XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Teorema Fundamental do Cálculo: aplicações para o cálculo de área utilizando o GeoGebra

Natália Oliveira do **Nascimento**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
natalia-non@hotmail.com
Rogerio Fernando **Pires**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
rfpires25@hotmail.com

Resumo

Este trabalho teve por objetivo apresentar recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa de caráter qualitativa foi fundamentada nas ideias de modelagem matemática e modelação defendidas por Bassanezi e por Biebemgut e Hein. No processo de modelação do problema proposto (o cálculo da medida da área de dois lagos), foi utilizado o GeoGebra que possibilitou calcular a medida das áreas a partir das imagens dos lagos. Os resultados mostraram que a modelagem e a modelação podem ser estratégias bastante interessantes no ensino e na aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Modelagem, Modelação, GeoGebra.

Introdução

É indiscutível o fato de que há uma constante evolução nos mais variados setores da sociedade e, paralelamente, a educação, que exerce papel fundamental, também está avançando. A educação não atua somente no desenvolvimento de um país, mas na formação de cada cidadão, ajudando na prosperidade social, econômica e cultural, seja no momento de ensinar operações básicas, conhecimento histórico, linguagens de comunicação e até mesmo ao instigar o pensamento crítico. Assim, mais pesquisas vêm sendo desenvolvidas na área com intuito de aperfeiçoar as técnicas usadas em sala de aula como forma de promover o interesse e colaborar para a aprendizagem dos conteúdos apresentados aos alunos no Ensino Fundamental, Médio e Superior.

A Matemática é uma disciplina com alto índice de rejeição. Para Tatto e Scapin (2004), no convívio com os alunos percebe-se, empiricamente, a aversão que ocorre quando se deparam com a matéria. E isso se dá em todos os níveis de ensino; desde o aluno que ingressa nos anos iniciais até o ensino superior, identificamos tal rejeição na afirmação de que a Matemática é difícil. Consequentemente, estudantes escolhem profissões que, necessariamente, não envolvem o raciocínio matemático. Essa rejeição não surge por acaso; o ser humano tende a repelir aquilo que não provoca prazer ou instiga a curiosidade, problema proveniente da forma tradicional e às vezes arcaica de como os conteúdos matemáticos são apresentados em sala de aula. Por conseguinte, isso reflete na formação de alguns profissionais já capacitados em outras áreas, como engenheiros, químicos, biólogos, pedagogos e outros, que levam essa aversão para a vida profissional e involuntariamente propagam o negativismo com relação à Matemática.

No entanto, existem elementos que provocam o interesse dos alunos, como uma aula motivadora, conteúdos práticos, apoio familiar, incentivo, entre outros. Outro aspecto importante que contribui é o aluno reconhecer a aplicabilidade do conteúdo no seu cotidiano, seja para calcular a área de um terreno, olhar os juros de um cartão de crédito ou calcular uma distância percorrida. Em esferas superiores, por exemplo, essa aplicação pode ser mostrada para um graduando em biologia com um gráfico do crescimento de uma célula, para os futuros químicos no cálculo do gradiente de concentração, na cartografia e escala de mapas para os geógrafos e outros. Todos esses exemplos estão relacionados com conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Partindo dessa alegação, o presente trabalho apresenta recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Portanto, é possível destacar que a modelação matemática, uma dessas ferramentas, se apresenta para ajudar no processo de ensino e aprendizagem.

Aporte Teórico

É notória a importância da modelagem matemática como metodologia de ensino em todos os níveis, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, pois ela estimula o senso crítico, a curiosidade e o espírito investigativo do aprendiz ao abordar situações que envolvem fenômenos realísticos. Nessa direção, Bassanezi (2006) afirma que o interesse pela Matemática, inicialmente, provém de estímulos externos a ela, vindos do “mundo real”. Para ele, a Matemática Aplicada é o caminho. Os conteúdos matemáticos apresentados, por si sós, não são suficientemente interessantes para a maioria dos alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior. Conforme Bassanezi (2006, p. 16), os professores devem valorizar o que ensinam, e completa: “[...] que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer”.

Com o intuito de trazer esse pensamento para os estudantes e possibilitar o desenvolvimento na disciplina, surge o uso da modelagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A modelagem matemática é o processo de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e obter resoluções que possam ser aplicadas ao mundo real. Biembengut e Hein (2007) abordam a importância da reestruturação nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvem o pensamento crítico e independente. A partir disso, a

Matemática atua como meio de emergir a criatividade, a facilidade na resolução de problemas e a capacidade de modelar.

