XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Génesis Instrumental: El caso de la derivada direccional, un estudio del proceso de enseñanza y de aprendizaje mediado por objetos dinámicos en estudiantes de ingeniería

Pedro Vicente Esteban Duarte
Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Hugo Rogelio Mejía Velasco
CINVESTAV
México
hmejia@cinvestav.mx

Luis Carlos Rojas Flórez
luis.rojas@cinvestav.mx
CINVESTAV
México

Resumen

El cálculo diferencial de funciones de dos variables es una de las áreas de las matemáticas de mayor importancia en el estudio de la ingeniería, los conceptos que se estudian en esta asignatura forman la base de otros conceptos que los estudiantes deben abordar en sus otras áreas de estudio. Sin embargo, y a diferencia del cálculo diferencial para funciones de una variable, el número de trabajos publicados en educación es escaso. Este escrito muestra avances de una tesis doctoral, cuyo principal objetivo es desarrollar comprensión conceptual de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Para ello, se dispuso a crear una secuencia instruccional de enseñanza y de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra. Para el análisis de la información recolectada se tomó como marco de referencia la aproximación instrumental, junto a la visualización como elemento articulador durante todo el proceso.

Palabras claves: Derivada Direccional, Objetos Dinámicos, Aproximación instrumental, Visualización, Conceptualización.

Introducción

El cálculo diferencial de funciones de varias variables es una asignatura de vital importancia en el estudio de las matemáticas e ingeniería a nivel universitario. Dentro de su contenido temático se estudian diferentes nociones que proveen de herramientas conceptuales al estudiante, que posteriormente debe utilizar en problemas, situaciones o construcciones de nuevos conceptos y conocimientos que se presentan en sus otras áreas de estudio. En esta asignatura, la visualización[1] forma parte fundamental en su comprensión, sus tópicos que giran alrededor de la interpretación geométrica de imágenes en dos y tres dimensiones, pueden tornarse abstractos y de dificultosa comprensión si no se cuentan con herramientas que permitan abordarlos de una manera clara. Por ello, desde el punto de vista de su enseñanza y de su aprendizaje, resulta fundamental considerar instrumentos que permitan al docente transmitir sus conocimientos de una manera accesible, y a los estudiantes escenarios que les faciliten la comprensión de los conceptos inmersos en esta asignatura de manera clara.

Dada la importancia del cálculo diferencial y en particular de la noción de la derivada direccional, en la comprensión conceptual y aplicativa de distintas nociones que deben desarrollar los estudiantes a través su carrera de ingeniería, se esperaría que hubiese gran cantidad de trabajos o investigaciones que abordaran la problemática de su enseñanza y de su aprendizaje; sin embargo, haciendo un barrido bibliográfico, se encuentra un reducido conjunto de trabajos publicados en esta rama. Algunos de ellos, hacen referencia principalmente a las funciones de dos variables (e.g. Trigueros y Martínez, 2012; Weber y Thompson, 2014), y a diferencia del cálculo diferencial en una variable donde abunda trabajos e investigaciones que se ocupan de esta problemática, son muy pocas las publicaciones sobre este cálculo para funciones en dos variables, y en particular de la derivada direccional, como lo hace ver Trigueros & Martínez, (2015).

> "Hay muy pocas publicaciones sobre el cálculo diferencial de tales funciones. La única publicación a la que nos referiremos, Weber (2012), incluye una discusión de la tasa de cambio de funciones de dos variables centradas en el uso del pensamiento covariacional para ayudar a los estudiantes a construir una noción de tasa de cambio en el espacio" (pág.1).

Algunos autores afirman que la enseñanza del cálculo diferencial se enfoca en el uso y aplicación de fórmulas algebraicas, lo que causa en los estudiantes dificultades en la comprensión conceptual (Artigue, (1995); Moreno, (2005)). Lo anterior no significa que este enfoque no contribuya de manera significativa en el proceso de aprendizaje, el problema radica cuando se deja a un lado la relación entre conceptos, sus fórmulas algebraicas e interpretaciones geométricas. Cuando esto ocurre, se corre el riesgo que los estudiantes perciban cada tópico como un tema aislado.

