



La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

Maribel **Aguas** Hidalgo

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)

México

aguashidalgomm@yahoo.com.mx

Ricardo **Quintero** Zazueta

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)

México

quintero@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia del pensamiento absoluto y su pertinencia en la toma de decisiones en situaciones que implican la comparación de probabilidades. Para ello, se diseñaron situaciones de probabilidad clásica con el modelo de urna. En cada situación se plantearon dos urnas con extracción simple, que implican o no relaciones de proporcionalidad, a estudiantes de tercer grado de educación secundaria. El análisis se realizó a través de la categorización de los resultados con base en las relaciones que se establecen entre los componentes de las urnas (casos favorables, desfavorables y posibles). El estudio arrojó que las características de la tarea así como la extrapolación del conocimiento influyen en la toma de decisiones.

Palabras clave: relaciones de proporcionalidad, situaciones de probabilidad, modelo de urna, pensamiento absoluto.

Antecedentes y planteamiento del problema

Los razonamientos proporcional y probabilístico guardan una estrecha relación, por ejemplo, al contrastar la definición de razonamiento proporcional de Lesh, Post y Behr (1988) con lo que Landín y Sánchez (2010) proponen respecto a las implicaciones del razonamiento probabilístico, se identificó que ambos razonamientos requieren de un análisis cuantitativo y cualitativo, así como de la inferencia y la predicción de resultados. De esta manera, ambos razonamientos no se limitan a comparaciones numéricas, y aunque algunos investigadores han intentado distinguir entre sí a estos conceptos (véase por ejemplo Hoemann y Ross, 1971); el trabajo que aquí se expone no se centra en distinguirlos sino en incorporarlos, para extraer y analizar aquellas estrategias influenciadas por el pensamiento absoluto para la toma de decisiones, considerando como medio el modelo de urna.

Tanto en el Libro para el maestro de educación secundaria (Alarcón *et al.* 1994) como en investigaciones de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975), Green (1988), Falk (1980),

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

Alatorre (1994), Aguas (2014), entre otros, han planteado situaciones con dos urnas. No obstante que existen situaciones que pueden ser modeladas con ellas, las urnas en sí mismas son un contexto rico para trabajar temas de probabilidad u otros de las matemáticas siempre y cuando estos no sean vistos como prerequisites para comprenderla, sino un contexto donde interactúan y se apoyan mutuamente.

En cuanto al estudio de las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver situaciones de urnas, como lo señala Alatorre (1994), ya han sido trabajadas por autores como: Piaget e Inhelder (1951), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984), Fischbein *et al.* (1970), y Thornton y Fuller (1981). De acuerdo a la investigadora, en cada estudio se especificaron distintas estrategias, algunas comunes y otras no, en gran medida, porque las categorías definidas dependieron de lo que cada investigador se proponía observar o de lo querían enfatizar. En las categorías definidas por Alatorre (1994), la cantidad y la calidad de las clases de elementos que entran en juego en una estrategia lleva a una jerarquización de las estrategias por nivel de complejidad, es decir: a) Estrategias simples, b) Estrategias compuestas y c) Estrategias y mecanismos primitivos. Por su parte, Piaget e Inhelder (1951) identificaron en su estudio las siguientes siete estrategias al aplicar diez situaciones de urnas, elección del lado donde hay: 1) más casos favorables, 2) hay menos casos favorables, 3) hay sólo un caso favorable, 4) hay más casos posibles, 5) hay menos casos posibles, 6) es mayor la diferencia de casos favorables y desfavorables, y 7) donde la probabilidad es mayor.