A modelagem produz efeito na interdisciplinaridade, é visível a sua influência no processo de pesquisas em outras ciências. Um profissional que desfruta do conhecimento matemático consegue transitar com facilidade entres os campos de aplicabilidade das mais diversas ciências, por exemplo, a Física e a Química, de forma mais imediata. Na educação, o método possibilita aos alunos o vislumbre de aspectos lúdicos e aplicações dos conteúdos, aliando teoria e prática. A Matemática pode ser usada como uma ferramenta que consegue sintetizar e generalizar ideias, inicialmente visualizadas de forma empírica, em teorias sólidas. Cada vez mais, teorias matemáticas são desenvolvidas, mas nem sempre têm uma aplicação imediata. Segundo Biembengut e Hein (2007), a Matemática e a realidade são conjuntos distintos e a modelagem surge como uma ponte entre elas.

Biembengut e Hein (2007) apresentam uma divisão clara de três etapas do processo: a primeira é a interação, em seguida a matematização e por último o modelo matemático. A primeira etapa consiste no reconhecimento da situação-problema, estudo do assunto a ser trabalhado, análise das variáveis e outras situações de conhecimento profundo do material a ser modelado. Depois de compreendida a situação, a segunda etapa, a matematização, trabalha a formulação do problema encontrado e sua resolução em termos do modelo. Para concluir, no modelo matemático, são realizadas a interpretação da solução e a avaliação da confiabilidade do modelo. A partir dessa divisão, espera-se que a modelagem seja capaz de incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Os conteúdos e teorias matemáticas são apresentados como acabados e completos, o que leva a um ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção. Bassanezi (2006, p. 36) esquematiza a forma como um teorema é ensinado, na seguinte ordem: “enunciado – demonstração – aplicação”. De acordo com o autor, o processo deveria ser o inverso, semelhante ao que originou o teorema, ou seja, primeiro a motivação (externa ou não à Matemática), formulação e validação das hipóteses acompanhadas de questionamentos e, por fim, seu enunciado. Uma forma de sanar essa deficiência presente no ensino seria a aplicação da modelagem matemática de maneira efetiva e prevista no processo. Apesar de seus inúmeros benefícios, a modelagem depara-se com diversos obstáculos no ambiente escolar.

Tais obstáculos são variados e partem desde processos burocráticos até mais especificamente a resistência dos estudantes. Os cursos regulares possuem orientações e cronogramas de conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula, tornando a aplicação da modelagem inviável por requerer um tempo maior e nem sempre seguir o programa. Outro problema identificado é o possível desinteresse dos alunos ao se defrontarem com um novo método com o qual não tiveram contato anterior. Além disso, muitos professores não se sentem capacitados para desenvolver a modelagem, em razão de não terem tido contato com ela na sua formação ou até mesmo em virtude do receio de prejudicar o seguimento do curso. Existe também a possibilidade de o aluno encontrar como solução conteúdos que ainda não possuem base matemática suficiente que viabilizem novos conhecimentos em temas mais específicos.

Para alguns educadores matemáticos, por exemplo, D’Ambrosio (1996), Grande (2013), Pires e Silva (2014), a Matemática torna-se mais atrativa e efetiva na sociedade quando se tem uma aplicabilidade de seu conteúdo. Nesse sentido, é indispensável proporcionar aos alunos momentos que possibilitam a interdisciplinaridade. Posto isso, surge a modelação como solução. Biembengut e Hein (2007) consideram a modelação matemática uma estratégia que abrange o conteúdo programático e consegue adaptá-lo a uma determinada situação. Inicialmente, é preciso que o professor tenha conhecimentos prévios de seus alunos, desde o domínio matemático até mesmo o contexto socioeconômico em que eles estão inseridos. Os objetivos gerais são semelhantes à modelagem matemática, como despertar o interesse pela Matemática e desenvolver habilidade para resolver problemas, estimular a criatividade e realizar pesquisas. Entretanto, ela se diferencia da modelagem, por exemplo, quando se trabalha com ela no seu sentido literal, em princípio, no momento da escolha do tema, não se sabe qual o ferramental matemático necessário para a obtenção do modelo. Quando isso ocorre em cursos regulares em que se tem uma grade de conteúdos a ser cumprida, pode ser prejudicial, pois o conhecimento matemático exigido no processo pode não estar contemplado nessa grade.