Por otro lado, en la mayor parte de los textos utilizados en la enseñanza del cálculo diferencial en una variable (Edwards & Penney, 2008; Larson & Edwards, 2013; Stewart, 2006),

[1] En el sentido de (Zimmermann and Cunningham, 1991, p. 12). "La visualización matemática es la capacidad del alumno para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con una computadora) para representar un concepto o problema matemático y usar el diagrama para lograr comprensión y como una ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, que es la comprensión."

mucho antes de introducir el concepto de la derivada, se presentan registros asociados del concepto de pendiente, y utilizan estos posteriormente para introducir esta noción. Sin embargo, para funciones de dos variables en (3D) el espacio, no se presenta de manera explícita el concepto de pendiente, por el contrario, la primera discusión de este concepto se da con la introducción de las derivadas parciales. Una de las posibles razones que podría indicar lo anterior, es que los autores de estos libros asumen que el lector extenderá naturalmente el concepto de pendiente de dos a tres dimensiones, lo que en la realidad no ocurre.

De acuerdo con el planteamiento realizado, nuestra investigación plantea una propuesta que integra actividades de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, dirigidas y estructuradas a la comprensión de la derivada direccional. Nuestro principal objetivo fue el de diseñar una secuencia instruccional didáctica, que incorporara objetos dinámicos, para estudiar la comprensión de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Así mismo, y en vista del componente tecnológico utilizado, para la investigación resultó necesario contar con un enfoque teórico, que tuviera en cuenta el carácter no trivial del uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje. Por estas razones, seleccionamos como marco de referencia para el análisis de los datos derivados de la aplicación metodológica la Aproximación Instrumental. Sumado a lo anterior, y teniendo en cuenta que este trabajo se centra en el aprendizaje de un concepto que gira en torno al análisis geométrico de gráficos en dos y tres dimensiones, la visualización jugó un rol fundamental como elemento mediador en la comprensión de la derivada direccional.

Aproximación Instrumental

La humanidad a través de su historia se ha caracterizado por la construcción de herramientas o artefactos como solución a diferentes desafíos que se le han presentado en los distintos campos a través del tiempo. El ámbito de la educación matemática no ajeno a esta realidad, todas las herramientas que se han diseñado por más elementales que sean, han surgido como respuesta al incremento exponencial en la complejidad memorística, gráfica, algebraica, aplicativa e interpretativa de los conceptos que se estudian en las diferentes ramas a través del tiempo.

En el campo de la educación matemática, su desarrollo y evolución en gran parte ha estado ligado al uso de artefactos materiales físicos o simbólicos. Artigue (2002) menciona que, “El desarrollo de las matemáticas siempre ha dependido de las herramientas materiales y simbólicas disponibles para los cálculos matemáticos" (p.245). Por ejemplo, hoy por hoy podemos afirmar que es innegable el papel fundamental que juegan las herramientas o artefactos computacionales en el ámbito de la educación matemática, pues actualmente existen software que permiten explorar conceptos a través del cálculo simbólico (CAS), numéricos y gráficos, que ayudan a ampliar y facilitar el abordaje de nociones que hace unos años eran casi inexplorables por su complejidad.