Las primeras cinco estrategias de acuerdo a Piaget e Inhelder (1951) son propias de la primera etapa del desarrollo cognitivo, la seis se presenta en la segunda etapa y la siete hasta la tercera. Sin embargo, aunque los autores señalan algunos indicadores del porqué y cómo se realizaron las elecciones en cada una de las etapas, queda la incertidumbre qué otras relaciones establecen los alumnos para realizar su elección, así como si se pueden presentar otro tipo de elecciones distintas a las comentadas por estos investigadores o si las estrategias que en un momento no fueron funcionales pueden serlo en otro momento o viceversa, lo que sería interesante indagar. Por ejemplo, en la segunda etapa dadas las probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ se realizan elecciones correctas con base en las comparaciones de las diferencias de los casos posibles y los favorables o los posibles y los desfavorables. Esta estrategia es funcional al estar relacionada con una situación de una variable donde los casos posibles son iguales. Si esta misma estrategia se hubiera empleado en la situación de dos variables donde las probabilidades son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, las diferencias encontradas serían iguales lo que podría llevar al estudiante a no saber cuál elegir o a determinar que se tiene la misma probabilidad, es así como la extrapolación de una estrategia funcional, con un razonamiento absoluto que fue funcional en un primer momento puede no serlo en otra situación.

De esta manera, ahora lo que se propone es analizar las relaciones que se establecen entre el razonamiento proporcional y probabilístico. Para ello se consideró conveniente hacer una clasificación de las estrategias para profundizar en los procesos que los estudiantes siguen para establecer algún resultado. Es decir, identificar los elementos (casos) favorables, desfavorables o posibles que se consideren, el tipo de elecciones que se realicen con base en las relaciones que se establezcan y analizar las particularidades de estas relaciones, que para este estudio son fundamentales, porque lo que se pretende es obtener indicios de cómo el pensamiento absoluto influye en el probabilístico en la toma de decisiones, en un contexto de urnas. Así, para orientar el estudio, se plantea la siguiente pregunta y propósito de investigación.

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

Pregunta de investigación: ¿De qué manera el pensamiento absoluto influye en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades?

Propósito: Identificar y analizar las estrategias que siguen estudiantes de tercer grado de educación secundaria al resolver situaciones de probabilidad clásica contextualizadas con el modelo de urna para clasificarlas, centrando la atención en aquellas estrategias que implican un pensamiento absoluto y ver de qué manera influyen en la toma de decisiones.

Marco interpretativo

Para el análisis de los resultados se estudiaron y establecieron previamente las posibles relaciones que podrían surgir a partir de los elementos proporcionados en las hojas de trabajo. Como resultado de ese proceso se identificaron dos tipos de comparaciones cuando se relacionan los elementos contenidos en dos urnas. Una comparación es la multiplicativa —por medio de un cociente—, considerado como razón o fracción. Y la otra comparación es aditiva —por medio de una diferencia— y representada por veinte expresiones (véase el Cuadro 1), siendo esta última la que interesa ilustrar en este documento. A continuación se muestra, en el Cuadro 1, las expresiones identificadas al comparar los elementos de dos urnas, donde B representa bolas Blancas y a su vez el número de casos favorables y N bolas Negras y también el número de casos desfavorables. Donde además $B + N$ corresponde al número de casos posibles.

Cuadro 1

Expresiones que se pueden establecer cuando se compara por diferencia.

Punto de referencia B	Punto de referencia N	Punto de referencia B	Punto de referencia N
Expresión i	Expresión ii	Expresión iii	Expresión iv
Minuendo B_1 Sustraendo B_2	Minuendo N_1 Sustraendo N_2	Minuendo B_2 Sustraendo B_1	Minuendo N_2 Sustraendo N_1
Parte con parte			
Punto de referencia urna 1	Punto de referencia urna 2	Punto de referencia urna 1	Punto de referencia urna 2
Expresión v	Expresión vi	Expresión vii	Expresión viii
Minuendo $B_1 + N_1$ Sustraendo $B_2 + N_2$	Minuendo $B_2 + N_2$ Sustraendo $B_1 + N_1$	Minuendo $N_1 + B_1$ Sustraendo $N_2 + B_2$	Minuendo $N_2 + B_2$ Sustraendo $N_1 + B_1$
Todo con todo			
Expresión ix	Expresión x	Expresión xi	Expresión xii
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos N_2 y N_1	Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos B_2 y B_1
Parte y parte con parte y parte			
Expresión xiii	Expresión xiv	Expresión xv	Expresión xvi
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos B_2 y B_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	
Expresión xvii	Expresión xviii	Expresión xix	Expresión xx
Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos N_2 y N_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

