XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Recursos para la gestión de problemas de modelaje en clases de geometría

Patricio **Herbst**
University of Michigan
Estados Unidos
pgherbst@umich.edu

Resumen

Esta comunicación se enmarca dentro del estudio de la gestión del enseñante. Se identifican situaciones de construcción y de demostración presentes en la enseñanza típica de cursos de geometría en escuelas secundarias en Estados Unidos. Y se muestra como las mismas pueden servir como recursos para que un maestro gestione el trabajo de sus estudiantes en un problema de modelaje geométrico. Se propone la noción de que tales situaciones pueden servir para contextualizar o enmarcar el trabajo de los estudiantes de manera tal que ellos puedan usar las normas de las situaciones de construcción y demostración como soporte para pensar en las demandas de una tarea nueva.

Palabras clave: educación, matemática, ciencias, didáctica, pedagogía, formación.

La noción de modelaje matemático ha cobrado interés en la comunidad de investigadores en educación matemática en los últimos veinte años. Kaiser y Sriraman (2006) describieron una variedad de perspectivas sobre el uso del modelaje, entre ellas la que ellos llaman la perspectiva epistemológica, en la que tareas de modelaje se utilizan como instrumento para construir conocimientos matemáticos. Autor y Colegas (2017) utilizan esta noción de modelaje como marco de una propuesta de investigación y desarrollo en la enseñanza de la geometría en secundaria. La presente comunicación se basa en esa perspectiva y examina los recursos disponibles para la gestión del docente en tales tareas de modelaje, utilizando como caso una lección sobre triángulos observada en tres clases de geometría en los Estados Unidos.

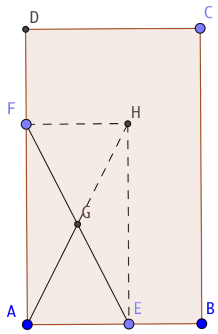
El modelaje geométrico y la gestión didáctica

Nuestra pregunta de investigación concierne la gestión didáctica. Desde el punto de vista del aprendizaje, tareas de modelaje permiten a los estudiantes ver las conexiones entre la matemática y la vida real, involucran al estudiante en la traducción de aspectos del contexto en términos de representaciones matemáticas, y permiten el uso del sentido común como recurso para la resolución de problemas. En la medida que esas tareas incluyen aquellos elementos de la vida real que apoyan al razonamiento, es posible utilizarlas, a pesar de su novedad, para desarrollar la comprensión de conceptos nuevos: El estudiante puede abordar el problema y tomar decisiones aún si los conceptos matemáticos en juego están en curso de ser descubiertos como resultado del modelaje. Desde el punto de vista de la gestión del maestro, sin embargo, hace falta saber qué tipo de acciones del maestro proveen suficiente apoyo para asegurar que el estudiante participe en aquellas tareas sin disminuir su nivel cognitivo (Hennigsen y Stein, 1997). La investigación sobre la gestión didáctica ha documentado tensiones y dilemas que los maestros deben de manejar cuando involucran a los estudiantes en este tipo de tareas nuevas, sean éstas tareas de modelaje o puramente matemáticas (Ball, 1993; Lampert, 1990). Nuestro trabajo contribuye a esta tradición, no solamente identificando tensiones sino también caracterizando recursos disponibles al maestro. En lo que sigue describimos primeramente la tarea utilizada y cuál es su objetivo de enseñanza. Luego describimos la metodología usada en el análisis de la gestión didáctica.

Una tarea de modelaje geométrico: El problema de la piscina

La tarea propuesta a los estudiantes fue una variación de lo que llamamos el problema de la piscina. Se les dice a los estudiantes que tres nadadores van a zambullirse en una piscina rectangular desde tres lugares distintos: uno de ellos desde una esquina y los otros dos desde lugares a lo largo de los bordes de la piscina que son adyacentes a aquella esquina. Los nadadores competirán nadando hacia un premio ubicado en un lugar en la piscina (sujeto a un lugar mediante un ancla). Los estudiantes deben investigar si es posible anclar el premio de tal manera que la competencia sea justa.