Por otro lado, diseñar artefactos computacionales como objetos dinámicos, y aplicarlos dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje en las matemáticas, no se debe limitar únicamente al uso aritmético del mismo. Estos deben ser diseñados con un objetivo de aprendizaje concreto, visible por los estudiantes a través de la interacción con estos, o en ocasiones con la ayuda de una persona externa. Los estudiantes deben vislumbrar la intencionalidad para el cual el artefacto fue construido, percibir su propósito y finalidad; cuando esto no ocurre, el artefacto pierde toda utilidad. Este proceso de interacción requiere que el estudiante desarrolle esquemas mentales en el sentido de Vergnaud (2009), que involucran habilidades en el uso del artefacto y conocimiento del contexto (en nuestro caso matemático) en las que el artefacto es útil. Es precisamente aquí donde el artefacto se convierte en un instrumento valioso y funcional, que media la actividad para el cual fue diseñado. Por consiguiente, convertir un artefacto en un instrumento en manos de un estudiante está lejos de ser trivial, requiere tiempo y esfuerzo por parte de él y del docente, e implica un descubrimiento progresivo de las propiedades y características del artefacto, todo este proceso es lo que se denomina dentro del marco de la Aproximación Instrumental, la génesis instrumental.

Así pues, transformar un artefacto en un instrumento implica dos sentidos: por un lado, está el proceso que está ligado a las características del artefacto, sus limitaciones y potencialidades que conforman las técnicas, formas de uso y comprensión conceptual del sujeto, a este se le llama la instrumentación. Y por otro, están las concepciones y preferencias del sujeto, éste puede cambiar la manera en que utiliza el artefacto, e incluso puede llegar modificarlo o personalizarlo a fin de adaptarlo a sus necesidades, a este proceso se le llama instrumentalización.

Propuesta metodológica

Para la aplicación metodológica, se crearon una serie de actividades de aprendizaje apoyadas en objetos dinámicos desarrollados con el software GeoGebra. Las actividades abarcan conceptos como funciones de dos variables, trazas, curvas de nivel, planos, rectas en el espacio, límites y continuidad, entre otros conceptos subyacentes necesarios para la construcción conceptual de derivada direccional. La selección del grupo experimental se realizó de manera voluntaria, de 31 estudiantes que recién iniciaban la asignatura de cálculo vectorial, ocho de ellos aceptaron participar en la investigación.

La ejecución de la propuesta se enmarcó en dos componentes que se articularon entre sí durante todo el proceso de ejecución. Por un lado, estaba el componente tecnológico y didáctico que consistió en elaborar una secuencia instruccional basada en objetos dinámicos creados con el software GeoGebra para la enseñanza y el de aprendizaje de la derivada direccional; y por otro, el componente de análisis, que comprendía la implementación de descriptores de evaluación (test de conocimientos, entrevistas semiestructuradas y videos de cada una de las prácticas) que permitieran analizar bajo el marco de la aproximación instrumental, la comprensión de la derivada direccional y conceptos asociados en los estudiantes.

Para la secuencia instruccional se diseñaron tres tipos de objetos, unos para operar y comparar, otros para afianzar conceptos, y otros más para validar definiciones o teoremas. Con cada una de las actividades, se pretendía que el estudiante a partir de la manipulación y de la visualización provista por los objetos, interpretara geométricamente el concepto o conceptos inmersos en cada uno de ellos. Así mismo, que articulara los conocimientos adquiridos a medida que iba avanzando en la secuencia, y consiguiese traducir dichas interpretaciones a un lenguaje numérico, algebraico y simbólico, que lo guiara a conceptualizar la derivada direccional a partir de su definición como un límite de una función de una variable, y también como el teorema que lo define.

En total se realizaron 15 objetos dinámicos que incorporaban vistas en dos y tres dimensiones, presentaban componentes dinámicos gráficos, numéricos, textuales, casillas de entrada de funciones, datos, expresiones algebraicas, y otros; que posibilitaba al estudiante explorar con múltiples ejemplos cada uno de los conceptos necesarios para la conceptualización de la derivada direccional. Seguidamente se muestran dos de los objetos dinámicos más representativos.