Em contrapartida, na modelação, no momento da escolha do tema, o professor já sabe qual é o modelo que os alunos devem criar e os conhecimentos matemáticos utilizados estão todos previstos na grade de conteúdos do curso, ou seja, aos alunos cabe uma recriação de modelos já existentes. No entanto, a modelação não deixa de comtemplar a espinha dorsal do processo de modelagem, que é a investigação por meio da Matemática.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, esta pesquisa envolveu a modelagem científica e a modelação no ensino-aprendizagem A disciplina-base para o desenvolvimento é o Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo que será aplicado no cálculo de áreas. Aliado a isso, será usado o *software* GeoGebra com o intuito de auxiliar a modelação de imagens via satélite, verificar a veracidade dos cálculos realizados e empregá-lo como uma ferramenta para o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Desenvolvimento

Com o intuito de fazer uma modelação utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o primeiro passo foi o reconhecimento do tema e as suas possíveis aplicações. Lima (1999) traz o seguinte enunciado:

- Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) F é uma integral indefinida de *f*, isto é, existe $a \in I$ tal que:

$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \forall\, x \in I.$

(2) F é uma primitiva de *f*, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

A aplicação mais direta da integração pela diferenciação é o cálculo de áreas e volumes. Com o objetivo de vislumbrar uma aplicação acessível e que aproximasse o aluno da realidade no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior, escolheu-se para ser calculada a medida da área de dois lagos presentes em um parque municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais. Nesse momento, fica visível a etapa da interação com a situação a ser modelada, conforme apontam Biembengut e Hein (2007).

O Parque Municipal do Goiabal foi adotado por intermédio das Unidades de Conservação (UC), criadas a partir do Sistema Nacional de Unidades de Conservação da Natureza

(SNUC) (Lei n.º 9.985, de 18 de julho de 2000). O parque foi inaugurado em 1986, no município de Ituiutaba-MG, com o objetivo de preservar o ecossistema natural, proporcionar um momento de lazer e turismo, a fim de valorizar o meio ambiente e suas particularidades, além de possibilitar a realização de pesquisas científicas. Apesar da sua importância histórica e ambiental, o parque não é reconhecido de forma consciente pela comunidade e assim não alcança seus objetivos iniciais. Faz-se necessário um plano de gestão, no qual são levantadas as suas funções, feitas adaptações, reestruturações e, por fim, uma divulgação adequada do espaço, além da valorização do espaço por parte da população.

Para a realização desse estudo que visou a modelação usando o TFC, foram usados recursos tecnológicos que deram dinamismo à construção do modelo e confiabilidade aos resultados, análise de informação e visualização do processo. Portanto, foram usados recursos de imagens via satélite, disponibilizadas pelo Google, e os cálculos via GeoGebra. O GeoGebra é um *software* de Matemática gratuito e de fácil acesso, utilizado como ferramenta nos mais diferentes níveis de ensino, que trabalha aspectos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo, combinados em uma única aplicação.

O aplicativo permite adicionar imagens e a partir delas desenvolver equações que representam funções por meio de pontos colocados estrategicamente, como na imagem a seguir:

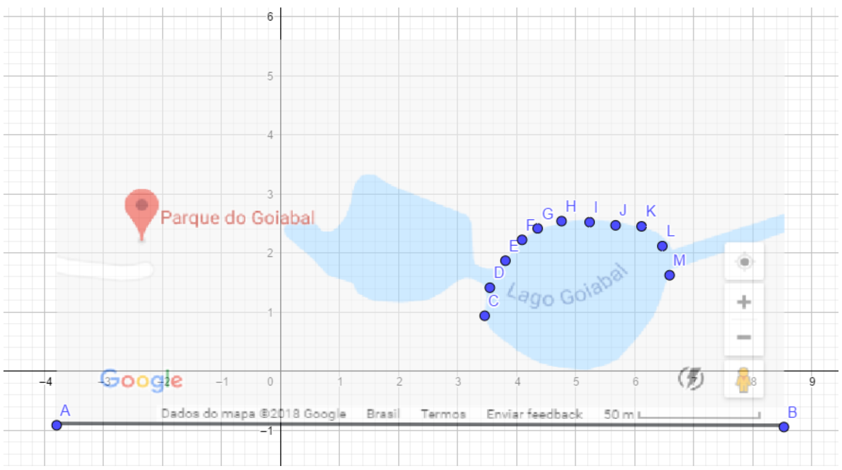

Figura 1. Primeiro passo após imagem inserida no GeoGebra

Na Figura 1, foram dispostos com o auxílio do GeoGebra pontos sobre uma parte da margem de um dos lagos e, depois de realizado um ajuste de curva, foi possível obter a equação que descreve algebricamente a curva que contém os pontos dispostos inicialmente. A Figura 2, a seguir, mostra a curva ajustada sobre os pontos.