Debe notarse que salvo la mención verbal de la forma rectangular de la piscina el problema no les da a los estudiantes ninguna representación geométrica. Sin embargo, si ellos representaran la piscina como un rectángulo y a los nadadores como puntos a lo largo de los lados del rectángulo, el problema podría conceptualizarse en términos de encontrar un cuarto punto que sea equidistante de los tres puntos dados. Varias estrategias pueden llevar a los estudiantes a la conjetura de que el punto medio del segmento entre los puntos que representan a los dos nadadores que no están en la esquina es también equidistante del vértice del rectángulo que representa la esquina donde el tercer nadador se ubicara. En efecto, el trabajo en este problema da origen a la conjetura de que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo. La prueba puede verse en la Figura 1. El problema formulado en términos de nadadores a lo largo de los lados de la piscina, contiene una fuente importante de generalidad con respecto al resultado geométrico que se busca introducir: El triángulo rectángulo con el que trabajarán no depende de una figura particular ya que sus catetos están definidos por posiciones arbitrarias de los nadadores ubicados en los lados de la piscina. En ese sentido, el problema ilustra como al presentar el problema en el contexto de una situación real es posible hacer cargo al estudiante de tratar con el problema en general.



Si consideramos el rectángulo *AEFH* determinado por las posiciones de los tres nadadores (*F*, *A*, y *E*), se puede probar primero que las diagonales *AH* y *EF* son congruentes y se intersectan en su punto medio. Por consiguiente, los segmentos *GF*, *GA*, y *GE* son congruentes.

Figura 1. Demostración de la proposición

Obviamente, es posible para el maestro producir una representación como la de la figura 1 y luego demostrar que el punto G es el punto deseado. Sin embargo, si el maestro hiciera eso reduciría dramáticamente la oportunidad de que los estudiantes modelen el problema usando geometría. Por otra parte, la mera presentación del problema en términos de la piscina no provee ninguna garantía de que los estudiantes harán un modelo geométrico. Si la selección del problema responde a la necesidad de enseñar un teorema geométrico, y no solamente a la decisión de involucrar a los estudiantes en la resolución del problema, se presenta aquí una tensión posible para el maestro. Esta tensión podría describirse en términos de los siguientes extremos. Por una parte, el maestro puede limitarse a presentar el problema sin presionar para que los estudiantes utilicen ningún modelo en particular, aceptando como válida cualquier estrategia que los alumnos utilicen, y de esa manera arriesgarse a que los conocimientos geométricos que llevaron a la selección del problema no puedan encontrarse en esta ocasión. Por otra parte, el maestro puede proveer, además del problema dado, representaciones e instrucciones que aseguren que los conocimientos en juego sean encontrados en la manera deseada. Haciendo eso, el maestro podría arriesgarse a limitar el nivel cognitivo de la tarea del alumno. Nuestro trabajo consiste en identificar posibles recursos para la gestión del maestro que le permitan, en particular, manejar aquella tensión sin necesariamente reducir las demandas cognitivas.

Recursos para la gestión didáctica

Nos interesa aquí destacar los recursos disponibles al maestro para apoyar a los alumnos al hacer ellos mismos la tarea. En las clases de geometría en Estados Unidos existen dos casos de las que hemos llamado *situaciones de instrucción* (Autor y Colegas, 2010) que podrían ser útiles al maestro para incorporar este problema a su práctica: Las situaciones de construcción y de demostración.

Llamamos *situaciones de instrucción* a especificaciones del contrato didáctico (Brousseau, 1997) que permiten realizar transacciones particulares de conocimientos. Las actividades de estudiantes y su maestro en clase se pueden describir como transacciones en las que lo que los alumnos hacen en una tarea (tal vez con algo de ayuda del maestro) sirve de evidencia para que el maestro pueda decir que ellos conocen o no ciertos saberes que están en juego: Son transacciones simbólicas entre un tipo de representación del saber (como acción contextualizada en una tarea) y otro tipo de representación del saber (como conocimientos a ser aprendidos, formulados en el contexto más amplio del curso de estudios). En el caso del problema bajo consideración, existe una transacción posible entre las actividades que los estudiantes hagan en respuesta al problema de la piscina y la proposición que describe la propiedad del punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo. Tal transacción no es inmediata, a juzgar por los posibles extremos de la tensión mencionada más arriba: Los estudiantes podrían hacer trabajo que no dé evidencia de que conozcan la proposición en juego, o tal vez la evidencia esté presente pero su existencia no dependa tanto del trabajo del alumno como de las decisiones tomadas por el maestro.

Está claro que la posibilidad de que el maestro pueda efectuar tal transacción favorablemente depende de que los estudiantes tomen una serie de decisiones correctas, lo que no es inmediato. Por ejemplo, los estudiantes podrían mantener el problema en la escala de la piscina y del tamaño de los nadadores (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el mesoespacio), representándolos con ubicaciones en distintos lugares del salón de clase, y producir estimaciones del lugar donde ubicar el premio que fueran aproximadas mediante contar pasos, jamás dándose cuenta que el punto obtenido está en uno de los lados de un triángulo. O podría ser que luego de construir un modelo geométrico a una escala más pequeña (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el microespacio) los estudiantes pudieran visualizar el triángulo y encontrar el punto en la hipotenusa, pero que no vieran más necesidad para confirmar su ubicación que simplemente hacer algunas mediciones. Aquí es donde la noción de situación de instrucción se vuelve útil para describir los recursos disponibles para el maestro.

En trabajos anteriores (Autor y Colegas, 2010) hemos descripto situaciones de construcción y de demostración en términos de las normas que regulan la división del trabajo entre el estudiante y el maestro. Cada situación se desarrolla alrededor de tareas canónicas en las que se provee al estudiante de una meta particular y de ciertos recursos y se espera que el estudiante ejecute la tarea usando ciertas operaciones. En la situación de construcción, las tareas suelen identificar como meta construir una figura particular y proveen como recursos la regla y el compás (o alternativamente un software de geometría dinámica como GeoGebra) además de algún objeto geométrico que se debe de usar como dado al hacer la construcción. Los estudiantes no solamente deben de producir la figura deseada sino también dejar visible las líneas auxiliares que les permitieron arribar a la construcción deseada (Schoenfeld, 1986). En la situación de demostración, las tareas suelen identificar la proposición a probar, enunciándola en términos de su representación en un diagrama, dándole a los estudiantes un diagrama con todas las construcciones auxiliares hechas y sus puntos etiquetados, y proveyendo además los enunciados que se pueden usar como premisas. Los estudiantes deben de escribir una serie de enunciados que describan la figura dada, justificándolos con teoremas y definiciones que han sido estudiadas con anterioridad y que conecten las premisas con la conclusión (Autor y colegas, 2009). En una clase donde estas situaciones han sido establecidas, podría ser posible para el maestro gestionar el trabajo en el problema de la piscina mediante transformarlo en dos tareas sucesivas, enmarcadas cada una de ellas en distintas situaciones. La figura 2 muestra como podría el maestro reducir el problema de la piscina utilizando las situaciones descriptas.

Tarea 1	Tarea 2

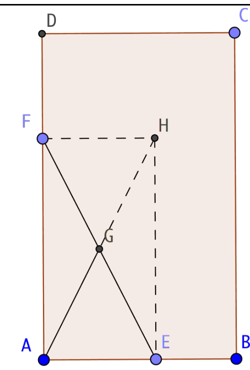
Construye un rectángulo. Ubica puntos en dos lados consecutivos del rectángulo y luego encuentra un punto equidistante de aquellos dos puntos y del vértice donde se intersectan aquellos lados.	Dado que *ABCD* es un rectángulo, demuestra que $GA \cong GF \cong GE$ 

Figura 2. Reducción del problema de la piscina a las situaciones de construcción y demostración

Nótese que mientras esta reducción del problema a dos tareas canónicas podría producir trabajo más cercano a la validación del teorema en juego, haría tal cosa a costa de que el maestro tome muchas de las decisiones en lugar del alumno. Esto está particularmente claro en el caso de la tarea de demostración, donde es el maestro quien provee las construcciones auxiliares necesarias para hacer la demostración. Al hacer eso, el maestro reduce la probabilidad de que otras demostraciones originales puedan ofrecerse, que otras líneas auxiliares se usen, etc. Por ejemplo, hemos observado estudiantes trazar una circunferencia con centro en el punto medio de la hipotenusa y ocuparse de argumentar que el vértice del rectángulo está también en la circunferencia. Tal construcción sería poco probable de observar en una clase donde el maestro hubiera provisto la Tarea 2 (Figura 2). Más aún, la separación del problema en estas dos tareas reduce las oportunidades de discusión entre los estudiantes, las cuales podrían dar lugar a la participación de más estudiantes en la resolución del problema.

Aun si las situaciones de construcción y de demostración parecen transformar radicalmente al trabajo de los estudiantes en el problema de la piscina, es importante notar que esas dos situaciones, y tal vez otras situaciones como las de exploración o de cálculo, son recursos sociotécnicos disponibles para el maestro. Sus usos posibles van más allá de la mera transformación de la tarea; pueden también servir de recursos para establecer nuevas maneras de interactuar—para negociar un contrato didáctico ad-hoc que sirva para el trabajo en esta tarea nueva.

El rol de las situaciones de instrucción en la gestión didáctica

Este tipo de uso de los recursos sociales es corriente en la vida diaria. En efecto, nuestras interacciones en sociedad frecuentemente se apoyan en esquemas compartidos de acción en sociedad (Goffman, 1959). Consideremos tres tipos de cenas compartidas: Cena de trabajo, cena familiar, y cena íntima, son distintos tipos de cenas cuyos esquemas promueven ciertas acciones y el uso de símbolos y tecnologías particulares. Esos esquemas condicionan cómo nos vestimos para la ocasión, qué vocabulario usamos, cuanto compartimos de nuestra vida privada con nuestros acompañantes, etc. Esos tipos de cenas no agotan las posibilidades de una cena compartida. Pero esos esquemas nos ayudan a pensar en como manejar problemas nuevos: Una cena familiar en la que también estará presente un pariente lejano que es un posible empleador nos presentará con un problema nuevo en el que dos de los esquemas mencionados más arriba (la cena familiar y la cena de trabajo) podrán ser usados como recursos para decidir como usar el tiempo, como vestirnos, como hablar, etc.

En la enseñanza de las matemáticas, las situaciones de instrucción instaladas en un curso de estudios son recursos sociotécnicos que pueden servirle al maestro y a los estudiantes para facilitar sus transacciones de conocimientos aún en el caso de problemas que no se ajustan directamente a las tareas canónicas de esas situaciones. Decimos que esas situaciones son recursos sociotécnicos porque combinan normas y recursos sociales (e.g., dados los participantes presentes, a quién le toca hacer cada cosa) con recursos y normas técnicas (e.g., dados los recursos matemáticos disponibles, qué se puede o debe de hacer con ellos).

Entonces el problema de la gestión didáctica en lo que concierne al problema de la piscina se puede reformular como sigue. Ante la oportunidad de involucrar a los estudiantes en el descubrimiento de un teorema (e.g., el que caracteriza al punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo) mediante un problema formulado en lenguaje de la vida real, ¿cómo pueden las situaciones de construcción y de demostración proveer recursos para que el maestro gestione una transacción de conocimientos en la que los estudiantes hagan el trabajo matemático deseado en el período disponible?

Observando el problema de la piscina en tres clases de geometría

Hemos observado el uso del problema de la piscina en tres clases paralelas de geometría, ofrecidas durante el mismo día en una escuela secundaria. Los estudiantes estaban en la gran mayoría de los casos en el décimo grado (15 años). La lección fue planeada en conjunto con la maestra a quien referimos como Megan. Durante nuestras reuniones de planificación compartimos con Megan y otros docentes los ejemplos de situaciones de instrucción mencionados más arriba (construcción y demostración); también hicimos saber que nuestro interés en la investigación era explorar en qué medida esas situaciones proveen de recursos al docente para gestionar el trabajo de los estudiantes en tareas nuevas.

A través de las observaciones en tres clases paralelas en el curso del día hemos visto como Megan hizo pequeñas modificaciones a la lección que le permitieron, llegado el final del día, hacer posible una variedad de objetivos relacionados con el uso del problema de la piscina para estudiar la propiedad del punto medio de la hipotenusa. Durante la primera lección del día, Megan presentó su versión del problema—básicamente la misma citada arriba, a la que Megan le agregó elementos de color local incluyendo el premio por el cual los alumnos iban a competir. Luego de discutir el enunciado, Megan les pasó computadoras portátiles a los alumnos y les dijo que usaran GeoGebra para construir un modelo de la piscina y luego ubicar el punto. Si bien los estudiantes habían utilizado GeoGebra con anterioridad, observamos que los estudiantes dedicaron más de la mitad de período de clase a la tarea de construcción del rectángulo. En muchos casos sus dificultades radicaban en recordar como construir perpendiculares usando los menús del programa. Algunos de ellos no habían logrado ir más allá de construir un rectángulo para representar la piscina cuando Megan llamó la atención a toda la clase para escuchar algunas de las soluciones. Otros estudiantes lograron construir el rectángulo y pudieron utilizar dinámicamente la posición arbitraria de los dos nadadores ubicados a lo largo de los lados del rectángulo para desarrollar la intuición de que las distancias de los tres vértices a un punto cerca del punto medio de la hipotenusa se mantendrían iguales entre sí a pesar de que cambiaran de valor para distintas posiciones de los nadadores. Sin embargo, la ubicación de tal punto no resultó por lo general de utilizar una construcción dinámica; resultó de arrastrar el punto hasta que las distancias fueran iguales. Un grupo de estudiantes tuvo la idea de construir un círculo, ajustarlo en tamaño, y moverlo sobre la pantalla para que pasara por los tres vértices, luego eligió el centro de tal círculo como punto equidistante propuesto. Luego de que la clase discutiera las distintas soluciones propuestas, no hubo tiempo para volver a trabajar sobre la prueba del teorema. Al final de la clase Megan les hizo notar a los estudiantes el enunciado del teorema y la clase terminó.

Durante el segundo período, Megan hizo disponibles las computadoras sin insistir que los estudiantes las usaran. En lugar de ello, Megan invitó a los estudiantes a *esbozar* (en inglés, *sketch*) el contexto del problema. Si bien un par de grupos echó mano a las computadoras, otros prefirieron hacer diagramas en papel, a los que les agregaron marcas para indicar segmentos congruentes. El tiempo que anteriormente se había dedicado a construir el rectángulo inicial fue ahorrado en todos los casos—los estudiantes parecían entender que el rectángulo inicial era de poca importancia. Muy pocos estudiantes exploraron mas de una ubicación posible para los dos nadadores en los lados del rectángulo. Sin embargo, la generalidad de la solución pudo observarse cuando los estudiantes compartieron soluciones—los triángulos se veían claramente distintos a pesar de todos ellos ser triángulos rectángulos, y en todos los casos la solución propuesta fue la misma—el punto medio de la hipotenusa. Hubo tiempo para que Megan hiciera que los estudiantes dediquen tiempo a buscar un argumento que justifique el teorema. Hacia el final de la clase se observó algunos estudiantes proveyendo un argumento similar al ofrecido más arriba (usando las diagonales de un rectángulo). No hubo tiempo para dedicar mucha atención a estos argumentos, sin embargo.

Durante el tercer período, Megan introdujo el problema y similarmente dirigió a los estudiantes a esbozar un diagrama, pero no hizo referencia a posibilidad de construirlo con GeoGebra. En discusiones con los estudiantes, sin embargo, Megan les preguntó qué habían hecho para determinar la ubicación del punto. Fue así que un estudiante (hablante del castellano, con poca facilidad en inglés) describió los pasos que siguió para encontrar una solución distinta a la de muchos otros. Este estudiante encontró lo que serían las mediatrices de estos lados del triángulo e identificó al punto de intersección de las mediatrices como el punto deseado. La figura 3 muestra la solución de ese estudiante al problema de encontrar el punto. Si bien el diagrama es claramente un esbozo y no una construcción precisa, el diagrama deja ver cuales fueron los pasos seguidos para determinar el punto. El uso de esbozos en lugar de construcciones sirvió además para justificar la desconfianza de las mediciones y la necesidad de un argumento. Luego de discutidas las distintas construcciones, hubo oportunidad para que la clase construya un argumento de por qué tanto el punto medio de la hipotenusa como la intersección de las mediatrices de los lados perpendiculares resultarían ser el mismo punto. El argumento construido, sin embargo, fue un argumento oral en el cual algunos de las expectativas de la situación de demostración no se presentaron: Por ejemplo, mientras que en la situación de demostración se espera que los enunciados se escriban y se lean usando las letras que designan a los objetos representados en el diagrama, en esta lección la discusión se mantuvo al nivel de los conceptos representados en el diagrama y de gestos indexicales a los objetos diagramáticos.

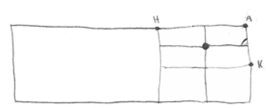


Figura 3. La solución de un alumno

Discusión y conclusión

Una observación general, importante para nuestros propósitos, es que, si bien las situaciones de construcción y de demostración fueron útiles para Megan, el uso que ella les dio no fue canónico. En la primera lección del día observamos que Megan intentó organizar la primera parte de la tarea utilizando una reducción del problema a la situación de construcción, pero en las lecciones subsiguientes el uso de la situación de construcción fue mucho más sutil. De manera similar, la situación de demostración no fue utilizada para reformar la tarea. La situación de demostración proveyó algunos elementos que contextualizaron la tarea original, permitiéndoles a los alumnos llegar a algo que se asemejaba a una prueba del teorema. En lugar de utilizar las situaciones de construcción y demostración para cambiar la tarea, Megan las utilizó a esas situaciones de manera metafórica y como marcos o contextos para que los estudiantes hagan partes de la tarea. Este fenómeno que llamamos en inglés *framing* y que podría traducirse al castellano como *enmarcado* o *encuadrado*, consiste en hacer presentes algunas claves que sugieren la pertinencia de las normas de aquellas situaciones (de construcción y de demostración) sin necesariamente requerir a los estudiantes que cumplan con todas las normas de tales situaciones.

Una importante ventaja de usar de marea metafórica estas situaciones ha sido la posibilidad que la maestra tuvo de controlar mejor el tiempo que la clase dedicó a encontrar el punto buscado, lo que hizo posible dedicar tiempo a la búsqueda de un argumento. Desde el punto de vista del contrato didáctico, éstas observaciones enfatizan la importancia de la negociación permanente del contrato, además del valor de algunas situaciones de instrucción que sirvan de puntos de partida para tal negociación.

Las normas de las situaciones de instrucción pueden jugar un rol heurístico para los estudiantes. El uso de la palabra *esbozar* (en inglés, *sketch*) en lugar de *construir*, por ejemplo, no impone la necesidad de usar GeoGebra o regla y compás, pero sí sugiere que el estudiante deberá de decidir sobre qué elementos creará como parte de su esbozo y la secuencia con la cual los creará. Tales decisiones podrían ser objeto de preguntas más adelante que pongan en juego consideraciones sobre las condiciones de posibilidad de cada construcción. De la misma manera, la situación de demostración podría ser usada metafóricamente para encuadrar la tarea—claves como *justifique* o *provea razones* pueden servirle al maestro para hacer a los alumnos responsables de construir un argumento que vaya más allá de haber obtenido una solución efectiva. Si bien *justificar* hace un llamado metafórico a la noción de demostración, por ejemplo, sugiriendo cuales podrían ser las justificaciones (teoremas, definiciones, etc.), tal palabra no requiere que se cumpla con todas las normas de la situación de demostración (véase Autor y Colega, 2009).

Por supuesto, para que esbozar y justificar puedan cumplir con aquél rol heurístico, es necesario que las situaciones de construcción y de demostración existan de antemano. El punto es importante en el contexto de las reformas educativas, y sirve enfatizarlo como una conjetura general. Si bien las tareas de modelaje, y las tareas nuevas en general, pueden dar lugar a comportamientos muy interesantes de parte del alumno, es previsible que el maestro tendrá que apoyar estos comportamientos de alguna manera. La utilización metafórica de situaciones de instrucción anteriores, enmarcando la tarea a realizar, puede servir para que los alumnos se den una idea de qué es lo que pueden hacer, sin que esto implique ni cambiar la tarea ni decirles explícitamente cómo resolver el problema.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, *93*(4), 373-397.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V.Villani, (Eds.) Perspectives on the teaching of geometry for the

21st century: An ICMI study (pp. 71-77). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Goffman, E. (1959). The presentation of self in everyday life. *New York*: Anchor DoubleDay.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal*, *27*(1), 29-63.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum.