia el diseño de una estrategia de enseñanza sobre los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores, cónicas, formas cuadráticas y cambio de base, utilizando nuevamente los softwares *Maple* y *Cabri*. La investigadora reporta resultados del diseño de actividades. En este escrito solo se hace referencia a transformaciones lineales, Eigenvectores y Eigenvalores, con el objetivo de identificar cómo emergen los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de transformaciones lineales. Klasa (2010) usa *Maple* y *Cabri* para estudiar las propiedades de linealidad y relacionarlas con las propiedades del álgebra de matrices. La definición y relación se expresan de la siguiente manera:

Definición. Sea V y W dos espacios vectoriales sobre el campo K, $T\colon V \longrightarrow W$ es una transformación lineal si cumple las siguientes condiciones:

(i) $T(kv) = kT(v)$ para cualquier escalar k y vector v
(ii) $T(v + v') = T(v) + T(v')$

Estas propiedades pueden ser comparadas con propiedades del algebra de matrices:

(i) $A \bullet (kv) = k(A \bullet v)$ donde $\bullet$ es producto de matrices
(ii) $A \bullet (v + v') = A \bullet v + A \bullet v'$

En la exploración de propiedades para la transformación lineal en *Cabri*, la investigadora busca que los estudiantes determinen a partir de la animación, cuándo los vectores v y $T(v)$ son colineales. Para hallar el Eigenvalor los alumnos calculan la longitud de v y $T(v)$ con *Cabri* y realizan el cociente $\frac{||T(v)||}{||v||}$. De esta manera, la definición que resulta de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de la transformaciones lineales es: "Un vector v no nulo es un *Eigenvector* de una transformación lineal $T: V \to V$ si tenemos la igualdad $T(v) = cT(v)$ para algún escalar c, llamado entonces el *Eigenvalor* asociado" (Klasa, 2010, p. 2104).

Otros estudios han centrado su perspectiva en las características que deben cumplir los cursos de álgebra lineal en programas de ciencias e ingeniería. En particular Soto y García (2002) analizan en la Universidad de Sonora (México) los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector. Los autores consideran un esquema (ver figura 2) para el estudio de dichos conceptos a partir de la transformación lineal. Usando el ambiente dinámico de *Cabri Geometry* II Soto y García (2000) examinan la conversión entre la representación por una transformación lineal, la matriz asociada y el polinomio característico de Eigenvalores y Eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. De la exploración en el ambiente dinámico se encuentra que los estudiantes no identifican inicialmente los Eigenvectores como vectores sobre la misma línea asociada; esto causando dificultades con reconocer Eigenvalores negativos.

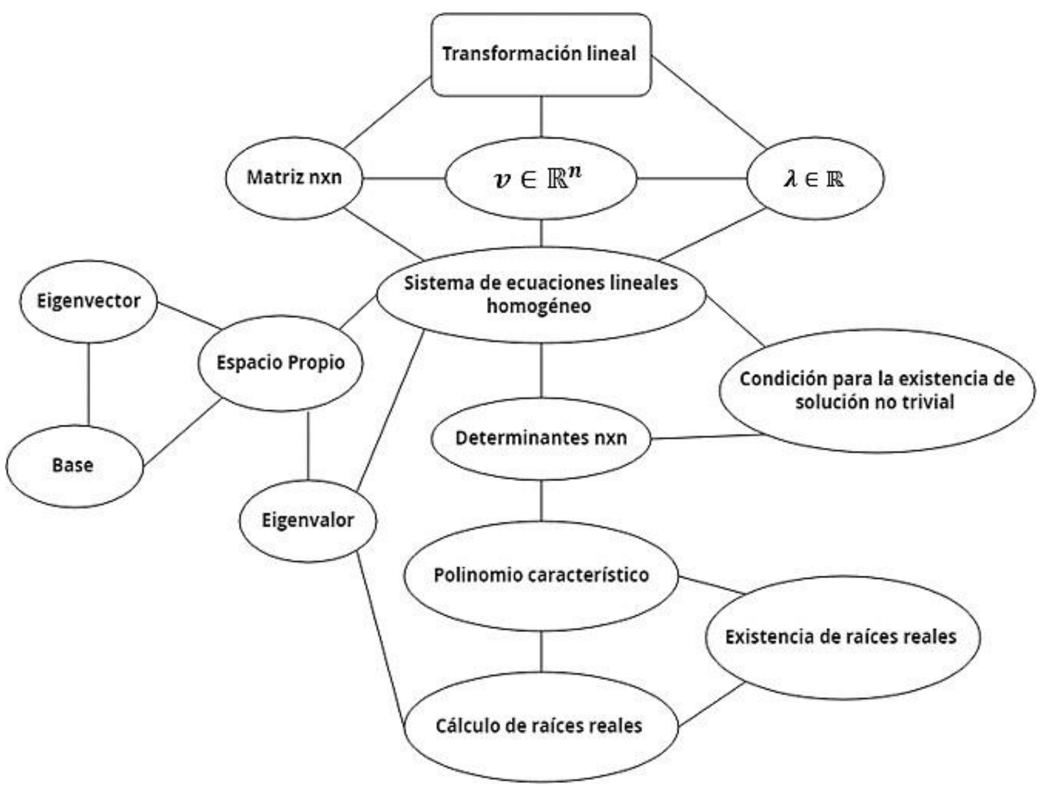

Figura 2. Esquema para los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor (Soto y García, 2002, p.3)

Un acercamiento más reciente se presenta en Camacho y Oktaç (2016), las autoras presentan avances de una investigación doctoral donde se analizan las estructuras mentales necesarias para un profesor resolver problemas sobre Eigenvalores y Eigenvectores en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. En la investigación las autoras definen de manera explícita subespacios invariantes pues surge de manera natural el concepto de Eigenvector y Eigenvalor. La definición considerada es la siguiente:

> Si T: $V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, un subespacio W de V es T invariante si $T(x) \in W\ \forall x \in W$ es decir, $\boldsymbol{T(W)} \subseteq \boldsymbol{W}$. En $\mathbb{R}^2$ los subespacios invariantes no triviales son de dimensión 1. Rastrear estos subespacios es encontrar $\boldsymbol{W} = \{\lambda w | w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Camacho & Oktaç, 2016, p. 255)

Con base en el panorama expuesto, se da paso al problema de investigación que se propone estudiar en esta investigación.

Planteamiento del problema

La preocupación por estudiar cómo se enseñan y aprenden los conceptos del álgebra lineal ha ocupado los intereses de diversos investigadores (Dorier, 2000). Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) manifiestan las críticas de los estudiantes al enfrentar cursos de álgebra lineal cuando ingresan a la universidad; estas se refieren al "uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en matemáticas" (p. 86). Los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector hacen parte del componente básico de un curso de algebra lineal (Harel, 2000), entre los acercamientos de investigación sobre cómo se aprenden y enseñan los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector Soto y García (2002), Klasa (2010) y Camacho y Oktaç (2016) lo hacen sobre transformaciones lineales utilizando un contexto de tecnologías computacionales para diseñar y desarrollar actividades de aprendizaje. Desde otro acercamiento Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) y Salgado y Trigueros (2014, 2015) diseñan y desarrollan actividades de aprendizaje en un contexto de modelación según la teoría de Modelos y Modelación, en su acercamiento prevalece la construcción de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las matrices. El uso de la teoría de Modelos y Modelación ha incluido otros conceptos del álgebra lineal como sistemas de ecuaciones lineales (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010), combinación lineal, conjunto generador y espacio generado (Salgado, 2015). Estos investigadores han utilizado de forma complementaria la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación para estudiar la construcción de conceptos en el álgebra lineal.

En el contexto de la universidad Industrial de Santander (UIS) se han desarrollado investigaciones usando la teoría APOE con el propósito de estudiar la construcción de conceptos del álgebra lineal en estudiantes de primer año de ciencias e Ingeniería. Roa-Fuentes y Parraguez (2017) investigan las estructuras y mecanismos mentales para que los estudiantes construyan un teorema que relaciona las transformaciones lineales y las matrices, González-Rojas y Roa-Fuentes (2017) proponen un esquema de transformación lineal a partir de interiorización de acciones concretas. En busca de continuar con el estudio de conceptos en álgebra lineal se revisaron algunos libros de texto para identificar cómo desarrollaban los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores, de esta revisión y la reportada en la literatura se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación?