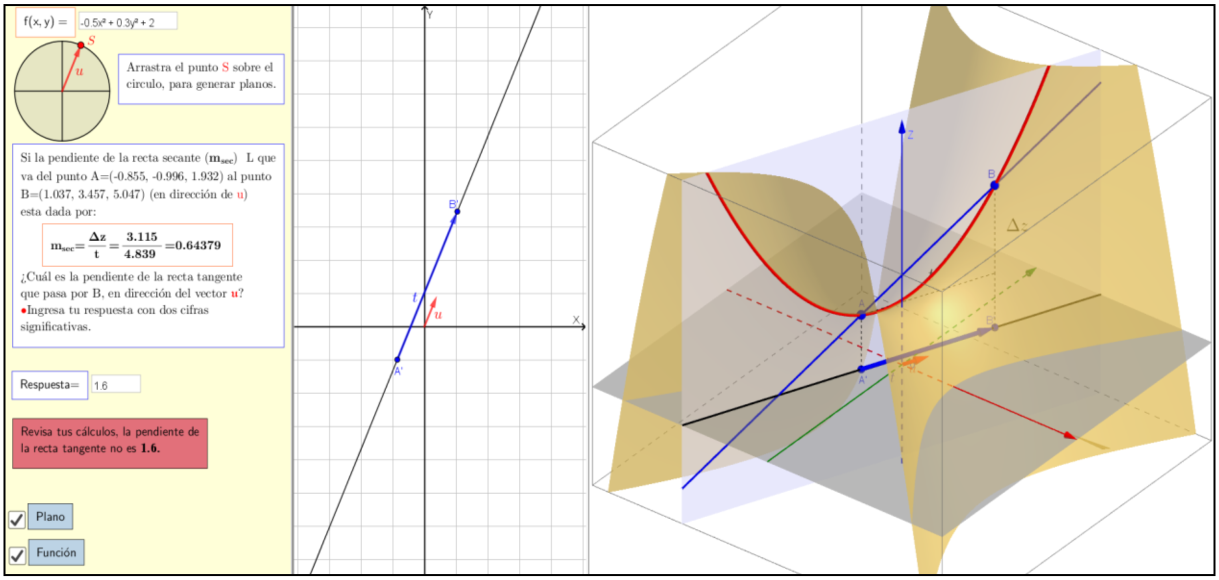

Figura 1. Aproximación de la pendiente de una recta tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 1 muestra el objeto con cual se introdujo la definición de la derivada direccional como el límite de una función en una variable. Con esta práctica se buscaba que el estudiante a partir de las comprensiones adquiridas en las prácticas anteriores, junto a la manipulación, visualización y componentes numéricos y textuales presentes en el objeto, aproximara el valor de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto B en dirección de un vector unitario u, a través del valor de las pendientes de una sucesión de rectas secantes que pasaban por el punto B y por otro punto cercano A, ambos dentro de una curva o traza dada por la intersección de la superficie y un plano vertical paralelo a un vector u, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como la definición del límite de una función de una variable.