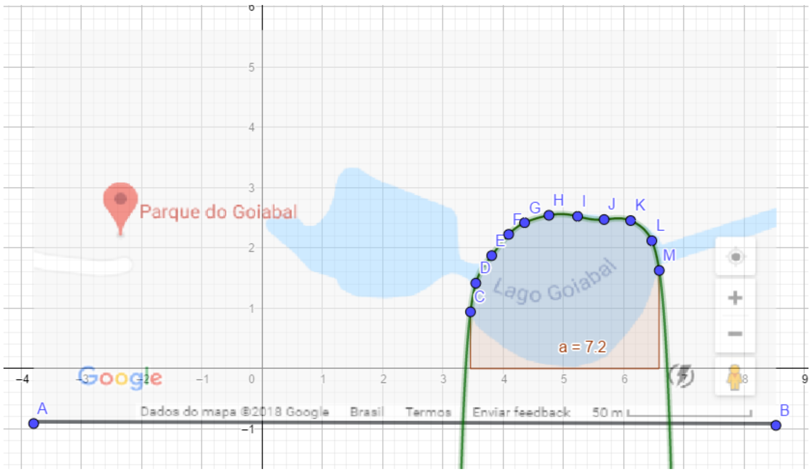

Figura 2. Curva ajustada pelos pontos

A figura anterior mostra a curva ajustada sobre os pontos, cuja equação que a representa algebricamente é $f(x) = -0{,}15x^{10} + 7{,}51x^{9} - 169{,}85x^{8} + 2266{,}84x^{7} - 19756{,}2x^{6} + 117481{,}99x^{5} - 482724{,}84x^{4} + 1353250x^{3} - 2476971{,}29x^{2} + 2673057{,}34x - 1291500{,}63$. Essa equação é o modelo matemático que possibilitou a resolução do problema proposto inicialmente (calcular a área dos lagos do Parque do Goiabal). No aplicativo, na barra de entrada, seleciona-se a opção Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, < Valor de x Final>), em que em foram completados respectivamente com a f(x), o valor 3,46 que corresponde ao limite inferior de integração e 6,59 que corresponde ao limite superior de integração, obtendo assim o valor da área da região sob a curva, que é de 7,2.

No entanto, como é possível observar na Figura 2, existem duas regiões cujas áreas foram incluídas no cálculo, porém não fazem parte do lago. Logo, as áreas dessas regiões devem ser descontadas do valor da área da região considerada e, para tanto, foram aplicados os mesmos procedimentos para calcular a medida das áreas das regiões que não pertencem ao lago. Depois, esses valores foram subtraídos do valor encontrado inicialmente. Esses procedimentos foram sintetizados na forma de imagem, que podem ser observados na Figura 3.

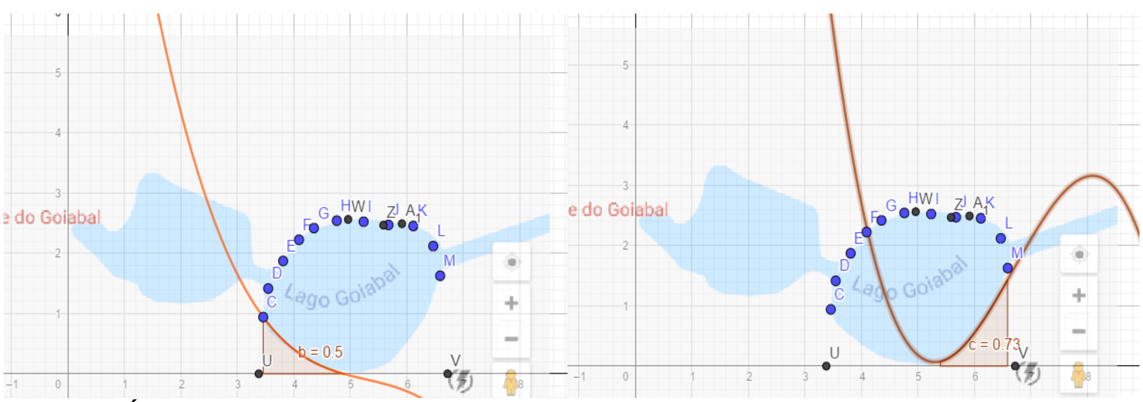

Figura 3. Área das laterais que não pertencem ao lago

Observando a Figura 3, nota-se que as áreas das regiões que não pertencem ao lago são respectivamente 0,5 e 0,73. Então, a área do lago é determinada por A = 7,2-(0,5 + 0,73) = 5,97.

Nesse procedimento, fica claro o uso da matematização, etapa da modelação proposta por Biembengut e Hein (2007), por meio da formulação e da resolução do problema proposto.

Encontrada a medida da área do lago, o último passo é a interpretação da solução do modelo, parte essencial para a compreensão e finalização do processo a partir dos resultados obtidos. Assim, é necessário, nesse caso, fazer uma conversão e adequar os cálculos e os valores obtidos com a escala equivalente a medida real. Ao ser capturada via satélite, a imagem apresentava uma escala de medida 2 cm que representava 50 m na realidade, e com os ajustes feitos no GeoGebra a escala passou a representar 2 unidades no *software* que expressa 50 m na realidade. Dessa forma, correspondendo a 25 m cada unidade na escala, a área real do lago passa a ser $H = A * (25)^2 = 3731{,}25\ m^2$. As mesmas etapas foram realizadas em um segundo lago, também presente nas figuras, e a área obtida foi de $2656{,}25\ m^2$.

Apesar da confiabilidade do cálculo realizado pelo GeoGebra e da resolução e segurança dos dados obtidos pela imagem via satélite, as áreas encontradas são valores aproximados, podendo variar para mais ou para menos. Ao usar a ferramenta do ajuste de pontos para traçar a curva e chegar à equação que representa algebricamente a função, foi possível perceber que, quanto mais precisos e mais próximos os pontos estão, maior será a aproximação final das medidas reais das áreas dos lagos. Esse processo possibilitou comparações no decorrer da realização das etapas e permitiu visualizar as estratégias usadas pelo *software* no ajuste de imagem e, consequentemente, na lei de formação da função a partir da curva para o cálculo de áreas por imagem no GeoGebra.

Em suma, o desenvolvimento dessa tarefa propiciou evidenciar no processo de modelação cada uma das etapas propostas por Biembengut e Hein (2007): a interação, a matematização e o modelo matemático.

Considerações Finais

O Teorema Fundamental do Cálculo é um conteúdo debatido largamente nas pesquisas em Educação Matemática, quando o foco é o Ensino Superior, e um dos conceitos que mais causam dificuldades na sua compreensão por parte dos estudantes. Pesquisas como a de Anacleto (2007) e Grande (2013) mostram que grande parte das dificuldades envolvidas na compreensão do TFC está ligada à maneira abstrata pela qual ele é apresentado, com a seguinte ordem: enunciado do teorema – demonstração – aplicações, cujo processo poderia ser realizado seguindo uma ordem inversa.

Nesse sentido, Bassanezi (2006) argumenta que o ensino da Matemática passa a ser mais interessante a partir do momento em que se procura iniciar o processo de construção do conhecimento partindo de uma motivação inicial (interna ou externa a própria Matemática). Ele ainda enfatiza que um caminho para que o ensino desperte o interesse do estudante e parta de situações reais é a modelagem matemática.

De posse das ideias defendidas por Bassanezi (2006) e Biembengut e Hein (2007) e com o objetivo de realizar um processo de modelação que, relacionado ao TFC, a pesquisa aqui descrita buscou apresentar, o processo de modelagem pode ser reproduzido em sala de aula ao se abordar o teorema em questão. Entre os principais resultados encontrados ao desenvolver este estudo, está o de perceber a motivação, da primeira autora do trabalho, em aprofundar seus conhecimentos sobre TFC. Ela é aluna do curso de Licenciatura em Matemática e acabou de cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Além disso, em cada passagem do desenvolvimento do estudo foi possível observar e compreender cada uma das etapas da modelação descritas por Biembengut e Hein (2007).

Por fim, atendo-se aos limites da investigação aqui descrita, foi constatado que a modelagem/modelação desperta o espírito investigativo, a curiosidade e a autonomia do estudante, uma vez que o estudo do conteúdo partiu de um problema real vivenciado pela primeira autora.

Referências e bibliografia

Tatto, F., & Scapin, I.J. (2004). Rejeição à Matemática: causas e alternativas de intervenção. *Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-URI*: Porto Alegre.

Biembengut, M.S., & Hein, N. (2007). Modelagem Matemática no Ensino. (4a ed). São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R.C. (2006). Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

D'Ambrosio, U. (1996). Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus.

Grande, A.L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F. (2014). Função: Concepções de professores e estudantes dos Ensinos Médio e Superior. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F., & Silva, B.A. (2014). Função: Concepções daquele que ensina e daquele que aprende. *Revista de Educação Matemática e Tecnologia, v.5, n.3, 1-25*.

Lima, E.L. (1999). Análise Real.(4ª ed). *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*: Rio de Janeiro.