En este reporte se presentan avances de la fase inicial de la investigación que busca dar una mirada cognitiva a los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor con el propósito de proponer un camino hipotético de construcción de los conceptos, llamado en la teoría APOE una Descomposición Genética (DG).

A continuación, se presentan elementos teóricos desde la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación que guían los intereses de este estudio.

Teoría APOE y Modelos y Modelación

En las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras lógico matemáticas de un individuo Dubinksy (Arnon et al., 2014) identificó la *abstracción reflexiva* como mecanismo principal para la construcción de conceptos en matemáticas. En la teoría APOE se distinguen los mecanismos interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, los cuales permiten a partir objetos previos en el estudiante realizar la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) para generar nuevos objetos (Arnon et al., 2014).

La comprensión de un concepto matemático se describe por los avances en cada etapa propuesta por APOE. En general, para un concepto matemático C un estudiante tiene una concepción Acción de C si depende de indicaciones externas para realizar transformaciones a los Objetos y/o construcciones previas que posee; en esta etapa los pasos y las transformaciones no se pueden imaginar ni modificar. Si el estudiante reflexiona sobre las acciones que realiza, hace modificaciones y ajustes a sus acciones permitiéndole realizar transformaciones en su mente sin necesidad de realizarlas paso a paso, se dice que el estudiante ha interiorizado la Acción y tiene una concepción Proceso de C. Cuando el estudiante reflexiona sobre el Proceso que ha construido capturando una totalidad de este, se dice que ha encapsulado el proceso en un Objeto, y por tanto tiene una concepción Objeto del concepto C. Con respecto a ese concepto C el conjunto de acciones, procesos, objetos y otras construcciones realizadas se relacionadas coherentemente conformando una estructura. Al modelo que describe estas construcciones se denomina descomposición genética (DG), en esta se precisan los mecanismos y estructuras previas necesarias para avanzar en las etapas de comprensión del concepto (Arnon et al., 2014). Las actividades de enseñanza propuestas a partir de la DG se desarrollan según el ciclo de instrucción ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), el cual inicia con un trabajo en grupo por los estudiantes, se discute entre estudiantes y estudiantes - profesor los resultados encontrados, finalmente se proporciona ejercicios y actividades que los estudiantes realizan como tarea (Salgado & Trigueros, 2014).

En la teoría APOE no se hace mención explícita al contexto de aprendizaje de conceptos matemáticos, sin embargo, no se rechaza el uso de estos. Salgado y Trigueros (2015) consideran viable el uso complementario de la teoría APOE con la teoría de Modelos y Modelación (Lesh &Doerr, 2003), la cual plantea el diseño y uso de actividades que generan modelos para construir conceptos matemáticos. Investigadores y docentes que han trabajado con esta teoría han consolidado unos principios que caracterizan las actividades que producen modelos, estos se han denominado principio de realidad, construcción de modelos, autoevaluación, documentación, simplicidad y generalización (Lesh & Doerr, 2003).

Esta investigación en curso utiliza de forma complementaria la teoría de Modelos y Modelación y APOE, la primera para el diseño de problemas en contexto y la segunda para diseñar actividades con base en la DG. Esto con el fin de buscar que los estudiantes potencien las construcciones en gestación a partir del trabajo con el modelo y permitan analizar como los estudiantes logran hacer las construcciones necesarias para llegar a comprender el concepto.

Metodología

En esta investigación se sigue el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014) que consiste en un análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y recolección y análisis de datos. Los tres elementos del ciclo de investigación se relacionan como se muestra en la *figura 3*. Para esta investigación sobre Eigenvectores y Eigenvalores se plantea realizar el ciclo completo con el propósito de analizar las estructuras y mecanismos en la construcción de estos conceptos en estudiantes universitario de primer año.