En la comparación por diferencia que se muestra en el Cuadro 1, se pueden presentar, durante las relaciones que se establecen con los elementos que las conforman (Parte con parte, Todo con todo, Parte y parte con parte y parte, Parte y todo con parte y todo, Todo y parte con todo y parte), las siguientes estrategias para compararlas (véase el Cuadro 2), donde en la relación parte-parte a y c son las partes favorables, y b y d son las partes desfavorables; en la relación todo-todo $a + b$ y $c + d$ son los todos. Y las demás relaciones se derivan de éstas.

Cuadro 2

Estrategias para comparar las relaciones que se establecen en el Cuadro 1.

1ra.- Estrategia: Relación entre (Parte con parte o Todo con todo): Se presenta de forma aditiva entre los elementos de una misma clase o entre los elementos totales de dos conjuntos.

Diferencia de casos favorables: Cuando se tiene $a - c$ o $c - a$, donde $a \geq c$ o $a \leq c$.

Diferencia de casos desfavorables: Cuando se tiene $b - d$ o $d - b$, donde $b \geq d$ o $b \leq d$.

Diferencia de casos posibles: Cuando se tiene $(a + b) - (c + d)$ o $(c + d) - (a + b)$, donde $a + b \geq c + d$ o $a + b \leq c + d$.

2da.- Estrategia: Relación dentro (Parte y parte con parte y parte; Parte y todo con parte y todo; o Todo y parte con todo y parte): Se presenta de forma aditiva entre los elementos de diferente clase o entre los elementos de una misma clase con los elementos totales de dos conjuntos.

Diferencia de casos favorables y desfavorables: Cuando se tiene $(a - b) - (c - d)$ o $(c - d) - (a - b)$, donde $a - b \geq c - d$ o $a - b \leq c - d$ o $c - d \geq a - b$ o $c - d \leq a - b$.

Diferencia de casos desfavorables y favorables: Cuando se tiene $(b - a) - (d - c)$ o $(d - c) - (b - a)$, donde $b - a \geq d - c$ o $b - a \leq d - c$ o $d - c \geq b - a$ o $d - c \leq b - a$.

Diferencia de casos favorables y posibles: Cuando se tiene $[a - (a + b)] - [c - (c + d)]$ o $[c - (c + d)] - [a - (a + b)]$, donde $a - (a + b) \geq c - (c + d)$ o $a - (a + b) \leq c - (c + d)$ o $c - (c + d) \geq a - (a + b)$ o $c - (c + d) \leq a - (a + b)$.

Diferencia de casos posibles y favorables: Cuando se tiene $[(a + b) - a] - [(c + d) - c]$ o $[(c + d) - c] - [(a + b) - a]$, donde $(a + b) - a \geq (c + d) - c$ o $(a + b) - a \leq (c + d) - c$ o $(c + d) - c \geq (a + b) - a$ o $(c + d) - c \leq (a + b) - a$.

Diferencia de casos desfavorables y posibles: Cuando se tiene $[b - (a + b)] - [d - (c + d)]$ o $[d - (c + d)] - [b - (a + b)]$, donde $b - (a + b) \geq d - (c + d)$ o $b - (a + b) \leq d - (c + d)$ o $d - (c + d) \geq b - (a + b)$ o $d - (c + d) \leq b - (a + b)$.

Diferencia de casos posibles y desfavorables: Cuando se tiene $[(a + b) - b] - [(c + d) - d]$ o $[(c + d) - d] - [(a + b) - b]$, donde $(a + b) - b \geq (c + d) - d$ o $(a + b) - b \leq (c + d) - d$ o $(c + d) - d \geq (a + b) - b$ o $(c + d) - d \leq (a + b) - b$.

Aunque en las expresiones anteriores se utilizó el signo menos (-) para representar las estrategias que se emplean cuando se compara por diferencia, las diferencias también pueden establecerse utilizando el signo más (+), por ejemplo, $a - b = z$, donde la diferencia entre a y b es z , o bien $a + z = b$, donde la diferencia entre a y b es z . De aquí que cuando se habla de problemas aditivos, están implicadas sumas y restas.

Cuando se analizan situaciones binarias es posible identificar dos tipos de comparaciones: Comparación por diferencias de cocientes, donde se utilizan estructuras multiplicativas y Comparación por diferencia de enteros donde se emplean estructuras aditivas. Aunque en ambas comparaciones se trabaja con diferencia, en cada una de ellas están involucrados distintos tipos de pensamiento, en la primera se presenta el relativo y en la segunda el absoluto, descritos por Lamon (1999). Así, para hacer referencia a las primeras comparaciones, desde un inicio se han nombrado *comparación por cociente* y a las segundas *comparación por diferencia*.

Método

El trabajo de investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo con un caso instrumental (Stake, 1999) porque interesó profundizar en el análisis de las estrategias de

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

razonamiento absoluto que estudiantes de educación secundaria siguen al trabajar situaciones de probabilidad en un contexto de urna. El caso lo conforma un grupo de 35 alumnos que cursaba el tercer grado de educación secundaria de la Ciudad de México, se eligió porque se consideró que los alumnos de este último grado ya tendrían antecedentes de los contenidos que interesó analizar de acuerdo con los *Programas de estudio 2011* (SEP, 2011), lo que ayudaría a obtener una mayor variedad de estrategias de resolución para analizar. Para el diseño de las actividades, además de incluir el modelo de urna, se analizaron los tipos de problemas de razonamiento proporcional. En cuanto a la clasificación de Lamon (1993), los problemas diseñados corresponden a los de Parte-parte-todo —que Özgün-Koca (2009) incluye en su estudio dentro de los de comparación numérica— porque la mayoría de los problemas que se plantearon pueden asumirse como conjuntos discretos donde un todo corresponde a los casos posibles y los subconjuntos de ese todo a los casos favorables y desfavorables, respectivamente.

Análisis de los resultados

Comparación cuantitativa por diferencia. Relaciones que se establecen con una o más variables (véase el Cuadro 1). Se especifican numéricamente las comparaciones por diferencia (mayor que, menor que, más que o menos que y se precisa por cuánto) que se realizaron con las variables que se implicaron: casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. Y una vez establecidas las relaciones se trabaja con una estrategia de solución “dentro” o “entre” para hacer la elección (véase el Cuadro 2). En el Cuadro 3 se ejemplifica la comparación cuantitativa por diferencia y sus implicaciones.

Cuadro 3

Ilustración del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificada en la comparación cuantitativa por diferencia.

Comparación cuantitativa por diferencia		
<ul style="list-style-type: none"> · Consideración de casos favorables · Consideración de casos favorables y casos desfavorables 		
Elección	Estrategia	Relación de orden
Mayor número de casos favorables	Relación entre Parte con parte	Favorables \longleftrightarrow Favorables
Diferencia mayor Diferencia menor Diferencia igual	Relación dentro Parte y parte con parte y parte	Favorables \longleftrightarrow Desfavorables Favorables-Desfavorables Desfavorables-Favorables

Consideración de casos favorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables de cada conjunto (véanse las expresiones i y iii del Cuadro 1) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en el mayor número de casos favorables

Estrategia: Relación entre Parte con parte.

Relación de orden: Favorables \longleftrightarrow Favorables.

Esta estrategia se presentó en: VI-1-A14, VI-1-A25 y VII-A25. Señalan los casos favorables y la diferencia específica para realizar su elección con base en el mayor número de casos favorables. Donde el número de situación planteada se identifica con números romanos, aquí por ejemplo, VII es el número de situación; los números 1 o 2 que le siguen corresponden al número de pregunta cuando la situación presenta dos preguntas (si la situación contiene sólo una pregunta, esta numeración se omite, como sucede en la descripción de la figura 1) y al final se

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

incluye la nomenclatura A1, A2, ..., o A35 que refiere al número de alumno que ofreció la respuesta.

VII-A25 Máquina A. Porque en general tiene 21 pelotas la máquina A y la B tiene 14 pero de esas 21, 6 son blancas y, en la máquina B son 14 pero sólo hay 4 blancas y tiene 2 oportunidades más de obtener una pelota blanca.

Figura 1. Respuesta de VII-A25 que elige el mayor número de casos favorables. Compara por diferencia (favorables-favorables) y explicita la diferencia.

Decidir comparar y elegir por medio de diferencia puede ser correcto o no, pues esto dependerá del tipo de situaciones que se trabajen, por ejemplo, si en las expresiones i y iii (véase el Cuadro 1) se compara por diferencia y se elige con base en el mayor número de casos favorables, esto será correcto si en la situación se presenta el mismo número de casos desfavorables o posibles.

Consideración de casos favorables y casos desfavorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones ix, x, xi y xii del Cuadro 1) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en la diferencia mayor

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables \longleftrightarrow Desfavorables.

Donde se presentó esta estrategia fue en: II-1-A11, II-1-A34, V-A35, IX-A4, IX-A9, IX-A22, IX-A32 y IX-A35, en la figura 2 se ilustra.

II-1-A11 Urna. Porque en la urna hay 5 bolitas blancas y 4 bolitas negras y por 1 bolita blanca es la diferencia y puedes ganar por las posibilidades.

Figura 2. Respuesta de II-1-A11 que elige la diferencia mayor. Compara por diferencia (favorables-desfavorables) y explicita la diferencia.

Quienes utilizaron esta estrategia señalan el número de casos favorables y desfavorables en un conjunto e indican la diferencia específica entre ambos para hacer su elección con base en el mayor número de los primeros. Esto quizá puede tener su origen en el diseño de la situación II ya que presenta una mayor diferencia de favorables y desfavorables en el segundo conjunto y en el primero no la hay, por lo que se puede deducir que es nula. Las situaciones V y IX fueron diseñadas con proporcionalidad y en comparación con la situación II, la diferencia de los casos favorables y desfavorables de ambos conjuntos no es nula. En la situación V se presentan estos datos y en la IX no se proporcionan.

Elección con base en la diferencia menor

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Desfavorables-favorables.

Donde se presentó esta estrategia fue en: VII-A31, VII-A32, VII-A35, VI-1-A1, VI-1-A11, VI-1-A21, VI-1-A32 y VI-1-A35. En la figura 3 se ejemplifica.

[B]	$\frac{10}{4}$	$\frac{15}{6}$	[A]	VII-A31 La máquina B. En la máquina A hay menos probabilidades que salga la pelota blanca y en la máquina B puede que salga la pelota blanca.
-----	----------------	----------------	-----	---

Figura 3. Respuesta de VII-A31 que elige la diferencia menor. Compara por diferencia (desfavorables-favorables) y explicita la diferencia.

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

En esta estrategia se señalan los casos desfavorables y favorables, además de la diferencia específica de cada conjunto para ser comparadas y elegir con base en la menor.

Elección con base en la diferencia igual

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables \longleftrightarrow Desfavorables.

Quien presentó esta estrategia fue un alumno (véase la figura 4).

IV-1-A5 Ambas cajas. Yo elegiría las dos cajas porque en las dos cajas es casi lo mismo de insectos, sólo la diferencia es de dos en la caja chica y en la caja grande, y en cualquiera de las dos es la misma probabilidad.

Figura 4. Respuesta de IV-1-A5 que elige la diferencia igual. Compara por diferencia (favorables-desfavorables) y explicita la diferencia.

En la situación IV se proporcionan los casos favorables y desfavorables, además se presentan dibujos que ilustran la situación pero donde no se distinguen los casos favorables de los desfavorables. IV-1-A5 realiza su elección considerando que en cada conjunto la diferencia de favorables y desfavorables es la misma, y aunque no indica las cantidades involucradas en su comparación, sí refiere la diferencia numérica específica que se da entre unos y otros, en este caso es 2. Es de señalar que, por el diseño de la situación, respecto a las cantidades proporcionadas la estrategia utilizada lleva a una elección incorrecta.

Las expresiones ix, x, xi y xii (véase el Cuadro 1) son convenientes para realizar elecciones sólo cuando en las situaciones la diferencia de casos favorables y casos desfavorables o viceversa es nula. De ser así, los conjuntos que se presentan son equiprobables y entonces se puede hacer una elección correcta con base en la igualdad que estos casos representan. Esta aseveración puede llevar a que en conjuntos donde exista una misma diferencia mayor o menor a cero también se consideren equiprobables, hecho que no se puede generalizar.

Consideraciones finales

En las expresiones ii y iv (véase el Cuadro 1) al comparar por diferencia se elige con base en el menor número de casos desfavorables, esto será correcto si en la situación se presenta el mismo número de casos favorables o posibles. De presentarse la elección con base en la igualdad de favorables, esta será correcta si en la situación existe igualdad en los desfavorables o posibles. Las características de las situaciones pueden ser notadas explícita o implícitamente por quien resuelve la situación. Sin embargo, las situaciones con igualdad de casos favorables, igualdad de casos desfavorables o igualdad de casos posibles, señaladas anteriormente no demandan un razonamiento proporcional porque llevan a que se involucre sólo un pensamiento absoluto y no un relativo.

En las expresiones i, ii, iii y iv (véase el Cuadro 1), con base en los argumentos que se expusieron en el documento, existen fundamentos matemáticos que llevan a que la comparación por diferencia sea una estrategia correcta en situaciones con una variable como es la igualdad de casos favorables, desfavorables o posibles. No así cuando se trabaja con situaciones donde existe diferencia entre el número de casos favorables, desfavorables y posibles con o sin proporcionalidad. En las expresiones v, vi, vii y viii expuestas en el Cuadro 1, cuando se comparan los elementos totales de un conjunto con los elementos totales de otro conjunto, es necesario tener presente que aunque se muestren evidencias numéricas que denoten la diferencia

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

entre estos elementos, este tipo de comparación no es una estrategia conveniente para realizar elecciones, debido a que las elecciones pueden ser correctas sólo por el diseño de la situación, donde se podría contemplar que la mayor probabilidad estaría determinada por el conjunto que presente mayor o menor número de casos posibles o conjuntos cuyo número de casos posibles sea igual. Algo parecido ocurre con las últimas ocho expresiones xiii, xiv, xv, xvi, xvii, xviii, xix y xx, que corresponden a comparar los casos favorables o desfavorables con los posibles.

Realizar elecciones correctas con base en la comparación por diferencia puede llevar a que los alumnos construyan intuiciones correctas (para determinadas situaciones) basadas en un pensamiento absoluto. Sin embargo, al ser extrapoladas a otras situaciones podrían ya no ser funcionales, corriendo el riesgo de convertirse en un obstáculo para resolver la situación de manera adecuada. Por lo que en ese momento sería conveniente replantear las situaciones para que contradigan a esas intuiciones primarias y con esto se modifiquen o se construyan otras intuiciones, que favorezcan un pensamiento relativo para afrontar las nuevas tareas.

Referencias

- Aguas, M. (2014). *Situaciones de probabilidad clásica y el modelo de urna como medios para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México, 2014.
- Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: SEP.
- Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1994.
- Falk, R. (1980). Comportamientos de elección en situaciones de probabilidad. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. Vol. II. University of Sheffield 9-13 August 1982.
- Fischbein, E (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Green, D. R. (1988). Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, B. C.: University of Victoria.
- Hoemann, Harry W. y Roos, Bruce M. (1971). Children's understanding of probability concepts. *Child Development*, 42, 221-236.
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. En Lester, F. K. (Ed). *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), pp. 41-61. USA: NCTM.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial*. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3). [Recuperado el 15/01/13 de: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842>]
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Research Agenda for Mathematics Education*. Vol. 2. The United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.
- Özgün-Koca, S. A. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. En Schimittau, J. (Ed). *Investigations in Mathematics Learning*, 2(1), pp. 26-48. USA: RCML.
- Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria*. México: SEP.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.