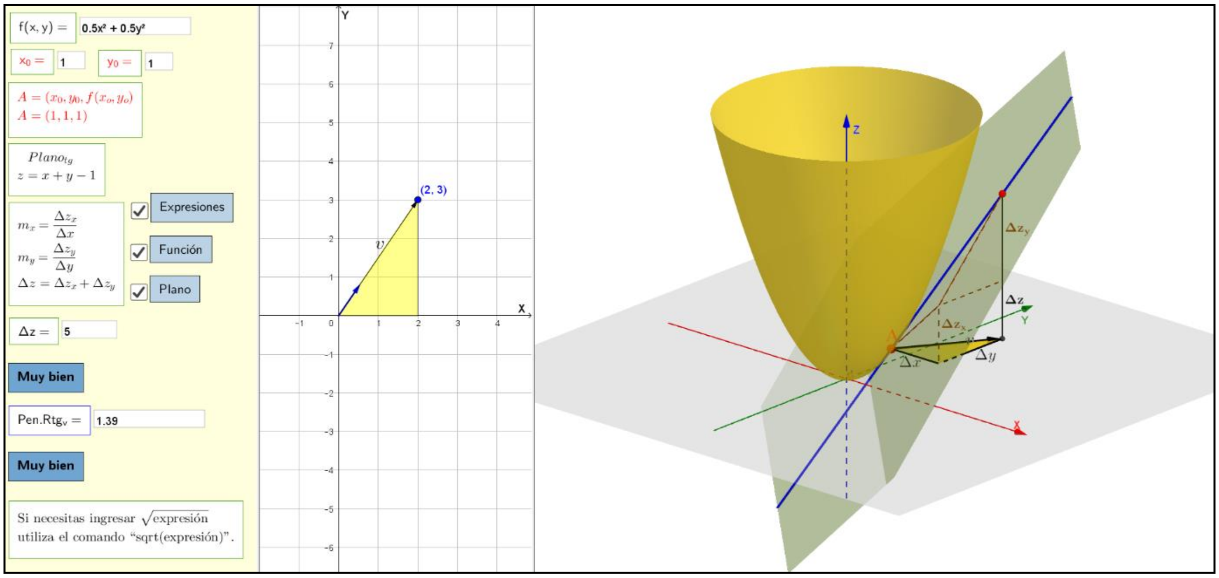

Figura 2. Recta tangente contenida en un plano tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 2, muestra el objeto que refiere a la construcción del teorema de la derivada direccional como el producto punto entre el operador gradiente $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario u, es decir $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y).u$. Cabe la pena señalar que en este punto de la secuencia instruccional los estudiantes ya han realizado con éxito otras actividades que incluyen conceptos como vectores, pendiente de una recta en el espacio, pendiente sobre planos y otros, necesarios para conceptualizar la derivada direccional a través de este teorema. El propósito de esta actividad era articular todos y cada uno de los conceptos desarrollados prácticas anteriores; con base en ello y junto a la exploración visual y algebraica del objeto, se buscaba que el estudiante en principio a partir de una expresión numérica determinara la pendiente de la recta tangente a la función $z = f(x, y)$ que estaba contenida en el plano en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$ como muestra la figura 2, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como el teorema que define la derivada direccional.

Conclusiones

A partir de la información recolectada, se puedo dar cuenta de los progresos que iban adquiriendo los estudiantes en cuanto al manejo y apropiación de todos y cada uno de los objetos. Por un lado, se evidenció el proceso de instrumentalización a partir del desarrollo de esquemas de uso, que lograron los estudiantes, en vista de la manera competente que utilizaron los elementos de cada uno de los objetos. y por otro, el proceso de instrumentación y desarrollo de esquemas de acción instrumentada, en cuanto a los elementos técnicos, conceptuales y colaborativos; este último en relación con las estrategias grupales que utilizaron en la solución de cada una de las actividades.

Por otro lado, los elementos gráficos, dinámicos, numéricos y textuales utilizados en las actividades permitieron a los estudiantes interactuar y explorar cada uno de los objetos de manera activa, encontrando una retroalimentación instantánea de los elementos antes mencionados, que propició en ellos la extrapolación del conocimiento adquirido a medida que avanzaban en cada una de las prácticas. En otras palabras, se pudo dar cuenta del proceso de génesis instrumental logrado por los estudiantes tanto en los temas subyacentes a la derivada direccional como de éste mismo.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, H., and Penney, D. (2008). Calculus: Early Transcendentals 6th Edition, Prentice Hall

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Calculus of a single variable. Cengage Learning.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 81–96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Stewart, J. (2006). Calculus: early transcendentals (6th ed.). Boston: Thomson-Brooks/Cole. Strauss, M., Bradley, G. & Smith, K. (2002). Calculus (3rd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Trigueros, M. & Martínez, P (2012). Students’ understanding of the general notion of a function of two variables. Educational Studies in Mathematics, 81(3), 365-384.

Trigueros, M. & Martínez, P. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. In Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual _elds. Human development, 52(2):83{94}.

Weber E. (2012). Students' Ways of Thinking about Two-Variable Functions and Rate of Change in Space. Ph.D. Dissertation. Arizona State University.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students’ images of two-variable functions and their graphs. Educational Studies in Mathematics, 87(1), 67-85.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America.