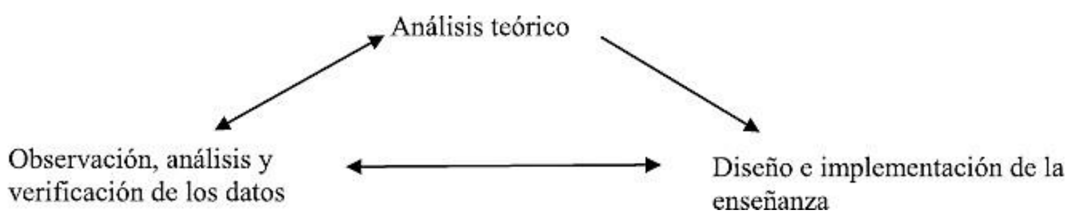

Figura 3. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

El análisis teórico como primer componente del ciclo de investigación estudia en profundidad el concepto de interés tomando como referentes libros de texto, reportes de investigación, la experiencia como docente y revisión histórico- epistemológica del concepto para proponer una DG como un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción. En el de caso esta investigación el análisis de libros de texto se concentra sobre los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor y su construcción sobre la transformación lineal. En los reportes de investigación se considera en particular los estudios de Salgado y Trigueros (2014, 2015) sobre el diseño y validación de una DG para valores, vectores y espacios propios de una matriz. Estos y otros aspectos se agrupan para diseñar un camino hipotético en el aprendizaje de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las transformaciones lineales.

Construida la DG en el análisis teórico se diseñan problemas en contexto con la teoría de Modelos y Modelación. Como se ha mencionado en la descripción de los elementos teóricos, el diseño de los instrumentos y actividades restantes con base en las construcciones prevista por la DG preliminar. Dado que el interés de la investigación es realizar el ciclo completo, la implementación de la instrucción seguirá el ciclo ACE propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014). En la investigación se hace seguimiento a un grupo de aproximadamente 30 estudiantes que cursan álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (Colombia). En pequeños grupos se analiza una situación en contexto diseñada según la teoría de Modelos y Modelación, del análisis realizado por los alumnos se hacen discusiones orientadas por el docente, posteriormente se desarrollan las actividades diseñadas según la DG para potenciar las construcciones en gestación que surgen del problema en contexto. Con los ejercicios entregados como tarea, los estudiantes continúan reflexionando sobre el concepto y se enfrentan a nuevos problemas en contexto, este ciclo de instrucción continua hasta que se desarrollen todas las actividades diseñadas para el concepto (Salgado & Trigueros, 2014).

Obtenidos los datos mediante videograbaciones de las secciones de instrucción, hojas de trabajo de los estudiantes, cuestionario y entrevistas, se analizan las construcciones realizadas por los estudiantes según la DG preliminar. En busca de responder cómo aprendieron los estudiantes lo conceptos se valida o refina la DG. El propósito es describir mejor las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor. La realización del ciclo completo permite plantear sugerencias didácticas para el desarrollo de cursos de álgebra lineal y las conexiones necesarias para la comprensión de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor.

Reflexiones finales

A partir de las investigaciones realizadas en álgebra lineal con respecto al concepto de Eigenvector y Eigenvalor se identifica una estrategia y camino posible su construcción sobre las transformaciones lineales. Desde la teoría APOE se considera que no existe un único camino cognitivo (DG) para la construcción de conceptos en matemáticas, por eso en esta investigación estudiamos un camino alterno al reportado por Salgado y Trigueros (2014, 2015).

El desarrollo del ciclo completo propuesto por la teoría APOE nos permitirá proponer un modelo cognitivo que describa las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de Eigenvalores y Eigenvectores sobre las transformaciones lineales , diseñar actividades que favorezcan las construcciones previstas en la DG tomando también situaciones en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación y validar o refinar la DG preliminar con el propósito que sea más acorde con las construcciones que realizan los estudiantes para comprender los conceptos. Del análisis a las construcciones realizadas por los estudiantes se proponen sugerencias para el desarrollo de la instrucción en los cursos de álgebra lineal y actividades de aprendizaje que pueden ser implementadas por otros docentes que enseñan en cursos de álgebra lineal.

Referencias y Bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R2 en R2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

González-Rojas, D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Klasa, J., & Klasa, S. (2002). Linear transformations and eigenvectors with Cabri II via Maple V. *The 2^{nd} International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado de http://server.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap256.pdf.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2008). A trip through eigen land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. *Proceedings of the 11^{th}Annual Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education.* SIGMA ON RUME. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Larson%20SHORT.pdf

Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140. doi:10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Soto, J. L., & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $R^2$and R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Recuperado De http://mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf